فهرست

فصل ۷

دنباله‌ی حسابی و هندسی

ریاضی «۲» + ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی

دنباله‌های حسابی و هندسی در کتاب‌های ریاضی (۲) و ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی مطرح شده و یکی از مباحث بسیار آسانی است که در کنکور سراسری اغلب ۱ تست به آن تعلق می‌گیرد.

تعریف دنباله

به هر تعداد از اعداد که آن‌ها را پشت سرهم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد می‌گوییم.

تذکر:

۱ به هر عدد که در یک دنباله نوشته شده باشد، یک **جمله‌ی دنباله** می‌گوییم.

۲ هر دنباله را با نمادهای $\{a_n\}, \{b_n\}, \{t_n\}, \dots$ نمایش می‌دهند.

تعریف دنباله‌ی بازگشتی: هرگاه جمله‌ی عمومی یک دنباله، برحسب یکی (یا بیشتر از یکی) از جملات قبل از آن باشد، این دنباله را یک **دنباله‌ی بازگشتی** می‌گویند.

دنباله‌ی حسابی

تعریف: دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای است که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن برابر مقدار ثابتی مانند d باشد، یا به عبارت

نکته

اگر دنباله‌ی حسابی جمله‌ی وسط داشته باشد (تعداد جملات فرد باشد)، حاصل‌جمع جمله‌های متساوی الفاصله از طرفین برابر است با، دو برابر جمله‌ی وسطی. به بیان دیگر داریم:

$a_1 =$ [illegible] ، $a_n =$ [illegible] ، $a_k =$ [illegible] $\Rightarrow \mathbf{a_1 + a_n = 2a_k}$

۵ وقتی در یک تست یا مسئله‌ای، مجموع و حاصل‌ضرب ۳ عدد یا ۵ عدد که جمله‌های متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، معلوم باشند و هدف تعیین اعداد باشد، راه‌حل این است که سه جمله‌ای را به ترتیب $a-d$ ، a ، $a+d$ و پنج جمله‌ای را به ترتیب $a-2d$ ، $a-d$ ، a ، $a+d$ ، $a+2d$ فرض نموده، یک دستگاه دو معادله دو مجهولی برحسب a و d تشکیل داده و آن را حل کنیم.

۶ اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی را با عدد k جمع کنیم یا عدد k را از آن کم کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی تغییر نمی‌کند.

۷ اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی را k برابر کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی نیز k برابر می‌شود.

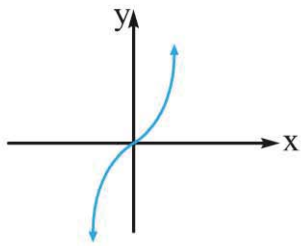
۸ اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی را بر عدد k تقسیم کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی نیز بر عدد k تقسیم می‌شود. $(k \neq 0)$

۹ در دنباله‌ی حسابی غیر ثابت a_n ، با قدرنسبت $d \neq 0$ ، اگر فقط جملات مرتبه‌ی زوج یا مرتبه‌ی فرد را نگه داریم، آن‌گاه دنباله‌ی حسابی جدیدی با قدرنسبت $2d$ به وجود می‌آید.

f را یک تابع اکیداً صعودی می‌گویند هرگاه به ازای هر:

۲) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

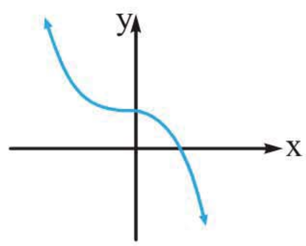
(یعنی با افزایش xها، yها افزایش پیدا می‌کنند.)



f را یک تابع نزولی می‌گویند هرگاه به ازای هر:

۳) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

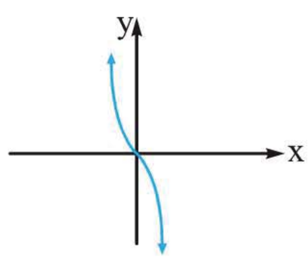
(یعنی با افزایش xها، yها افزایش نمی‌یابند.)



f را یک تابع اکیداً نزولی می‌گویند هرگاه به ازای هر:

۴) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(یعنی با افزایش xها، yها کم می‌شوند.)



نتیجه‌گیری کلی: هر تابع اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی را **اکیداً یکنوا** می‌نامیم و هر تابع صعودی و یا نزولی را **یکنوا** می‌نامیم.

نکات

۱ تابع ثابت $f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$ هم نزولی و هم صعودی است.

۲ در منحنی‌های توابع اکیداً یکنوا، هیچ دو نقطه با عرض‌های برابر نباید وجود داشته باشد.

نکاتی که در محاسبه‌ی حدود، به آن‌ها نیاز داریم

۱ $\dfrac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفر حدی}} = \infty$	۲ $\dfrac{\text{عدد}}{\infty} = \text{صفر}$
۳ $\dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$	۴ $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = \text{صفر}$
۵ $\dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}} = \text{مبهم}$	۶ $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$
۷ $(\text{صفر مطلق}) \times \infty = \text{صفر}$	۸ $(\text{صفر حدی}) \times \infty = \text{مبهم}$
۹ $\dfrac{\text{صفر حدی}}{\infty} = \text{صفر}$	۱۰ $\dfrac{\infty}{\text{صفر حدی}} = \infty$
۱۱ $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\infty} = \text{صفر}$	۱۲ $\dfrac{\infty}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$
۱۳ $(\text{صفر مطلق})^{+\infty} = \text{صفر}$	۱۴ $(\text{صفر مطلق})^{-\infty} = \text{تعریف نشده}$
۱۵ $(\text{صفر حدی})^{+\infty} = \text{صفر}$	۱۶ $(\text{صفر حدی})^{-\infty} = \infty$
۱۷ $(0 < \text{عدد} < 1)^{+\infty} = \text{صفر}$	۱۸ $(-1 < \text{عدد} < 0)^{+\infty} = \text{صفر}$
۱۹ $(0 < \text{عدد} < 1)^{-\infty} = \infty$	۲۰ $+\infty + \infty = +\infty$
۲۱ $-\infty - \infty = -\infty$	۲۲ $+\infty - \infty = \text{مبهم}$
۲۳ $\dfrac{\infty}{\infty} = \text{مبهم}$	۲۴ $\infty^{-\infty} = \text{صفر}$
۲۵ $(\infty)^{\text{صفر مطلق}} = 1$	۲۶ $(\text{یک مطلق})^{\infty} = 1$

حد چند تابع خاص

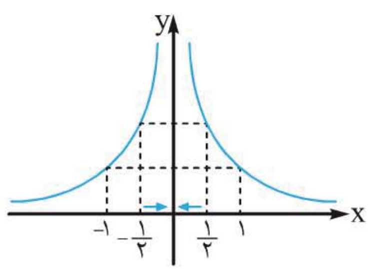
۱ بررسی حد در تابع $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; \quad x \in \mathbb{Z} \\ f_2(x) & ; \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

برای محاسبه‌ی حد تابع f در $x = a$ (صحیح یا غیرصحیح)، همواره داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

۲ اگر تابع f به ازای هر x در اطراف a تعریف شده باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} ([f(x)]+[-f(x)]) = -1$

حد بی‌نهایت (حد نامتناهی)

تعبیر هندسی مفهوم حد بی‌نهایت

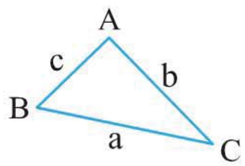


نمودار تابع نشان می‌دهد که وقتی مقادیر x، به سمت صفر میل کنند، مقادیر تابع در مجاورت محور yها زیاد و زیادتر می‌شوند.

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ی باز I شامل x_0 مگر احتمالاً در x_0 تعریف شده باشد، گوییم حد تابع f وقتی که x به سمت x_0 میل می‌کند برابر مثبت بی‌نهایت است، هرگاه: اگر x به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، آن‌گاه $f(x)$ از هر عدد مثبتی بزرگ و بزرگ‌تر شود. در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ی باز I شامل x_0 مگر احتمالاً در x_0 تعریف شده باشد، گوییم حد تابع f وقتی x به سمت x_0 میل می‌کند، برابر منهای بی‌نهایت است، هرگاه: اگر x به قدر کافی به x_0 نزدیک شود $f(x)$ از هر عدد منفی، کوچک و کوچک‌تر

دستور هرون: اگر اندازه‌ی اضلاع مثلث ABC به صورت $AB = c$ و $BC = a$ و $AC = b$ و $P = \frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

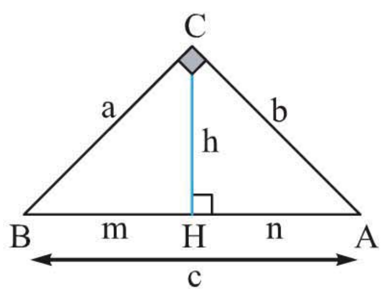
رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه

تعریف: عدد مثبت a را واسطه‌ی هندسه‌ی بین دو عدد مثبت b و c می‌نامند، هرگاه $a^۲ = b \times c$.

قضیه: در هر مثلث قائم‌الزاویه:

الف) ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی دو پاره‌خطی است که پای ارتفاع بر وتر پدید آورده است.

ب) هر ضلع زاویه‌ی قائمه، واسطه‌ی هندسی اندازه‌ی تصویر قائم آن ضلع بر وتر است.



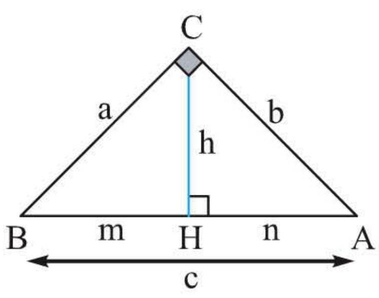
۱) $h^۲ = m \times n$

۲) $b^۲ = c \times n$

۳) $a^۲ = c \times m$

قضیه: در هر مثلث قائم‌الزاویه:

الف) حاصل‌ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه، برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر. $ab = ch$

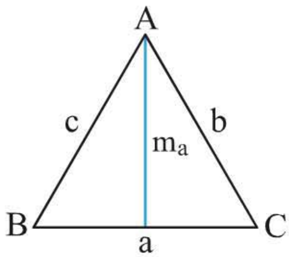


ب) مربع عکس ارتفاع وارد بر وتر برابر است با مجموع مربعات وارون‌های دو ساق.

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

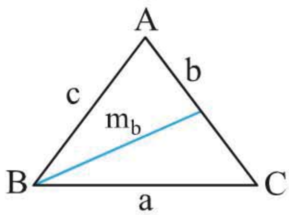
۱ قضیه‌ی میانه‌ها: در هر مثلث، مجموع مربعات هر دو ضلع برابر است با دو برابر مربع میانه‌ی نظیر ضلع سوم به علاوه‌ی نصف مربع ضلع سوم.

۱



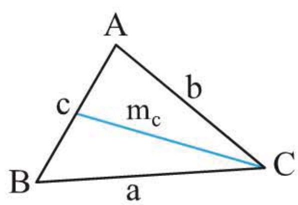
$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$

۲



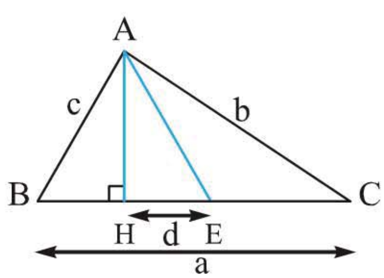
$$a^2+c^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2}$$

۳



$$a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}$$

۲ در هر مثلث، تفاضل مربع‌های دو ضلع برابر است با دو برابر حاصل‌ضرب ضلع سوم در تصویر قائم میانه‌ی نظیر ضلع سوم بر آن ضلع.



$$b^2-c^2=2a\times d$$

۲) $\sqrt[3]{an^3+bn^2+cn+d} \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt[3]{a}\,(n+\frac{b}{3a})$

۲

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{bn} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}$$

۳ هم‌ارزی‌های معروف مثلثاتی

۱ $\sin^n u \overset{u\to 0}{\sim} u^n$	۲ $\tan^n u \overset{u\to 0}{\sim} u^n$
۳ $1-\cos u \overset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$	۴ $u-\sin u \overset{u\to 0}{\sim} \frac{u^3}{6}$
۵ $\tan u - u \overset{u\to 0}{\sim} \frac{u^3}{3}$	۶ $\tan u - \sin \overset{u\to 0}{\sim} \frac{u^3}{2}$

دنباله‌ی اعداد

۱ سرعت رشد دنباله‌ها

$n^n > n! > a^n > n^a > \log_a^n$

۲ هم‌ارزی‌های رادیکالی برای محاسبه‌ی حدود

۱ $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots} \overset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}\,|x+\frac{b}{na}|$ (n زوج)

۲ $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots} \overset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}\,(x+\frac{b}{na})$ (n فرد)

۳ $\sqrt[n]{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} \overset{x\to\pm\infty}{\sim} |x-\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)|$

(اگر n فرد باشد، قدرمطلق نمی‌گذاریم.)

۴ $x\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} \overset{x\to\pm\infty}{\sim} x+\frac{a-b}{n}$

مجانب

۱ اگر خط $y = mx + h$ مجانب مایل نمودار $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad h = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

مشتق

۱ قاعده‌ی مشتق زنجیری

$$\begin{cases} y = f(u) \Rightarrow y'_u = f'(u) \\ u = g(x) \Rightarrow u'_x = g'(x) \end{cases} \Rightarrow y'_x = y'_u \times u'_x$$

۲ معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ واقع بر منحنی f

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

۳ شیب خطوط مماس بر منحنی‌های f و g در محل تلاقی به ترتیب $m_1 = f'(x_0)$ و $m_2 = g'(x_0)$، باشد، آن‌گاه:

$$\tan\alpha = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

۴ معادله‌ی خط قائم از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ واقع بر منحنی f

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

کاربرد مشتق

۱ آهنگ تغییرات متوسط $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

مجموعه کتاب‌های لقمه

خلاصه‌ی ریاضیات کنکور تجربی در دستان شماست!

این کتاب مروری کامل بر مفاهیم، فرمول ها و نکات ۷ کتاب ریاضی رشته‌ی تجربی می باشد. این چکیده‌ی مختصر و مفید به شما کمک می کند که بر چهارچوب های کلی و روابط مهم ریاضیات تجربی مسلط شوید و هر وقت که خواستید به آن مراجعه کنید. خوب است بدانید در این خلاصه، مطالب به صورت کتاب به کتاب و فصل به فصل دسته بندی شده، بنابراین برای یافتن مطالب و استفاده از آن بسیار راحت است.

مهروماه

۰۲۱-۶۶۴۰۸۴۰۰

۳۰۰۰۷۲۱۲۰

www.mehromah.ir

9786003170247