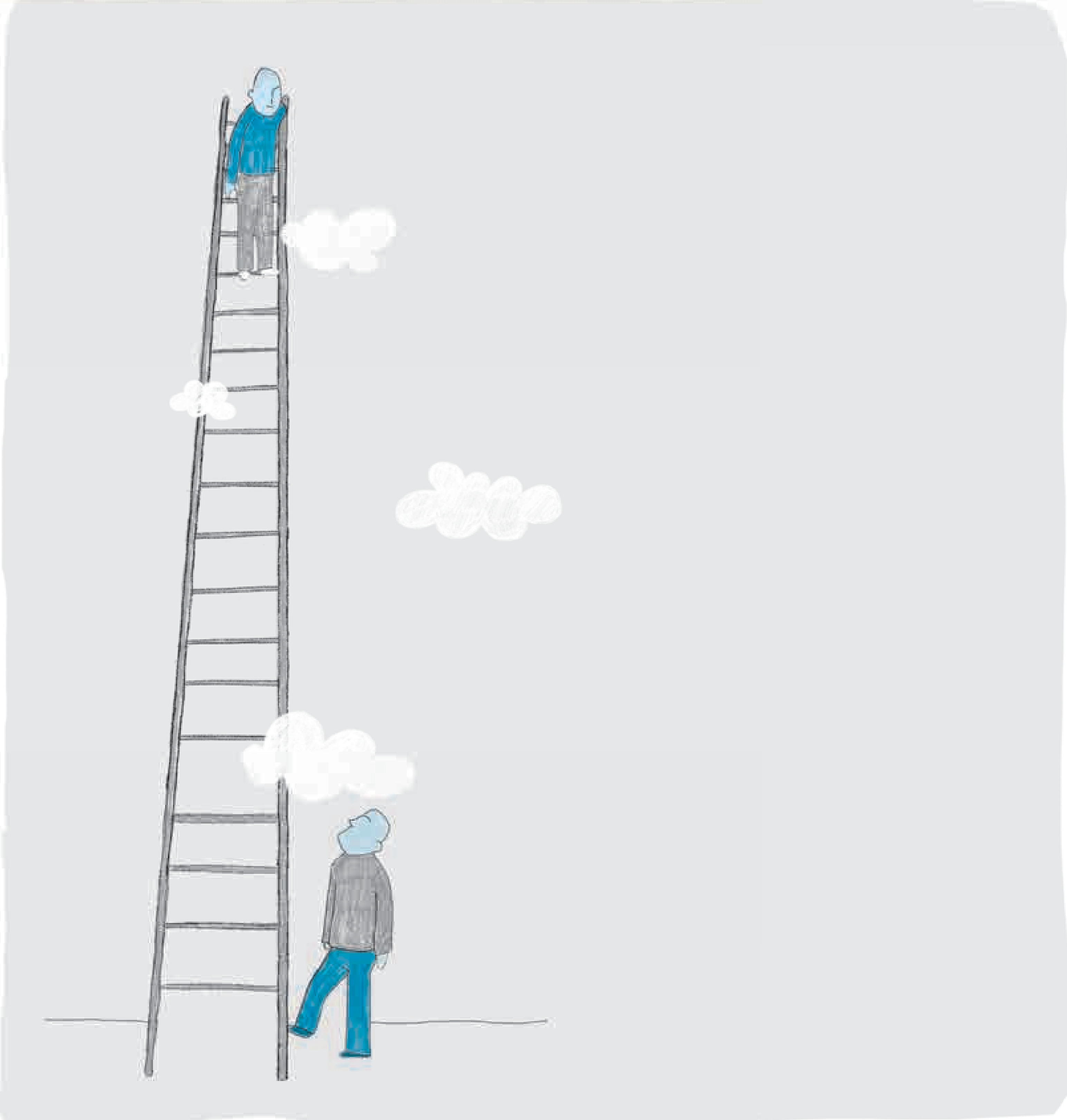
فهرست

فصل ۳ نوسان و امواج



بخش ۱ نوسان

۱) نوسان دوره‌ای

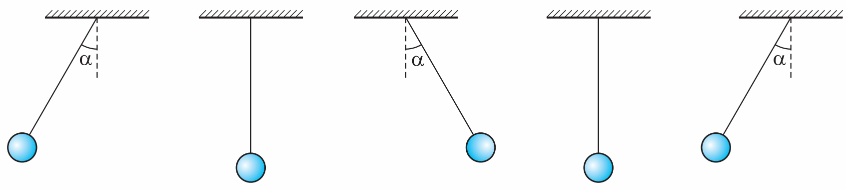
تعریف نوسان دوره‌ای: به حرکت‌هایی که در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی عیناً تکرار شود، **حرکت‌های دوره‌ای** می‌گوییم. اگر این حرکت به شکل نوسانی (رفت و برگشت) باشد، آن را «**نوسان دوره‌ای**» می‌گوییم.

نمونه ضربان منظم قلب، تاب‌خوردن یک بچه، حرکت رفت و برگشتی پیستون در موتور اتومبیل نمونه‌هایی از نوسان دوره‌ای‌اند.

چرخه (سیکل): هر نوسان کامل را یک «**چرخه** (سیکل)» می‌نامیم.

دورهٔ تناوب: مدت‌زمان انجام یک چرخه را «**دورهٔ تناوب**» حرکت می‌نامیم و آن را با T نشان می‌دهیم.

نمونه در شکل ۱ـ الف، آونگی را به اندازهٔ α از وضع قائم، منحرف و سپس رها کرده‌ایم. آونگ در مدت $\Delta t = \frac{T}{2}$ یک بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند و در وضعیت نشان‌داده‌شده در شکل ۱ـ پ قرار می‌گیرد و پس از مدت T به وضعیت اولیه‌اش برمی‌گردد (شکل ۱ـ ث) و … . (این داستان ادامه دارد!)



شکل ۱: وضعیت یک نوسانگر در لحظه‌های: الف) $t=0$، ب) $t=\frac{T}{4}$، پ) $t=\frac{T}{2}$، ت) $t=\frac{3T}{4}$، ث) $t=T$

نتیجه **نوسانگر، در یک نوسان کامل، دو بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند.** *(پس یادتون نره؛ هر رفت یا هر برگشت، می‌شه نیم‌نوسان؛ رفت‌وبرگشت می‌شه یک نوسان.)*

نکته اگر نوسانگر در مدت t، n نوسان کامل انجام دهد، داریم: (رابطهٔ ۱)

$$n = \frac{t}{T}$$

بسامد: تعداد نوسان‌هایی که در ۱s انجام می‌شود، «**بسامد**» یا «**فرکانس**» نام دارد و با نماد f نشان داده می‌شود. یکای بسامد در SI، «**هرتز** Hz» است و رابطهٔ آن با دوره مطابق رابطهٔ (۲) است. (رابطهٔ ۲)

$$f = \frac{1}{T}$$

تست **دو آونگ سادهٔ A و B را با هم و با دامنهٔ کم به نوسان درمی‌آوریم. اگر دورهٔ نوسان آونگ A برابر ۱/۸ ثانیه و دورهٔ نوسان آونگ B برابر ۱/۵ ثانیه باشد، پس از گذشت ۳۶ ثانیه، آونگ B چند نوسان بیشتر از آونگ A انجام می‌دهد؟**

۱) ۱۲　　۲) ۸　　۳) ۴　　۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** تعداد نوسان آونگ‌ها را با استفاده از رابطهٔ (۱) به دست می‌آوریم:

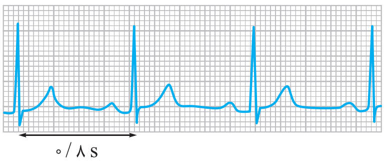
$$\left.\begin{array}{l} n_A = \frac{t}{T_A} = \frac{۳۶}{۱/۸} = ۲۰ \\ n_B = \frac{t}{T_B} = \frac{۳۶}{۱/۵} = ۲۴ \end{array}\right\} \Rightarrow n_B - n_A = ۲۴ - ۲۰ = ۴$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۱۰- فاصلهٔ نوسانگری از مرکز نوسان، در لحظه‌های $t = 2n + 1$ ثانیه $(n = 0, 1, 2, ...)$ بیشینه می‌شود. بسامد این نوسانگر چند هرتز است؟

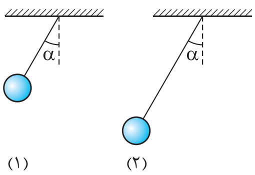
۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۲ ۴) ۴

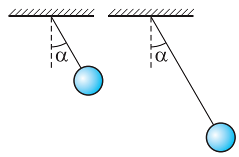
۷۱۱- شکل روبه‌رو، نوار قلب شخصی را نشان می‌دهد. قلب این شخص در هر دقیقه چند بار می‌زند؟

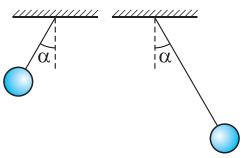


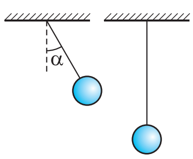
۱) ۴۸
۲) ۶۵
۳) ۷۲
۴) ۷۵

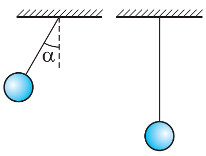
۷۱۲- دو آونگ (۱) و (۲) با دوره‌های $T_1 = 2/5\,s$ و $T_2 = 4\,s$، به طور هم‌زمان، از وضعیتی که در شکل روبه‌رو نشان داده شده است، شروع به حرکت می‌کنند. پس از مدت ۱۰ s از لحظهٔ آغاز حرکت، دو آونگ در کدام‌یک از نماهای زیر دیده می‌شوند؟ (اثر مقاومت هوا ناچیز است.)



۱)


۲)


۳)


۴)


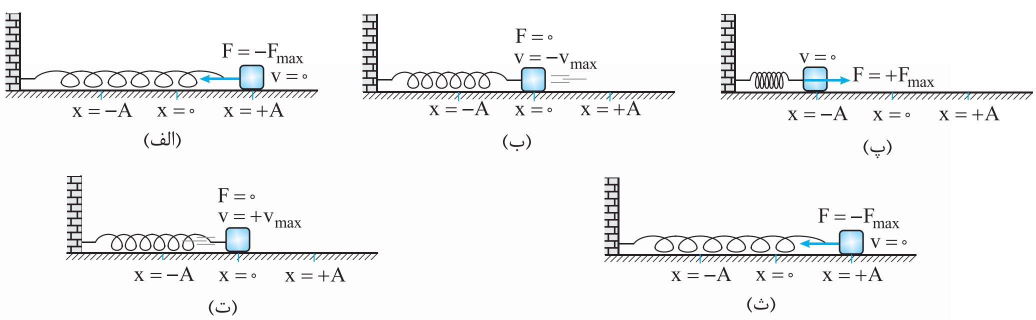
۷۱۳- در تست ۷۱۲، آونگ ۱ پس از چند ثانیه ۶ نوسان از آونگ ۲ جلو می‌افتد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۲) ویژگی‌های حرکت هماهنگ ساده

حرکت هماهنگ ساده نوع خاصی از حرکت نوسانی است که روی یک پاره‌خط و حول نقطهٔ وسط آن انجام می‌شود. برای این‌که به ویژگی‌های این حرکت پی ببرید، حرکت نوسانی وزنهٔ متصل به فنری را بررسی می‌کنیم.

نمونه وزنهٔ متصل به فنر افقی‌ای را در نظر بگیرید که مطابق شکل (۲)، روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. مکان $x = 0$ را منطبق بر نقطهٔ تعادل دستگاه در نظر گرفته‌ایم و مکان‌های سمت راست آن را با علامت مثبت و مکان‌های سمت چپش را با علامت منفی نشان داده‌ایم. وزنه را مطابق شکل ۲ـ الف، به اندازهٔ A از نقطهٔ تعادل، خارج و سپس آن را رها می‌کنیم. طبق قانون هوک $(F_e = -kx)$[1]، نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت جابه‌جایی وزنه از نقطهٔ تعادل (x) به وزنه اثر می‌کند و آن را به سمت نقطهٔ تعادل می‌کشاند. در این مدت، چون نیروی وارد بر وزنه در جهت حرکت آن است، حرکت وزنه به صورت تندشونده است. وقتی وزنه به نقطهٔ تعادل می‌رسد، فنر طول طبیعی‌اش را پیدا می‌کند (شکل ۲ـ ب) و نیروی کشسانی فنر صفر می‌شود؛ با این حال، وزنه به خاطر لختی‌ای که دارد، به حرکت رو به چپ خود ادامه می‌دهد و فنر را فشرده می‌کند. فنرِ فشرده‌شده نیرویی به سمت راست به وزنه وارد می‌کند که باعث کندشدن و در نهایت، توقف وزنه در مکان $x = -A$ می‌شود (شکل ۲ـ پ). در این لحظه، وزنه بیشترین فاصله را از نقطهٔ تعادل دارد و نیروی کشسانی فنر، بیشینه است. سپس، وزنه در خلاف جهت اولیه به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ تا کجا؟ تا وقتی که به مکان اولیه‌اش $(x = +A)$ برسد (شکل ۲ـ ث). وزنه در این لحظه متوقف می‌شود و دوباره حرکتش را از نو تکرار می‌کند؛ به این ترتیب، وزنه بین نقاط $x = A$ و $x = -A$ مرتب پس و پیش می‌شود.



(شکل ۲)

۱- در فصل قبلی قانون هوک را به شکل $F = kx$ معرفی کردیم که F و x اندازهٔ نیرو و جابه‌جایی از نقطهٔ تعادل بودند. اصل این رابطه به شکل $\vec{F} = -k\vec{x}$ است که علامت منفی جهت مخالف $\vec{F}$ و $\vec{x}$ را نشان می‌دهد.

توجه۱ **بیشترین فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ تعادل را «دامنه» می‌نامیم** و آن را با نماد A نشان می‌دهیم $(x_{max} = A)$. دامنه همواره با عددی مثبت بیان می‌شود.

توجه۲ در حرکت هماهنگ ساده، معمولاً مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز نوسان می‌گیرند. با این قرارداد، مکان نوسانگر در هر لحظه، برابر جابه‌جایی آن از نقطهٔ تعادل است. اگر نوسانگر روی محور x حرکت کند، مکان آن را با x و اگر روی محور y حرکت کند، مکان آن را با y نشان می‌دهیم.

توجه۳ نوسانگر در مکان‌های $x = \pm A$ تغییر جهت می‌دهد. از این رو به این نقاط «**نقطه‌های بازگشت**» می‌گویند.

استراتژی و نکات لازم برای حل تست‌های این بخش

۱ در حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر روی یک پاره‌خط و حول نقطهٔ تعادلش نوسان می‌کند؛ به طوری‌که نیروی وارد بر نوسانگر، متناسب با جابه‌جایی آن از نقطهٔ تعادل و در خلاف جهت آن است.

نتیجه۱ جهت نیروی وارد بر نوسانگر (و شتاب) همواره به سمت نقطهٔ تعادل (مرکز نوسان) است. بنابراین، وقتی **نوسانگر در مکان مثبت است، علامت نیروی وارد بر آن منفی و وقتی در مکان منفی است، علامت نیروی وارد بر آن مثبت است** $(x > 0 \Rightarrow F < 0 \;,\; x < 0 \Rightarrow F > 0)$.

نتیجه۲ اندازهٔ نیروی وارد بر نوسانگر ثابت نیست و با فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ تعادل متناسب است؛ **در دو انتهای مسیر که فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ تعادل بیشینه است، اندازهٔ نیروی وارد بر نوسانگر (و شتاب آن)، بیشینه است** $(x = \pm A \Rightarrow F = \mp F_m)$ **و در مرکز نوسان که فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ تعادل صفر است، نیروی وارد بر نوسانگر (و شتاب آن) صفر است** $(x = 0 \Rightarrow F = 0)$.

۲ در مدتی که نوسانگر به نقطهٔ تعادل **نزدیک** می‌شود، حرکت آن به صورت **تندشونده** و در مدتی که نوسانگر از نقطهٔ تعادل دور می‌شود، حرکت آن به صورت **کندشونده** است؛ طوری که سرعت نوسانگر در دو انتهای مسیر **صفر** است $(x = \pm A \Rightarrow v = 0)$ و در مرکز نوسان **بیشینه** است $(x = 0 \Rightarrow v = \pm v_{max})$.

۳ طول مسیر نوسان ۲ برابر دامنه است: $= 2A$ طول مسیر نوسان

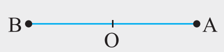
نتیجه۳ از آن‌جا که نوسانگر در هر دوره، ۲ بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند، **مسافت طی‌شده توسط نوسانگر در هر دوره، ۴ برابر دامنه است** $(l = 4A)$.

۴ زمان جابه‌جایی نوسانگر از مرکز نوسان تا یک انتهای مسیر (و برعکس)، برابر ربع دوره $(\frac{T}{4})$ است.

۵ زمان جابه‌جایی نوسانگر بین دو انتهای مسیر، برابر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ است.

۶ زمان بین دو عبور متوالی نوسانگر از مرکز نوسان، برابر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ است.

تست **متحرکی میان دو نقطهٔ A و B حرکت هماهنگ ساده دارد. اگر در لحظهٔ $t_1 = 1\,s$ در نقطهٔ B و در لحظهٔ $t_2 = 7\,s$ در نقطهٔ A باشد، بزرگ‌ترین دورهٔ حرکت چند ثانیه است؟** *(سراسری ریاضی ۸۶، با تغییر)*



۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ **گزینهٔ «۱»** بازهٔ زمانی جابه‌جایی متحرک بین دو نقطهٔ A و B برابر $6\,s$ است: $\Delta t = t_2 - t_1 = 7 - 1 = 6\,s$

اگر متحرک در این مدت فقط یک بار طول مسیر AB را طی کرده باشد، دورهٔ آن بیشینه خواهد بود. زمانِ یک بار طی‌کردن مسیر نوسان، برابر نصف دوره است: $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = 6 \Rightarrow T = 12\,s$

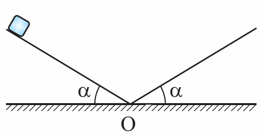
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۱۴- تندی جسمی ثابت است. حرکت این جسم چگونه می‌تواند باشد؟ *(سراسری تجربی قدیمی)*

۱) امکان ندارد دوره‌ای باشد. ۲) ممکن است دوره‌ای باشد. ۳) ممکن است هماهنگ ساده باشد. ۴) گزینه‌های ۲ و ۳

◄ *تست بعدی رو برای این طرح کردیم که بهتون بگیم هر نوسانگری نوسانگر ساده نیست!!*

۷۱۵- در شکل روبه‌رو، جسم کوچکی از ارتفاع معینی روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی رها می‌شود و پس از عبور از نقطهٔ O روی سطح شیب‌دار مشابهی تا همان ارتفاع اولیه بالا می‌رود. نوع حرکت جسم چگونه است؟



۱) دوره‌ای است، اما نوسانی نیست. ۲) نوسانی است، اما هماهنگ ساده نیست.
۳) هماهنگ ساده است. ۴) دوره‌ای نیست.

۷۱۶- در لحظه‌ای که بزرگی شتاب یک نوسانگر هماهنگ ساده کاهش می‌یابد، کدام‌یک از کمیت‌های آن افزایش می‌یابد؟

۱) تکانه ۲) جابه‌جایی از نقطهٔ تعادل ۳) بسامد ۴) انرژی مکانیکی

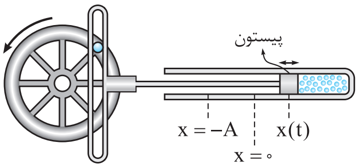
۷۱۷- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای حول مبدأ مختصات، روی محور yها در نوسان است. در لحظه‌ای که نیروی وارد بر نوسانگر منفی باشد، علامت‌های مکان و سرعت آن، به ترتیب از راست به چپ، چگونه است؟ *(سراسری تجربی قدیمی)*

۱) مثبت ـ مثبت یا منفی ۲) مثبت یا منفی ـ منفی ۳) منفی ـ مثبت یا منفی ۴) مثبت یا منفی ـ مثبت

۷۱۸- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در لحظه‌های $t = ۱\,s$، $t = ۳\,s$ و $t = ۷\,s$ به ترتیب برای اولین، دومین و سومین بار به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری از نقطهٔ تعادلش قرار می‌گیرد. دورهٔ تناوب نوسانگر چند ثانیه است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۷۱۹- شکل مقابل، الگوی ساده‌ای از چرخ در یک موتور را نشان می‌دهد که در آن، حرکت هماهنگ سادهٔ پیستون به چرخش یکنواخت چرخ تبدیل می‌شود. مساحت مقطع پیستون $۱۰۰\,cm^۲$ و کم‌ترین و بیشترین حجم گاز محبوس در سمت راست پیستون، به ترتیب $۱\,L$ و $۳\,L$ می‌شود. اگر تندی گردش چرخ $۵۴\,km/h$ باشد، بسامد نوسان پیستون چند هرتز است؟

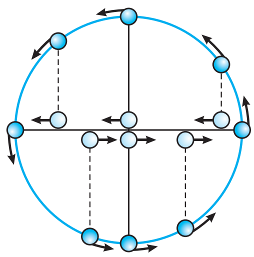


(برگرفته از کتاب «فیزیک دانشگاهی»، نوشتهٔ «سِروِی و ...»، با تغییرات اساسی!)

۱) $\frac{۷۵}{۲\pi}$ ۲) $\frac{۷۵}{\pi}$ ۳) $\frac{۱۵۰}{\pi}$ ۴) $\frac{۳۰۰}{\pi}$

۳) معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده

دایرهٔ مرجع: به شکل (۳) نگاه کنید! در این شکل، ذره‌ای به طور یکنواخت، در جهت مثلثاتی (پادساعت‌گرد) روی دایره‌ای می‌چرخد. تصویر ذره روی قطر افقی دایره، در چند نقطه نمایش داده شده است. همان‌گونه که از شکل پیدا است، تصویر ذره روی قطر دایره حرکت رفت‌وبرگشتی دارد و در مدت یک دوره که ذره محیط دایره را یک دور کامل می‌زند، تصویر آن بر روی قطر، یک نوسان کامل انجام می‌دهد.

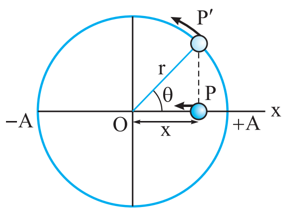


(شکل ۳)

توجه۱ تصویر ذره روی قطر قائم هم نوسان می‌کند که این حرکت را در شکل نشان نداده‌ایم.

◀ اگر جسم روی قطر دایره حرکت هماهنگ ساده انجام دهد، تصویر آن روی دایره به طور یکنواخت می‌چرخد. پس یک حرکت هماهنگ ساده را می‌توان به کمک تصویر آن بر روی دایره‌ای به قطر $۲A$ (طول مسیر نوسان) نمایش داد. این دایره را «**دایرهٔ مرجع**» می‌نامیم. این دایره، واقعاً ابزار مفیدی برای نمایش هندسی حرکت هماهنگ ساده و درک کمیت‌های مرتبط با آن است.

◀ در شکل (۴)، نقطهٔ P روی محور x حرکت هماهنگ ساده می‌کند. تصویری از P را که روی دایرهٔ مرجع در جهت پادساعت‌گرد دوران می‌کند، «**نقطهٔ مرجع**» می‌نامیم و آن را با P' نمایش داده‌ایم. زاویه‌ای را که شعاع حامل ذره روی دایرهٔ مرجع با محور مکان می‌سازد با θ نشان داده‌ایم. جابه‌جایی ذرهٔ P از مبدأ (O) در هر لحظهٔ دلخواه برابر x است که مکان نوسانگر را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۴، معادلهٔ حرکت نوسانگر به صورت زیر تعیین می‌شود:



(شکل ۴)

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{A} \Rightarrow \boxed{x = A\cos\theta} \quad \text{(رابطهٔ ۳)}$$

چون نقطهٔ مرجع با دورهٔ ثابت T دوران می‌کند، رابطهٔ مقابل در مورد آن برقرار است: (این رابطه را در مبحث جریان متناوب دیده‌اید.) $\Delta\theta = (\frac{۲\pi}{T})\Delta t$

نسبت «$\frac{۲\pi}{T}$» را «**بسامد زاویه‌ای**» می‌نامیم و آن را با «ω» نشان می‌دهیم:

$$\boxed{\omega = \frac{۲\pi}{T}} \ \text{(رابطهٔ ۴)}\ ,\ f = \frac{۱}{T} \Rightarrow \boxed{\omega = ۲\pi f} \ \text{(رابطهٔ ۵)} \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = \omega\Delta t} \ \text{(رابطهٔ ۶)}$$

در چارچوب کتاب درسی در این بخش فرض می‌شود نوسانگر در مبدأ زمان از مکان $x = +A$ در جهت منفی محور مکان شروع به حرکت می‌کند. بنابراین θ در مبدأ زمان صفر فرض می‌شود و داریم:

$$\theta - \theta_۰ = \omega(t - t_۰)$$

$$\theta - ۰ = \omega(t - ۰) \Rightarrow \theta = \omega t \Rightarrow \boxed{x = A\cos\omega t} \quad \text{(رابطهٔ ۷)}$$

توجه۲ به $\theta = \omega t$ شناسهٔ تابع یا فاز نوسانگر گفته می‌شود.

توجه۳ اگر نوسانگر به جای حرکت روی محور x، روی محور y نوسان کند، تمام مطالب بالا برقرار است؛ فقط برای بیان مکان، به جای نماد x، از نماد y استفاده می‌شود و اصل قضیه تغییر نمی‌کند.

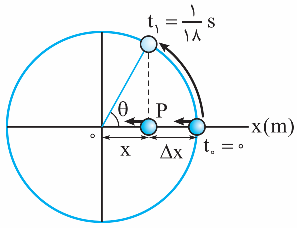
نمونه فرض کنید معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = 4\cos 6\pi t$ است. از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده متوجه می‌شویم:

$$\begin{cases} x = 4\cos 6\pi t \\ x = A\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow A = 4\,m, \omega = 6\pi\ rad/s$$

در لحظهٔ دلخواه $t_1 = \frac{1}{18}s$، عبارت ωt_1 برابر $\frac{\pi}{3}rad$ و نوسانگر در فاصلهٔ ۲ متری از مبدأ قرار می‌گیرد.

$$x = 4\cos 6\pi \times \frac{1}{18} = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4\times\frac{1}{2} = 2\,m$$

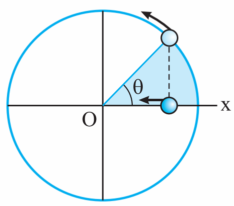
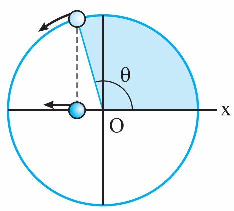
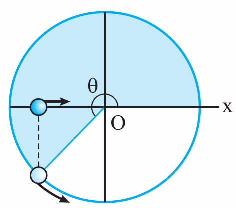
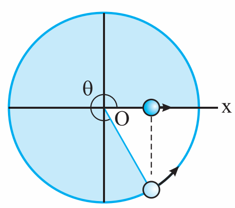
نحوهٔ حرکت نوسانگر و تصویر آن روی دایرهٔ مرجع در بازهٔ زمانی $t_0 = 0$ تا $t_1 = \frac{1}{18}s$ در شکل (۵) دیده می‌شود؛ ببین!



(شکل ۵)

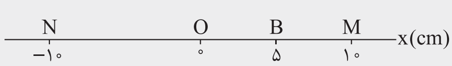
استراتژی و نکات لازم برای حل تست‌های این بخش

۱ بیشترین استفاده‌ای که از دایرهٔ مرجع می‌شود، تشخیص موقعیت نوسانگر است. در جدول (۱) نحوهٔ تشخیص جایگاه متحرک با توجه به وضعیت حرکتی آن آورده شده است.

محدودهٔ θ	ناحیهٔ مثلثاتی	علامت مکان	جهت حرکت	نوع حرکت	موقعیت نقطهٔ مرجع
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	اول	مثبت	منفی	تندشونده	
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	دوم	منفی	منفی	کندشونده	
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	سوم	منفی	مثبت	تندشونده	
$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	چهارم	مثبت	مثبت	کندشونده	

جدول (۱)

تست در شکل زیر، ذره‌ای روی محور x بین نقاط M و N حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نوسانگر در مبدأ زمان از نقطهٔ M گذشته و سرعتش در این لحظه منفی باشد و در لحظهٔ $t = 0/2\,s$ برای اولین‌بار از نقطهٔ B عبور کند، معادلهٔ حرکت آن در SI کدام است؟



۱) $x = 0/1\cos\frac{5\pi}{6}t$
۲) $x = 0/1\cos\frac{5\pi}{3}t$
۳) $x = 0/2\cos\frac{5\pi}{6}t$
۴) $x = 0/2\cos\frac{5\pi}{3}t$

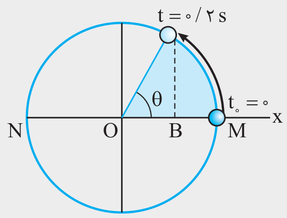
پاسخ گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول: (براساس کتاب درسی)**؛ بیشترین فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان $10\,cm$ است. پس دامنهٔ حرکت نوسانگر $10\,cm$ است.

$$A = OM = 10\,cm = 0/1\,m \Rightarrow x = A\cos\omega t = 0/1\cos\omega t$$

در لحظهٔ $t = 0/2\,s$ نوسانگر برای اولین بار در مکان $x_B = 5\,cm = 0/05\,m$ واقع می‌شود. با این مختصات می‌توان ω را حساب کرد.

$$0/05 = 0/1\cos\omega\times 0/2 \Rightarrow \cos 0/2\omega = 0/5 \Rightarrow 0/2\omega = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{3}\,rad/s \Rightarrow x = 0/1\cos\frac{5\pi}{3}t$$

راه‌حل دوم: (براساس دایرهٔ مرجع)؛ در شکل روبه‌رو، موقعیت نقطهٔ مرجع را در لحظه‌های $t_0 = 0$ و $t = 0/2\,s$ روی دایرهٔ مرجع نشان داده‌ایم. با توجه به این‌که نقطهٔ مرجع در لحظهٔ $t = 0/2\,s$ در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارد، داریم:



$$\cos\theta = \frac{x_B}{A} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\,rad$$

با این حساب، نقطهٔ مرجع در مدت $\Delta t = 0/2\,s$ به اندازهٔ $\Delta\theta = \frac{\pi}{3}\,rad$ دوران می‌کند.

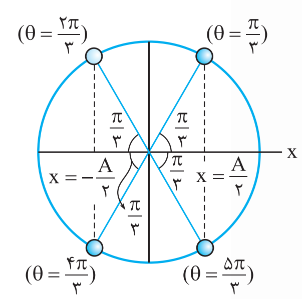
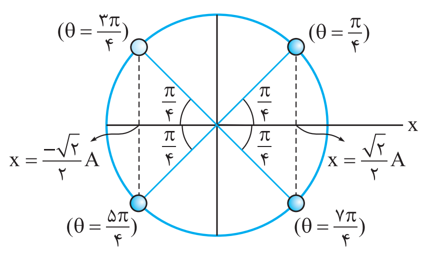
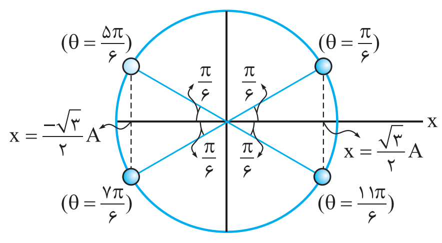
$$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \omega\times 0/2 \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{3}\,rad/s \Rightarrow x = A\cos\omega t = 0/1\cos\frac{5\pi}{3}t$$

۲ محاسبهٔ سریع زمان جابه‌جایی بین دو نقطه: برای محاسبهٔ زمان جابه‌جایی بین دو نقطه می‌توانید زاویهٔ θ را در مکان‌های اولیه و ثانویهٔ نوسانگر حساب کنید و با توجه به تناسب $\Delta\theta$ و Δt (براساس رابطهٔ $\Delta\theta = \omega\Delta t$) به جواب برسید. این کارها را از دو راه می‌توانیم انجام دهیم:

الف θ در مدت یک دوره (T) به اندازهٔ $2\pi\,rad$ تغییر می‌کند *(اسم این رو می‌ذاریم هم‌ارزی $T \equiv 2\pi$)*.

بنابراین، با توجه به نسبت مستقیم $\Delta\theta$ و Δt، زاویهٔ θ در مدت $\frac{T}{2}$ به اندازهٔ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ رادیان، در مدت $\frac{T}{5}$ به اندازهٔ $\frac{2\pi}{5}$ رادیان و ... تغییر می‌کند.
(ضریب π در $\Delta\theta$ رو نصف کن، می‌شه ضریب T در Δt.)

ب برای محاسبهٔ θ از روی مکان نوسانگر، از معادلهٔ حرکت نوسانگر، $\cos\theta$ را حساب می‌کنیم. دوتا جواب به دست می‌آید که با توجه به جهت حرکت نوسانگر، یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. در ضمن، استفاده از شکل معمولاً خیلی سریع‌تر ما را به نتیجه می‌رساند. براساس این شکل، اگر کم‌ترین زاویه‌ای که نقطهٔ مرجع با محور افقی می‌سازد، α باشد، نوسانگر در مکان $x = A\cos\alpha$ یا $x = -A\cos\alpha$ قرار دارد. در جدول (۲) جایگاه نوسانگر و نقطهٔ مرجع را در سه موقعیت بسیار مهم نشان داده‌ایم:

مکان نوسانگر در موقعیت $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$	مکان نوسانگر در موقعیت $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	مکان نوسانگر در موقعیت $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\alpha = \frac{\pi}{3}rad$	 $\alpha = \frac{\pi}{4}rad$	 $\alpha = \frac{\pi}{6}rad$

جدول (۲)

تیزباش محاسبهٔ زاویهٔ α خیلی مهمه! با $\frac{1}{2}$ یاد $\frac{\pi}{3}$ رادیان بیفت!

$$x = \pm\frac{1}{2}A \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}\,rad$$

با $\frac{\sqrt{2}}{2}$، یاد $\frac{\pi}{4}$ رادیان بیفت!

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}\,rad$$

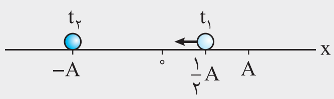
و اگر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ رو دیدی، $\frac{\pi}{6}$ رادیان رو تحویل بگیر!

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}\,rad$$

تست دورهٔ نوسانگری در یک حرکت هماهنگ ساده $1/2\,s$ است و در یک لحظه، مکان نوسانگر مثبت و برابر نصف دامنه و حرکت آن در این لحظه تندشونده است. حداقل چند ثانیه طول می‌کشد تا نوسانگر به بیشترین فاصلهٔ خود از نقطهٔ تعادل برسد؟

۱) $0/1$ ۲) $0/2$ ۳) $0/4$ ۴) $0/5$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** **راه‌حل اول (بر مبنای کتاب درسی):** همانند کتاب درسی فرض می‌کنیم نوسانگر از مکان $x=+A$ در خلاف جهت محور x به حرکت درآمده و مطابق شکل روبه‌رو در لحظهٔ t_1 برای اولین بار به صورت تندشونده از مکان $x=\frac{1}{2}A$ عبور می‌کند و در لحظهٔ t_2 به بیشترین فاصله از وضع تعادل (مکان $x=-A$) می‌رسد. لحظه‌های t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم:



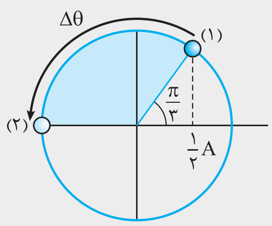
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1/2}=\frac{5\pi}{3}\,rad/s \Rightarrow x=A\cos\omega t=A\cos\frac{5\pi}{3}t$$

$$x_1=\frac{1}{2}A \Rightarrow \frac{1}{2}A=A\cos\frac{5\pi}{3}t_1 \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{3}t_1=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{3}t_1=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1=\frac{1}{5}\,s$$

$$x_2=-A \Rightarrow -A=A\cos\frac{5\pi}{3}t_2 \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{3}t_2=-1 \Rightarrow \frac{5\pi}{3}t_2=\pi \Rightarrow t_2=\frac{3}{5}\,s$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}=0/4\,s$$

راه‌حل دوم (به‌کارگیری دایرهٔ مرجع): *با دایرهٔ مرجع ببین چه‌قدر این تستو می‌شه راحت حل کرد!* طبق فرض تست، نوسانگر ابتدا در مکان $x=\frac{1}{2}A$ قرار دارد. با دیدن عدد $\frac{1}{2}$ یاد $\alpha=\frac{\pi}{3}\,rad$ می‌افتیم. از طرفی چون حرکت نوسانگر به صورت تندشونده است، نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ اول قرار دارد و موقعیت اولیهٔ آن روی دایرهٔ مرجع به شکل مقابل (موقعیت ۱) است. وقتی نوسانگر در بیشینهٔ مکان خود قرار می‌گیرد (موقعیت ۲) $\theta=\pi\,rad$ می‌شود. پس:



$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\,rad$$

θ در مدت T به اندازهٔ 2π رادیان تغییر می‌کند. پس زمان لازم برای این‌که θ به اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ رادیان افزایش یابد، $\frac{T}{3}$ است.

$$2\pi\equiv T \Rightarrow \frac{2\pi}{3}\equiv\frac{T}{3}$$

با این حساب، زمان لازم برای این‌که نوسانگر از موقعیت (۱) تا (۲) جابه‌جا شود، برابر است با:

$$\Delta t=\frac{T}{3}=\frac{1/2}{3}=0/4\,s$$

نمونه فرض کنید نوسانگری روی محور x حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و در یک لحظه به فاصلهٔ $\frac{A}{2}$ از مرکز نوسان قرار می‌گیرد. در این صورت، نقطهٔ مرجع ممکن است در یکی از موقعیت‌های زیر قرار داشته باشد.

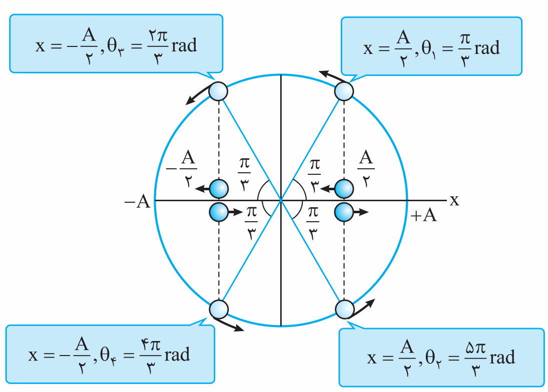
اگر نوسانگر در مکان $x=+\frac{A}{2}$ باشد:

$$x=A\cos\theta \Rightarrow \frac{A}{2}=A\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}\theta_1=2n\pi+\frac{\pi}{3} \xrightarrow{(\text{اگر: } n=0)} \theta_1=\frac{\pi}{3}\,rad\\ \theta_2=2n\pi+\frac{5\pi}{3} \xrightarrow{(\text{اگر: } n=0)} \theta_2=\frac{5\pi}{3}\,rad\end{cases}$$

و اگر نوسانگر در مکان $x=-\frac{A}{2}$ باشد:

$$x=A\cos\theta \Rightarrow -\frac{A}{2}=A\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}\theta_3=2n\pi+\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{(\text{اگر: } n=0)} \theta_3=\frac{2\pi}{3}\,rad\\ \theta_4=2n\pi+\frac{4\pi}{3} \xrightarrow{(\text{اگر: } n=0)} \theta_4=\frac{4\pi}{3}\,rad\end{cases}$$

- اگر نوسانگر در مکان مثبت باشد و به سمت مرکز حرکت کند، نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ اول قرار دارد و پاسخ θ_1 را می‌پذیریم.
- اگر نوسانگر در مکان مثبت باشد و از مرکز دور شود، نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ چهارم قرار دارد و جواب θ_2 قابل‌قبول است.
- اگر نوسانگر در مکان منفی باشد و از مرکز نوسان دور شود، نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ دوم قرار دارد و θ_3 را می‌پذیریم.
- اگر نوسانگر در مکان منفی باشد و به سمت مرکز حرکت کند، نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ سوم و پاسخ θ_4 است.



(شکل ۶)

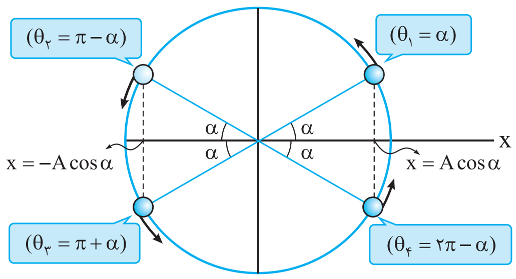
نتیجه اگر θ در محدودهٔ $0 \le \theta \le 2\pi$ و $\cos\theta = \pm\cos\alpha$ باشد، (طوری که $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$ باشد)، آن‌گاه:

۱ اگر θ در ناحیهٔ اول باشد: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_1 = \alpha$

۲ اگر θ در ناحیهٔ دوم باشد: $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \Rightarrow \theta_2 = \pi - \alpha$

۳ اگر θ در ناحیهٔ سوم باشد: $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta_3 = \pi + \alpha$

۴ اگر θ در ناحیهٔ چهارم باشد: $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi \Rightarrow \theta_4 = 2\pi - \alpha$



(شکل ۷)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده

۷۲۰- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = 0/04\cos 20\pi t$ است. این نوسانگر در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) برای اولین بار، تغییر جهت می‌دهد؟

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۷۲۱- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = 0/04\cos\frac{\pi}{2}t$ است. در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) تندی این نوسانگر برای اولین بار بیشینه می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۷۲۲- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = 0/04\cos\pi t$ است. این نوسانگر در مدت یک دقیقه چند چرخه را انجام می‌دهد؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

۷۲۳- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = 2\cos 10\pi t$ است. این نوسانگر در مدت یک دقیقه چند بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰۰ ۴) ۶۰۰

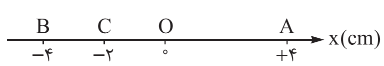
۷۲۴- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = 0/04\cos\frac{\pi}{6}t$ است. این نوسانگر در چه لحظه‌ای برای اولین بار به صورت کندشونده از ۲ سانتی‌متری نقطهٔ تعادل عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۲۵- دورهٔ تناوب و دامنهٔ حرکت نوسانگر A به ترتیب ۲ s و ۲ cm بیشتر از دوره و دامنهٔ حرکت نوسانگر B است. اگر معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر B در SI به صورت $x_B = \cos\pi t$ باشد و دو نوسانگر به طور هم‌زمان شروع به حرکت کرده باشند، معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر A در SI کدام است؟

۱) $x_A = 1/2\cos\frac{\pi}{2}t$ ۲) $x_A = 1/2\cos 2\pi t$ ۳) $x_A = 1/02\cos\frac{\pi}{2}t$ ۴) $x_A = 1/02\cos 2\pi t$

۷۲۶- در شکل زیر، ذره‌ای روی محور x بین نقاط A و B حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نوسانگر در مبدأ زمان از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و در لحظهٔ $t = 2\,s$ برای اولین بار از نقطهٔ C عبور کند، معادلهٔ مکان ـ زمان آن در SI کدام است؟



۱) $x = 0/04\cos\frac{\pi}{3}t$ ۲) $x = 0/08\cos\frac{\pi}{3}t$ ۳) $x = 0/08\cos\frac{5\pi}{12}t$ ۴) $x = 0/04\cos\frac{5\pi}{12}t$

۷۲۷- ذره‌ای در یک حرکت هماهنگ ساده پاره‌خطی به طول ۲۰ cm را در هر دقیقه ۱۲۰۰ بار می‌پیماید. این نوسانگر در مبدأ زمان از ۱۰ سانتی‌متری نقطهٔ تعادل در جهت منفی محور x شروع به حرکت می‌کند. معادلهٔ مکان ـ زمان این نوسانگر در SI کدام است؟

۱) $x = 0/1\cos 10\pi t$ ۲) $x = 0/1\cos 20\pi t$ ۳) $x = 0/2\cos 10\pi t$ ۴) $x = 0/2\cos 20\pi t$

۷۲۸- ذره‌ای در یک حرکت هماهنگ ساده پاره‌خطی به طول ۲۰ cm را در هر ثانیه ۲۰ بار طی می‌کند. اگر این نوسانگر از ۱۰ سانتی‌متری نقطهٔ تعادل در جهت منفی محور x شروع به حرکت کرده باشد، در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) برای اولین بار از نقطهٔ تعادل عبور می‌کند؟

۱) $\frac{1}{40}$ ۲) $\frac{1}{20}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{1}{80}$

۷۲۹- ذره‌ای در حرکت هماهنگ ساده طول پاره‌خط نوسان را در هر دقیقه ۶۰۰ بار طی می‌کند. اگر تندی این نوسانگر در مبدأ زمان بیشینه باشد، در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) ۰/۰۷۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

۷۳۰- جسمی روی محور x با دامنهٔ A حرکت هماهنگ ساده می‌کند. اگر جسم از حال سکون رها شده باشد و تندی آن در لحظهٔ $t = ۰/۸\,s$ برای اولین بار بیشینه شود، در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) تندی آن دومین بار بیشینه می‌شود؟

۱) ۰/۸ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۳/۲

۷۳۱- دامنهٔ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای ۱۰ cm و دورهٔ تناوب آن ۱۲ s است. اگر این نوسانگر در مبدأ زمان از مکان $x = +۱۰\,cm$ به حرکت درآمده باشد، ۷ s پس از شروع حرکت در چه مکانی (برحسب سانتی‌متر) قرار می‌گیرد؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) -۵ ۴) $-۵\sqrt{۳}$

۷۳۲- نوسانگر ساده‌ای حرکت خود را روی محور x و از نقطهٔ $x = +A$ رو به سمت مبدأ شروع می‌کند. شناسهٔ تابع نوسان هنگامی که نوسانگر برای nاُمین بار از نقطهٔ تعادل می‌گذرد، .... رادیان و هنگامی که برای nاُمین بار از یکی از نقطه‌های بازگشت (از جمله نقطهٔ آغاز حرکت) می‌گذرد، .... رادیان است.

۱) $(n+\frac{۱}{۲})\pi$ و $(n+۱)\pi$ ۲) $(n+\frac{۱}{۲})\pi$ و $(n-۱)\pi$ ۳) $(n-\frac{۱}{۲})\pi$ و $(n+۱)\pi$ ۴) $(n-\frac{۱}{۲})\pi$ و $(n-۱)\pi$

۷۳۳- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = ۰/۲\cos \pi t$ است. این نوسانگر در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۲\,s$ چند بار از مکان $x = +۱۰\,cm$ عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳۴- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = ۰/۲\cos \pi t$ است. این نوسانگر در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۱/۶\,s$ چند بار در فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متری از نقطهٔ تعادل قرار می‌گیرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳۵- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در لحظه‌های $t_۱ = ۱\,s$ ، $t_۲ = ۳\,s$ و $t_۳ = ۵\,s$ به ترتیب برای اولین، دومین و سومین بار در فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری از وضع تعادل قرار دارد. این نوسانگر در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه برای بیست و پنجمین بار در مکان $x = +۲\,cm$ قرار می‌گیرد؟ (فرض کنید نوسانگر در مبدأ زمان بیشترین فاصله از مبدأ مکان را دارد.)

۱) ۷۷ ۲) ۸۴ ۳) ۹۷ ۴) ۱۱۱

۷۳۶- رابطهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = A\cos(\frac{\pi}{۴}t)$ است. در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، نوسانگر چند بار از نقطه‌های وسط دامنه (وسط نقطهٔ تعادل و یک نقطهٔ بازگشت حرکت) می‌گذرد؟

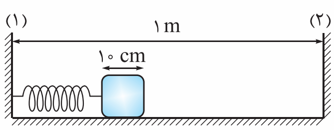
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷۳۷- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در مبدأ زمان از دورترین فاصله نسبت به نقطهٔ تعادل شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی نوسانگر در $\frac{T}{۱۲}$ دوم حرکت چند برابر جابه‌جایی آن در $\frac{T}{۱۲}$ اول حرکت است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ ۴) $\sqrt{۳}+۱$

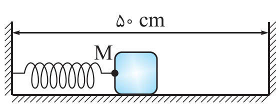
۷۳۸- معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ ذره‌ای به صورت $x = A\cos\omega t$ است. در مدت یک دوره چند درصد احتمال دارد ذره به نقطهٔ تعادل نزدیک‌تر باشد تا به یکی از نقطه‌های بازگشت حرکت؟

۱) دقیقاً ٪۲۵ ۲) تقریباً ٪۳۳ ۳) دقیقاً ٪۵۰ ۴) تقریباً ٪۶۷



۷۳۹- در شکل روبه‌رو، مکعبی به ضلع ۱۰ cm روی سطح افقی بدون اصطکاکی، با بسامد $\frac{۲}{۳}$ Hz نوسان ساده می‌کند و در حین حرکت، کم‌ترین فاصلهٔ هر دیوارهٔ عمودی تا نزدیک‌ترین نقطهٔ مکعب به ۳۳ cm می‌رسد. اگر در لحظهٔ $t = ۰$، مکعب در بیشترین فاصله از دیوارهٔ (۱) و در حال آغاز نوسان به سوی چپ باشد، در لحظهٔ $t = ۳/۵\,s$، فاصلهٔ مرکز مکعب تا دیوارهٔ (۲) چند سانتی‌متر می‌شود؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۶ ۳) ۵۴ ۴) ۵۶



۷۴۰- در شکل روبه‌رو، طول عادی فنر ۲۰ cm است و مکعب کوچکی روی سطح افقی نوسان‌های هماهنگ ساده‌ای با بسامد ۴ Hz و دامنهٔ ۶ cm انجام می‌دهد. در لحظهٔ $t = ۰$، مکعب در نقطهٔ بازگشت سمت راست قرار دارد. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، برای دومین بار، فاصلهٔ نقطهٔ M تا دیوارهٔ عمودی سمت راست ۳۳ cm می‌شود؟ (اصطکاک با سطح افقی ناچیز است.)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۷۴۱- معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به صورت $x = ۵\cos ۴\pi t$ است که در آن x برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است. اگر در یک لحظهٔ معین، مکان نوسانگر $+۳\ cm$ و حرکت آن تندشونده باشد، فاصلهٔ همان نقطه از وضع تعادل ۰/۱۲۵ ثانیهٔ بعد چند سانتی‌متر می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ *(سراسری ریاضی ۸۶، با تغییر)*

۷۴۲- در لحظهٔ t_1 از یک حرکت هماهنگ ساده، فاصلهٔ نوسانگر از یکی از نقطه‌های بازگشت حرکت ۲۵ برابر فاصله‌اش از نقطهٔ بازگشت دیگر است. در لحظهٔ $t_2 = t_1 + \frac{۵T}{۴}$، فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ بازگشت دورتر چند برابر فاصله‌اش از نقطهٔ بازگشت نزدیک‌تر است؟ (T دورهٔ حرکت می‌باشد.)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۹}$

۷۴۳- نوسانگر ساده‌ای حرکت خود را از مکان $x = +A = ۵\ cm$ و رو به نقطهٔ تعادل $x = ۰$ آغاز می‌کند. اگر مکان نوسانگر در لحظهٔ t_1، برابر $x_1 = ۴\ cm$ باشد، در لحظهٔ $t_2 = ۲t_1 + \frac{۵T}{۴}$، فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ بازگشت دورتر چند میلی‌متر است؟ (T دورهٔ حرکت می‌باشد.)

۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۹۶ ۴) ۹۸

بررسی حرکت دو نوسانگر

۷۴۴- دو نوسانگر A و B به ترتیب با دامنهٔ $۹۰\ cm$ و $۳۰\sqrt{۳}\ cm$ حول نقطهٔ O و روی محور x حرکت هماهنگ ساده می‌کنند. اگر این دو نوسانگر در مبدأ زمان از بیشینهٔ مکان خود واقع در مکان‌های مثبت شروع به نوسان کنند و در لحظهٔ t در مکان $x = +۴۵\ cm$ در دو جهت مخالف از کنار یکدیگر عبور کنند، دورهٔ نوسانگر A چند برابر دورهٔ نوسانگر B است؟ (t از دورهٔ تناوب هر دو نوسانگر کوچک‌تر است.)

۱) ۰/۱ ۲) ۴ ۳) ۵/۵ ۴) ۰/۱ یا ۵/۵

رابطهٔ جابه‌جایی و زمان جابه‌جایی بین دو نقطه

اگر می‌خوای روش حل تست‌های این قسمت با دایرهٔ مرجع رو یاد بگیری حتماً حتماً حتماً راه‌حل دوم این تست رو دقیق بخون!

۷۴۵- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = ۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۱۲}t$ است. نوسانگر در لحظهٔ t_1 برای اولین بار و در لحظهٔ t_2 برای دومین بار از مکان $x = +۲\ cm$ عبور می‌کند. $\Delta t = t_2 - t_1$ چند ثانیه است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۷۴۶- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = ۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۱۲}t$ است. حداکثر زمان لازم برای دو عبور متوالی نوسانگر از مکان $x = -۲\ cm$ چند برابر حداقل زمان لازم برای دو عبور متوالی از همین مکان است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۴۷- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = ۰/۱\cos\frac{\pi}{۴}t$ است. این نوسانگر حداقل در چه مدتی (برحسب ثانیه)، از مکان $x = +۱۰\ cm$ تا مکان $x = -۵\sqrt{۳}\ cm$ جابه‌جا می‌شود؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

۷۴۸- ذره‌ای به طور هماهنگ با دامنهٔ A و دورهٔ T در راستای افقی نوسان می‌کند. اگر این نوسانگر در مبدأ زمان از مکان $x = +A$ شروع به حرکت کرده باشد، فاصلهٔ آن از نقطهٔ تعادل در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۶}T$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}A$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$

۷۴۹- در یک حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ A و دورهٔ T، حداقل چه مدت طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $x = \frac{A}{۲}$ به $x = ۰$ برسد؟ (T دورهٔ تناوب نوسانگر است.)

۱) $\frac{T}{۱۲}$ ۲) $\frac{T}{۸}$ ۳) $\frac{T}{۶}$ ۴) $\frac{T}{۴}$

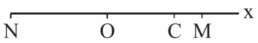
۷۵۰- ذره‌ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دامنهٔ A و دورهٔ تناوب T است. در یک لحظه، مکان ذره $+\frac{A}{۲}$ و سرعت آن منفی است. حداقل چه مدت پس از این لحظه مکان ذره $-\frac{A}{۲}$ و سرعت آن مثبت می‌شود؟

۱) $\frac{T}{۶}$ ۲) $\frac{T}{۳}$ ۳) $\frac{T}{۲}$ ۴) $\frac{۲T}{۳}$

۷۵۱- ذره‌ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دامنهٔ A است و در مدت $۰/۵\ s$ از مکان $x = -\frac{A}{۲}$ بدون تغییر جهت به مکان $x = +\frac{A}{۲}$ می‌رسد. بسامد ذره چند هرتز است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

۷۵۲- در شکل زیر، جسمی روی پاره‌خط MN و حول نقطهٔ O حرکت هماهنگ ساده می‌کند. اگر $OC = \frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ باشد، نوسانگر فاصلهٔ CM را حداقل در چه مدتی طی می‌کند؟ (A دامنهٔ نوسان و T دورهٔ حرکت نوسانگر است.)



۱) $\frac{T}{۱۲}$ ۲) $\frac{T}{۸}$ ۳) $\frac{T}{۶}$ ۴) $\frac{T}{۴}$

۷۵۳- ذره‌ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب T و دامنهٔ A روی محور y است. حداقل چه مدت طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $y = +\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ به مکان $y = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ منتقل شود؟

۱) $\frac{T}{۲۴}$ ۲) $\frac{T}{۶}$ ۳) $\frac{T}{۱۲}$ ۴) $\frac{T}{۸}$

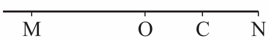
۷۵۴- x و A به ترتیب، مکان و دامنهٔ یک نوسانگر ساده است. در لحظهٔ $t_۱$، $x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ است و جهت حرکت نوسانگر در آن لحظه، به سمت مرکز نوسان است. اگر یک ثانیهٔ بعد، نوسانگر دوباره به همان مکان برسد، دورهٔ این نوسانگر چند ثانیه است؟ *(سراسری ریاضی خارج ۹۲)*

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۳/۶

۷۵۵- در یک حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ A، نوسانگر در مبدأ زمان از مکان $x = +A$ در جهت منفی محور x شروع به حرکت می‌کند و پس از ۰/۱s برای اولین بار به مکان $x = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ می‌رسد. از این لحظه، چند ثانیهٔ دیگر طول می‌کشد تا نوسانگر دوباره به مکان اولیه‌اش برگردد؟

۱) ۰/۸ ۲) ۱/۱ ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۶

۷۵۶- نوسانگری روی پاره‌خط MN و حول نقطهٔ O حرکت هماهنگ ساده می‌کند و نقطهٔ C وسط پاره‌خط ON قرار دارد. اگر کم‌ترین زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از نقطهٔ C تا N جابه‌جا شود، ۲ s باشد، بیشترین زمان جابه‌جایی بین این دو نقطه (در مدت یک دوره) چند ثانیه است؟



۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۷۵۷- متحرکی روی پاره‌خطی به طول ۲۰ cm حرکت هماهنگ ساده دارد. اگر متحرک در مدت ۲ s و بدون تغییر جهت، از مکان $x = +۵\sqrt{۲}\ cm$ تا $x = -۵\sqrt{۲}\ cm$ جابه‌جا شود، معادلهٔ حرکت آن در SI مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $x = ۰/۲\cos\frac{\pi}{۴}t$ ۲) $x = ۰/۲\cos\frac{\pi}{۲}t$ ۳) $x = ۰/۱\cos\frac{\pi}{۴}t$ ۴) $x = ۰/۱\cos\frac{\pi}{۲}t$

۷۵۸- فاصلهٔ نقطهٔ P روی پاره‌خط نوسان یک ذره تا یکی از نقطه‌های بازگشت حرکت، سه برابر فاصلهٔ P تا نقطهٔ بازگشت دیگر است. اگر بدون تغییر جهت، ذره در مدت $t_۱$ از نقطهٔ بازگشت نزدیک‌تر به نقطهٔ P و در مدت $t_۲$ از نقطهٔ P به نقطهٔ بازگشت دورتر برسد، $\frac{t_۲}{t_۱}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۷۵۹- در یک حرکت هماهنگ ساده، بیشترین اندازهٔ جابه‌جایی نوسانگر در مدت $\frac{T}{۶}$ کدام است؟ (T، دوره و A، دامنهٔ حرکت نوسانگر است.)

۱) $\frac{۱}{۳}A$ ۲) $\frac{۱}{۲}A$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ ۴) A

۷۶۰- در یک حرکت هماهنگ ساده، در مدت دلخواه $\frac{۱}{۴}$ دوره، کم‌ترین مسافتی که نوسانگر طی می‌کند، چند برابر دامنه است؟ $(\sqrt{۲} = ۱/۴)$

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷ ۴) ۱/۴ *(سراسری ریاضی خارج ۹۳)*

مسافت طی شده توسط نوسانگر

۷۶۱- معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۲\cos\frac{\pi}{۲}t$ است. این نوسانگر در مدت ۴ s چه مسافتی را (برحسب متر) طی می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۷۶۲- دامنهٔ نوسان یک حرکت هماهنگ ساده ۵ cm و دورهٔ آن ۱۲ s است. اگر این نوسانگر در مبدأ زمان از مکان $x = +۵\ cm$ شروع به حرکت کرده باشد، در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۸\ s$ مسافت چند سانتی‌متر را طی می‌کند؟

۱) ۲/۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۵

۷۶۳- رابطهٔ مکان ـ زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده در SI، به صورت $x = ۰/۴۴\cos ۳\pi t$ است. از لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظه‌ای که نوسانگر مسافت ۲ m را پیموده است، .... بار از نقطهٔ تعادل و .... بار از نقطه‌های بازگشت حرکت گذشته است و در فاصلهٔ .... سانتی‌متری از نقطهٔ تعادل است.

۱) ۲ ـ ۳ ـ ۲۰ ۲) ۲ ـ ۳ ـ ۲۴ ۳) ۳ ـ ۲ ـ ۲۰ ۴) ۳ ـ ۲ ـ ۲۴

۷۶۴- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در مدت‌زمان ۸ s مسافتی به اندازهٔ ۲/۵ برابر دامنهٔ حرکت خود را می‌پیماید. اگر نوسانگر از نقطهٔ بازگشتی در خلاف جهت محور x شروع به حرکت کرده باشد، دورهٔ تناوب نوسانگر چند ثانیه است؟

۱) ۶　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۸

تعیین نوع و جهت حرکت نوسانگر

۷۶۵- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری در SI به صورت $x = 0/02\cos\frac{\pi}{5}t$ است. در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 8\,s$، چند ثانیه بردارهای سرعت و مکان هم‌جهت‌اند؟

۱) ۲/۵　　۲) ۳　　۳) ۳/۵　　۴) ۵

۷۶۶- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری در SI به صورت $x = A\cos 40\pi t$ است. در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 0/08\,s$ جهت حرکت نوسانگر چند بار تغییر می‌کند؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۷۶۷- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI، به صورت $x = 2\cos\frac{\pi}{3}t$ است. نوع حرکت نوسانگر در لحظه‌های $t_1 = 1s$ و $t_2 = 5\,s$، به ترتیب (از راست به چپ) چگونه است؟

۱) تندشونده، تندشونده　　۲) تندشونده، کندشونده　　۳) کندشونده، تندشونده　　۴) کندشونده، کندشونده

۷۶۸- معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = 0/5\cos\frac{\pi}{6}t$ است. این نوسانگر در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 4\,s$ چند ثانیه به صورت تندشونده حرکت کرده است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

سرعت متوسط و تندی متوسط در حرکت هماهنگ ساده

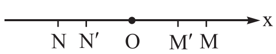
۷۶۹- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری در SI به صورت $x = 2\cos\omega t$ است. سرعت متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_0 = 0$ تا $t = 1s$ برای اولین بار صفر می‌شود. ω چند رادیان بر ثانیه است؟

۱) ۰/۵　　۲) ۱　　۳) 2π　　۴) 4π

۷۷۰- دورهٔ یک حرکت هماهنگ ساده ۱۲ s و دامنهٔ آن A است. اگر نوسانگر در مبدأ زمان از مکان $x = +A$ شروع به حرکت کرده باشد، تندی متوسط آن در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 1s$ چند برابر تندی متوسط آن در بازهٔ زمانی $t = 1s$ تا $t = 3\,s$ است؟

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) ۲　　۳) $1/5 + \sqrt{3}$　　۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$

۷۷۱- مطابق شکل، نوسانگری روی پاره‌خط MN و حول نقطهٔ O نوسان می‌کند و معادلهٔ حرکت آن در SI به صورت $x = 0/05\cos\frac{\pi}{6}t$ است. این نوسانگر فاصله‌های MM' و ON' را بدون تغییر جهت به ترتیب در مدت ۲ s و ۱s می‌پیماید. نسبت تندی متوسط نوسانگر در فاصلهٔ MM' چند برابر تندی متوسط آن در فاصلهٔ ON' است؟



۱) $\frac{1}{2}$　　۲) ۱　　۳) $\frac{3}{2}$　　۴) ۲

۷۷۲- اگر دامنهٔ یک نوسانگر ۱۰ cm و دورهٔ تناوب آن ۰/۱۲ ثانیه باشد، تندی متوسط آن وقتی که بدون تغییر جهت از مکان $x = +5\,cm$ به مکان $x = -5\,cm$ می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵　　۲) ۱۰　　۳) ۲/۵　　۴) ۱/۲۵

۷۷۳- نوسانگری در یک بُعد، در لحظهٔ t_1 در مکان $+\frac{A}{\sqrt{2}}$ و در لحظهٔ $t_2 > t_1$ در مکان $+\frac{A}{2}$ قرار دارد. اندازهٔ بیشترین سرعت متوسط نوسانگر در بازهٔ t_1 تا t_2 کدام است؟ (A، دامنهٔ نوسان، T دورهٔ حرکت و در $t = 0$، نوسانگر از مکان $+A$ شروع به حرکت می‌کند.)　*(سراسری ریاضی ۸۴، با تغییر)*

۱) $12(\sqrt{2}+1)\frac{A}{T}$　　۲) $\frac{12(\sqrt{2}-1)}{7}\frac{A}{T}$　　۳) $\frac{12(\sqrt{2}+1)}{7}\frac{A}{T}$　　۴) $12(\sqrt{2}-1)\frac{A}{T}$

۷۷۴- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در مبدأ زمان در مکان $x = +A$ قرار دارد و حرکت خود را رو به مبدأ مکان آغاز می‌کند. اگر نوسانگر در لحظهٔ t_1 در مکان $x_1 = +\frac{A}{\sqrt{2}}$ و در لحظهٔ t_2 در مکان $x_2 = -\frac{A}{2}$ باشد، کم‌ترین تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، چند برابر $\frac{A}{T}$ است؟ (A دامنه و T دورهٔ نوسان و $t_1 < t_2 < T$ می‌باشد.)

۱) $\frac{12}{5}(\sqrt{2}+1)$　　۲) $\frac{12}{13}(\sqrt{2}+1)$　　۳) $\frac{12}{5}(\sqrt{2}+3)$　　۴) $\frac{12}{13}(\sqrt{2}+3)$

۷۷۵- در شکل زیر، O نقطهٔ تعادل و C و C' نقطه‌های بازگشت حرکت نوسانگر ساده‌ای با بسامد $\frac{۱}{۳}\,Hz$ هستند. اگر $OA = ۱\,cm$، $AB = (\sqrt{۳} - ۱)\,cm$ و $BC = (۲ - \sqrt{۳})\,cm$ باشند، تندی متوسط نوسانگر هنگامی که بدون تغییر جهت از C به A می‌رسد، چند متر بر ثانیه کم‌تر از تندی متوسط آن در مدتی است که به صورت تندشونده از B عبور کرده و پس از یک بار تغییر جهت به A می‌رسد؟

۱) $\frac{۲}{۹}(-۲\sqrt{۳}+۱۱)$ ۲) $\frac{۲}{۹}(۲\sqrt{۳}+۱)$ ۳) $\frac{۱}{۶}(-۲\sqrt{۳}+۱۱)$ ۴) $\frac{۱}{۶}(۲\sqrt{۳}+۱)$

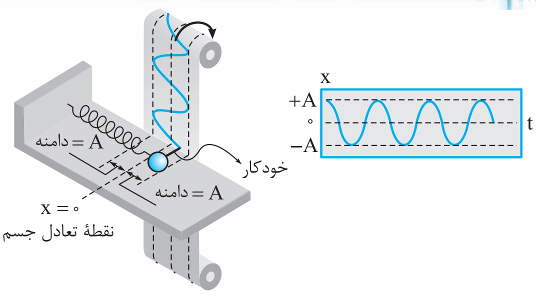
۷۷۶- اگر دامنهٔ حرکت یک نوسانگر هماهنگ ساده $۵\,cm$ و دورهٔ آن $۰/۰۲\,s$ باشد، بزرگی سرعت متوسط آن در یک بازهٔ زمانی به مدت $۰/۰۱\,s$، چند متر بر ثانیه می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۱۰ ۴) هر یک از سه گزینهٔ دیگر، ممکن است باشد.

۴) نمودار مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده

از آن‌جا که معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت هماهنگ ساده به فُرم یک تابع سینوسی است، نمودار مکان ـ زمان آن یک نمودار سینوسی است که با نحوهٔ رسم آن در درس ریاضی آشنا شده‌اید. شکل (۸) یکی از روش‌های نمایش تصویری نمودار مکان ـ زمان حرکت نوسانگر هماهنگ ساده را در مدت یک دوره نشان می‌دهد.



(شکل ۸)

رسم نمودار از راه نقطه‌یابی: ساده‌ترین روش برای رسم نمودار مکان ـ زمان یک جسم، روش نقطه‌یابی است که در قالب مثال زیر، به شرح آن می‌پردازیم:

مثال **دامنهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای A است و نوسانگر از مکان $x = +A$ شروع به حرکت می‌کند. نمودار مکان ـ زمان این نوسانگر را در مدت یک دوره رسم کنید.**

پاسخ برای رسم نمودار مکان ـ زمان نوسانگر در یک دوره، لازم نیست مکان نوسانگر در تمام لحظه‌ها را حساب کنیم؛ چون عمر نوح هم برای تکمیل این پروژه کفایت نمی‌کند!! با دانستن مختصات جسم در لحظه‌های ∘، T و لحظه‌هایی که مکان نوسانگر، صفر یا بیشینه می‌شود، به سادگی می‌توان نمودار مکان ـ زمان نوسانگر را رسم کرد. چرا که سایر نقاط نمودار، مابینِ این نقاط قرار می‌گیرند.

◄ معادلهٔ حرکت نوسانگر به صورت $x = A\cos\omega t$ است. لحظه‌هایی (از یک دوره) که نوسانگر از مرکز نوسان می‌گذرد، با جای‌گذاری $x = ۰$ در معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر به دست می‌آید.

$$x = ۰ \Rightarrow A\cos\omega t = ۰ \Rightarrow \cos\omega t = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \omega t = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow t = \frac{T}{۴} \\ \omega t = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow t = \frac{۳T}{۴} \end{cases}$$

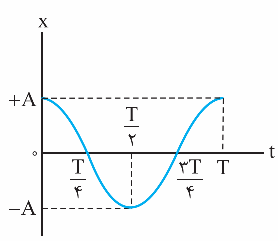
ωt می‌تواند $\frac{۵\pi}{۲}\,rad$ هم شود؛ ولی به ازای آن $t > T$ می‌شود؛ پس تا همین‌جا بسه! حالا لحظه‌هایی را حساب می‌کنیم که نوسانگر از مکان‌های $x = +A$ و $x = -A$ عبور می‌کند.

$$x = A \Rightarrow A\cos\omega t = A \Rightarrow \cos\omega t = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \omega t = ۰ \Rightarrow t = ۰ \\ \omega t = ۲\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t = ۲\pi \Rightarrow t = T \end{cases}$$

$$x = -A \Rightarrow \cos\omega t = -A \Rightarrow \cos\omega t = -۱ \Rightarrow \omega t = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t = \pi \Rightarrow t = \frac{T}{۲}$$

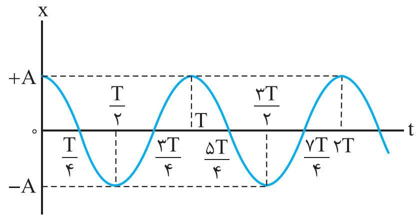
حالا کافی است مقادیر بالا را در جدولی به شکل روبه‌رو بیاورید و محدودهٔ نمودار مکان ـ زمان نوسانگر را با کمک این جدول رسم کنید (شکل ۹).

x	t
A	۰
۰	$\frac{T}{۴}$
$-A$	$\frac{T}{۲}$
۰	$\frac{۳T}{۴}$
A	T



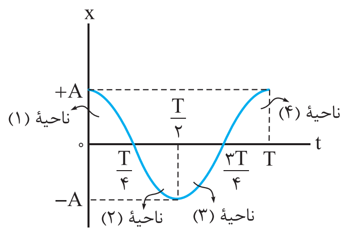
(شکل ۹)

استراتژی و نکات لازم برای حل تست‌های این بخش



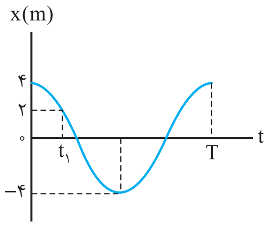
(شکل ۱۰)

۱ حرکت نوسانگر از لحظهٔ T به بعد دوباره از نو تکرار می‌شود. پس نمودار مکان ـ زمان آن نیز از لحظهٔ T به بعد مثل روز اول (لحظهٔ $t=۰$) تکرار می‌شود. پس نمودار مکان ـ زمان نوسانگر مطابق شکل (۱۰) تکمیل می‌شود.



(شکل ۱۱)

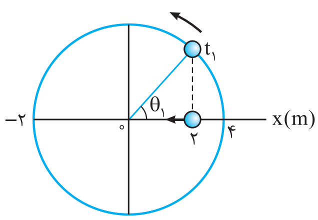
۲ از روی نمودار مکان ـ زمان نوسانگر باید بتوانید جایگاه آن و هم‌چنین نقطهٔ مرجع را تشخیص دهید. شکل (۱۱) جایگاه نقطهٔ مرجع را در مدت یک دوره نشان می‌دهد.



(الف)

نمونه فرض کنید نمودار مکان ـ زمان نوسانگری به شکل (الف) است. با توجه به شکل، لحظهٔ $t_۱$ را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

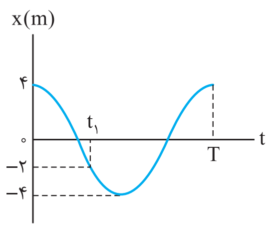
$$x = A\cos\omega t \Rightarrow ۲ = ۴\cos\omega t_۱ \Rightarrow \cos\omega t_۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \omega t_۱ = \frac{\pi}{۶}\,\text{rad} \checkmark \\ \omega t_۱ = ۲\pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶}\,\text{rad} \times \end{cases}$$



(ب)

چرا $\theta_۱ = \omega t_۱$ در ناحیهٔ اول است؟ چون مکان نوسانگر در این لحظه مثبت است و نوسانگر به طرف مرکز می‌رود. شکل (ب) نحوهٔ حرکت نوسانگر و نقطهٔ مرجع را روی دایرهٔ مرجع نشان می‌دهد.

$$\omega t_۱ = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} t_۱ = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow t_۱ = \frac{T}{۱۲}$$

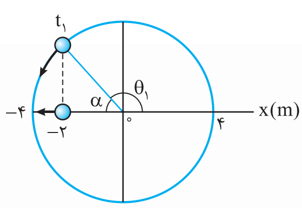


(الف)

نمونه حالا فرض کنید در شکل روبه‌رو (الف) می‌خواهیم لحظهٔ $t_۱$ را حساب کنیم. مکان نوسانگر در لحظهٔ $t_۱$ منفی است و در حال دورشدن از مرکز نوسان است. پس نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ دوم است و داریم:

$$x = A\cos\omega t_۱ \Rightarrow -۲ = ۴\cos\omega t_۱ \Rightarrow \cos\omega t_۱ = -\frac{۱}{۲}$$

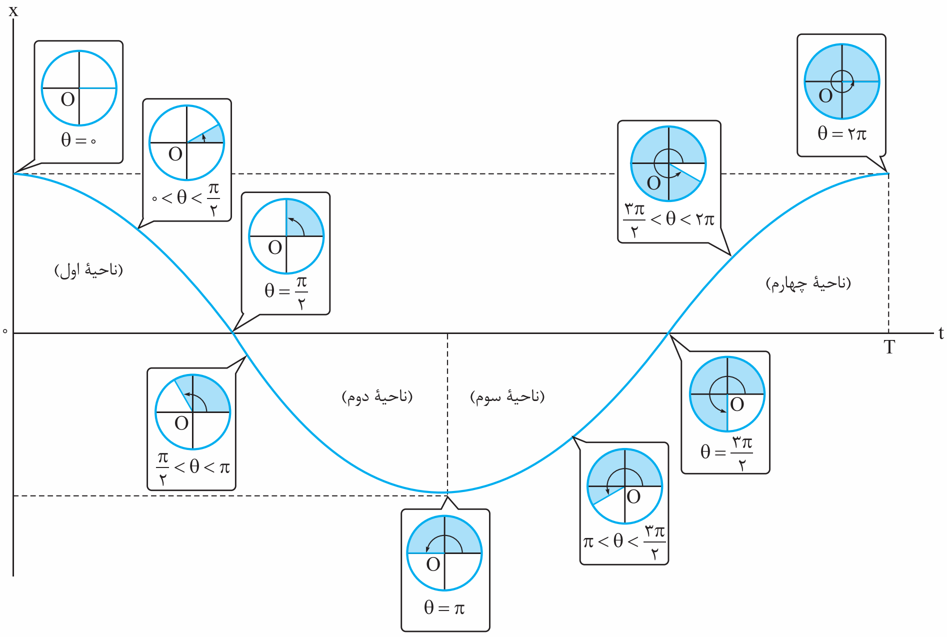
$$\Rightarrow \omega t_۱ = \pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} t_۱ = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow t_۱ = \frac{T}{۳}$$



(ب)

(توجه بفرمایید که در لحظهٔ $t_۱$، $x = -\frac{۱}{۲}A$ و $\alpha = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$ است.)

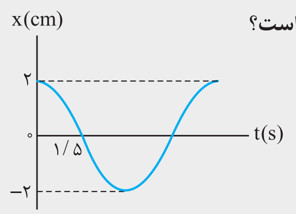
۳ مهم‌ترین مهارتی که در حل تست‌های این بخش باید به آن دست پیدا کنید تشخیص $\theta = \omega t$ در نقاط مختلف است. $\cos\theta$ را از رابطهٔ $x = A\cos\theta$ به دست می‌آورید. دوتا جواب برای θ به دست می‌آید که با توجه به نحوهٔ حرکت نوسانگر یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. شکل (۱۲) موقعیت نقطهٔ مرجع را در لحظه‌های مختلف نشان می‌دهد.



(شکل ۱۲)

۴ ما در حل تست‌های این قسمت باز هم راحت‌تریم به جای محاسبهٔ $\theta = \omega t$، α (یعنی کم‌ترین زاویه‌ای که نقطهٔ مرجع روی دایرهٔ مرجع، با محور افقی می‌سازد) را حساب کنیم. یادتون نرفته که ... $(x = \pm \frac{۱}{۲}A : \alpha = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}, x = \pm \frac{\sqrt{۲}}{۲}A : \alpha = \frac{\pi}{۴}\,\text{rad}, x = \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}A \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۶}\,\text{rad})$

تست **نمودار مکان ـ زمان نوسانگری مطابق شکل است. فاصلهٔ نوسانگر از مبدأ در لحظهٔ $t = ۱\,s$ چند سانتی‌متر است؟**



۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

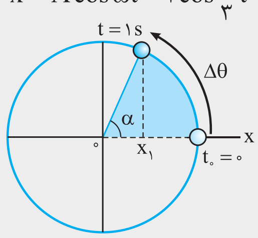
۳) $\sqrt{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** **راه‌حل اول:** نوسانگر در مدت ربع دوره از مکان $x = +A$ به مکان $x = ۰$ منتقل می‌شود. پس:

$$\frac{T}{۴} = ۱/۵ \Rightarrow T = ۶\,s \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۶} = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}/s$$

$$x = A\cos\omega t = ۲\cos\frac{\pi}{۳}t \xrightarrow{(t=۱s)} x = ۲\cos\frac{\pi}{۳}\times ۱ = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱\,cm$$



راه‌حل دوم: در حل تست‌های این قسمت مرتب تکرار می‌کنیم: «باید ببینیم در زمان داده‌شده چه زاویه‌ای طی شده».

زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع در مدت $\Delta t = ۱\,s$ برابر است با:

$$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}\Delta t = \frac{۲\pi}{۶}\times ۱ = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

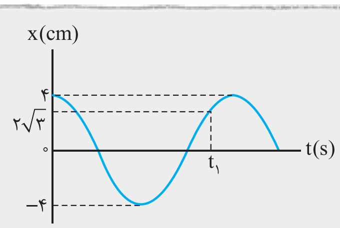
از هم‌ارزی $۲\pi \equiv T$ هم می‌شد به همین نتیجه رسید:
$$۲\pi \equiv (T = ۶\,s) \xrightarrow{(\div ۶)} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} \equiv (\Delta t = ۱\,s)$$

پس نقطهٔ مرجع در لحظهٔ $t = ۱\,s$ زاویهٔ $\alpha = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$ را با محور مکان می‌سازد. مکان نوسانگر در این لحظه برابر است با:

$$x_۱ = A\cos\alpha = ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱\,cm$$

تست **شکل مقابل نمودار مکان ـ زمان نوسانگری را نشان می‌دهد که در هر دقیقه ۴۰ نوسان انجام می‌دهد. در این نمودار، $t_۱$ برابر با چند ثانیه است؟**

(سراسری تجربی خارج ۸۵، با تغییر)



۱) $\frac{۵}{۴}$

۲) $\frac{۱۱}{۸}$

۳) $\frac{۵}{۶}$

۴) $\frac{۶}{۵}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** **راه‌حل اول:** ابتدا دورهٔ تناوب نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$n=\frac{t}{T}\Rightarrow ۴۰=\frac{۶۰}{T}\Rightarrow T=\frac{۳}{۲}s$$

و معادلهٔ حرکت نوسانگر:

$$x=A\cos\omega t=A\cos\frac{۲\pi}{T}t=۴\cos\frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}}T=۴\cos\frac{۴\pi}{۳}t$$

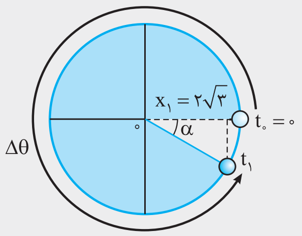
در لحظهٔ t_1 نوسانگر برای دومین بار از مکان $x=۲\sqrt{۳}\,cm$ عبور می‌کند. پس:

$$۲\sqrt{۳}=۴\cos\frac{۴\pi}{۳}t_1$$

$$\cos\frac{۴\pi}{۳}t_1=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{۴\pi}{۳}t_1=۲\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\frac{۴\pi}{۳}t_1=\frac{۱۱\pi}{۶}\Rightarrow t_1=\frac{۱۱}{۸}s$$

توجه اولین جواب معادلهٔ $\cos\frac{۴\pi}{۳}t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، $\frac{۴\pi}{۳}t=\frac{\pi}{۶}$ است که به ازای آن اولین لحظهٔ عبور نوسانگر از مکان $x=۲\sqrt{۳}\,cm$ به دست می‌آید.

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): براساس شکل (۱۰) در لحظهٔ t_1 نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ چهارم قرار دارد و مطابق شکل روبه‌رو دوران می‌کند. باز هم باید ببینیم در مدت t_1 چه زاویه‌ای طی شده.



$$x_1=A\cos\alpha\Rightarrow ۲\sqrt{۳}=۴\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۶}rad$$

$$\Delta\theta=۲\pi-\alpha=۲\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۱\pi}{۶}rad$$

حالا نوبت هم‌ارزی $۲\pi\equiv T$ است:

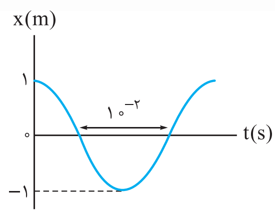
$$(۲\pi\equiv T\Rightarrow\frac{۱۱\pi}{۶}\equiv t_1)\Rightarrow t_1=\frac{۱۱}{۱۲}T$$

T را از راه‌حل اول قرض می‌گیریم!

$$t_1=\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱۱}{۸}s$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

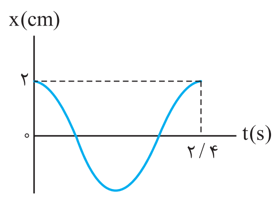
۷۷۷- نمودار مکان ـ زمان نوسانگری در یک حرکت هماهنگ ساده مطابق شکل روبه‌رو است. معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر در SI کدام است؟



۱) $x=\cos۱۰۰\pi t$ 　 ۲) $x=۲\cos۱۰۰\pi t$

۳) $x=\cos۲۰۰\pi t$ 　 ۴) $x=۲\cos۲۰۰\pi t$

۷۷۸- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای مطابق شکل زیر است. نوسانگر در ثانیهٔ اول حرکت، چند ثانیه به صورت کندشونده حرکت کرده است؟



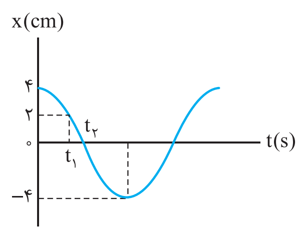
۱) ۰/۴

۲) ۰/۶

۳) ۰/۳

۴) ۰/۲

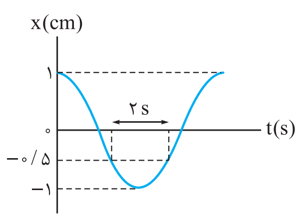
۷۷۹- نمودار مکان ـ زمان نوسانگری مطابق شکل مقابل است $(t_2-t_1=۰/۱s)$. معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر در SI کدام است؟



۱) $x=۰/۰۴\cos\frac{۵\pi}{۳}t$ 　 ۲) $x=۰/۰۴\cos\frac{۵\pi}{۶}t$

۳) $x=۰/۰۸\cos\frac{۵\pi}{۳}t$ 　 ۴) $x=۰/۰۸\cos\frac{۵\pi}{۶}t$

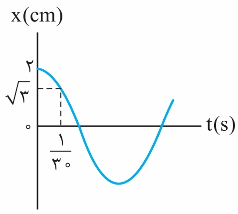
۷۸۰- نمودار مکان ـ زمان نوسانگری مطابق شکل روبه‌رو است. معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر در SI کدام است؟



۱) $x=۱۰^{-۲}\cos\frac{۲\pi}{۳}t$ 　 ۲) $x=۵\times۱۰^{-۲}\cos\frac{\pi}{۳}t$

۳) $x=۱۰^{-۲}\cos\frac{\pi}{۳}t$ 　 ۴) $x=۵\times۱۰^{-۲}\cos\frac{۲\pi}{۳}t$

۷۸۱- نمودار مکان ـ زمان نوسانگری مطابق شکل روبه‌رو است. دورهٔ تناوب نوسانگر چند ثانیه است؟



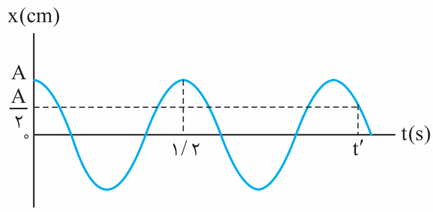
۱) ۰/۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۳

۴) ۰/۴

۷۸۲- نمودار مکان ـ زمان ذره‌ای که روی محور x حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، مطابق شکل زیر است. t' چند ثانیه است؟



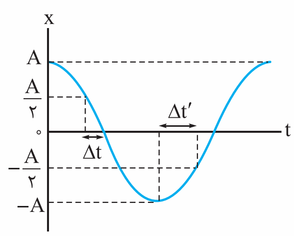
۱) ۲/۵

۲) ۲/۶

۳) ۲/۸

۴) ۳

۷۸۳- شکل مقابل، نمودار مکان ـ زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده است. نسبت $\frac{\Delta t'}{\Delta t}$ کدام است؟



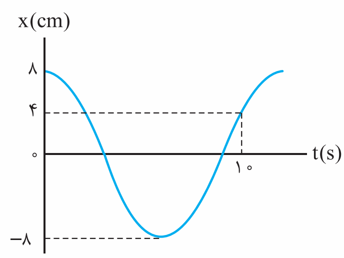
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

۷۸۴- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام لحظه برحسب ثانیه، برای سومین بار فاصلهٔ نوسانگر از مبدأ مکان $۴\sqrt{۲}$ cm است؟



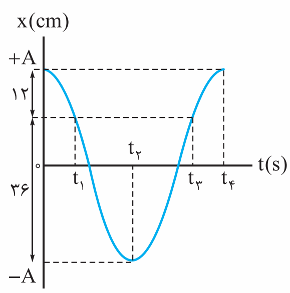
۱) ۵/۵

۲) ۷/۵

۳) ۱۰/۵

۴) ۱۳/۵

۷۸۵- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر ساده‌ای به شکل روبه‌رو است. اگر $t_۴ = (t_۳ + ۱)$ s باشد، در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$، به ترتیب و از راست به چپ، تندی متوسط و سرعت متوسط نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟



۱) ۱۸، ۶

۲) ۶، صفر

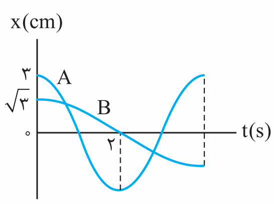
۳) ۱۸، صفر

۴) ۱۸، −۶

۷۸۶- معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = ۰/۰۱\cos\frac{\pi}{۶}t$ است. اگر در یک دوره، $t_۱$ و $t_۲$ لحظه‌هایی باشند که از مبدأ زمان تا آن لحظه‌ها، زمانی که نوسانگر به صورت تندشونده حرکت کرده است ۱s بیشتر از زمانی باشد که نوسانگر به صورت کندشونده حرکت کرده است و مکان نوسانگر در این لحظه‌ها منفی باشد، مسافت طی‌شده توسط نوسانگر بین این دو لحظه چند سانتی‌متر است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $۲+\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۸۷- نمودار مکان ـ زمان دو نوسانگر هماهنگ سادهٔ A و B مطابق شکل مقابل است. این دو نوسانگر در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه برای اولین بار از کنار یکدیگر عبور می‌کنند؟



۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ نامهٔ تشریحی

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۷۱۰- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان در لحظهٔ $t=1\,s$، برای اولین بار و در لحظهٔ $t=3\,s$ برای دومین بار بیشینه می‌شود:

$$n=0 \Rightarrow t_1=1\,s \quad , \quad n=1 \Rightarrow t_2=3\,s$$

این بازهٔ زمانی $2\,s$ طول می‌کشد:

$$\Delta t=t_2-t_1=3-1=2\,s$$

در این مدت، نوسانگر از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر می‌رود و یک بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند.

نوسانگر در مدت T دو بار طول مسیر نوسان را می‌پیماید؛ در مدت $\frac{T}{2}$ چند بار؟ واضح است: یک بار. پس:

$$\Delta t=\frac{T}{2} \Rightarrow 2=\frac{T}{2} \Rightarrow T=4\,s \Rightarrow f=\frac{1}{T}=\frac{1}{4}\,Hz \Rightarrow f=0/25\,Hz$$

۷۱۱- گزینهٔ ۴ نوار قلب شخص نشان می‌دهد که دورهٔ تناوب ضربان قلب شخص $T=0/8\,s$ است. بنابراین با استفاده از رابطهٔ (۱) درس‌نامه داریم:

$$n=\frac{t}{T} \xrightarrow{(t=1\,min=60\,s)} n=\frac{60}{0/8}=\frac{600}{8}=75$$

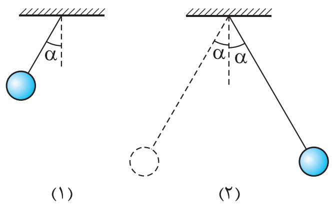
۷۱۲- گزینهٔ ۲ آونگ اولی در مدت $2/5\,s$ یک نوسان کامل انجام می‌دهد و سر جای اولیه‌اش برمی‌گردد.

در نتیجه، در مدت $10\,s$، ۴ نوسان کامل انجام می‌دهد و در وضعیت اولیه‌اش واقع می‌شود:

$$n_1=\frac{t}{T_1}=\frac{10}{2/5}=4$$

و اما آونگ دوم در مدت $10\,s$، $2/5$ نوسان کامل انجام می‌دهد:

$$n_2=\frac{t}{T_2}=\frac{10}{4}=2/5$$



یک نوسان کامل، معادل یک رفت و برگشت و نیم نوسان، معادل یک رفت (یا یک برگشت) است. بنابراین، آونگ دوم در مدت فوق، ۵ بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند و در نقطهٔ مقابلِ وضعیتِ اولیه‌اش قرار می‌گیرد.

۷۱۳- گزینهٔ ۳ قرار است آونگ اولی ۶ نوسان بیشتر از آونگ دومی انجام دهد؛ یعنی:

$$n_1-n_2=6$$

$$\frac{t}{T_1}-\frac{t}{T_2}=6 \Rightarrow \frac{t}{2/5}-\frac{t}{4}=6 \Rightarrow \frac{4t-2/5t}{10}=6 \Rightarrow \frac{1/5t}{10}=6 \Rightarrow t=\frac{60}{1/5} \Rightarrow t=40\,s$$

۷۱۴- گزینهٔ ۲ حرکت جسمی که روی یک دایره به طور یکنواخت دوران می‌کند، دوره‌ای است؛ اما هماهنگ ساده نیست.

۷۱۵- گزینهٔ ۲ حرکت جسم با آهنگ منظمی حول نقطهٔ O تکرار می‌شود. پس حرکت جسم از نوع نوسان دوره‌ای است. اما حرکت جسم هماهنگ ساده نیست، چرا که نیروی خالص وارد بر جسم ثابت است (به جسم دو نیروی ثابت وزن و نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد می‌شود). در حالی که در حرکت هماهنگ ساده، نیروی وارد بر نوسانگر متغیر است و به فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ تعادل بستگی دارد.

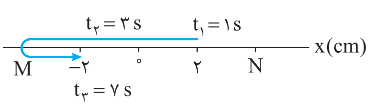
۷۱۶- گزینهٔ ۱ در مدتی که نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک می‌شود، شتاب و نیروی وارد بر آن کاهش و تندی و تکانهٔ آن افزایش می‌یابد. ضمناً بسامد و دورهٔ تناوب در حرکت هماهنگ ساده ثابت می‌مانند.

۷۱۷- گزینهٔ ۱ در تمام حرکت‌های هماهنگ ساده، علامت بردارهای نیرو و مکان (جابه‌جایی از وضع تعادل) مخالف است. پس مکان نوسانگر مثبت است. اگر در این حال، نوسانگر از مرکز نوسان دور شود، سرعتش مثبت و اگر به مرکز نوسان نزدیک شود، سرعتش منفی است.

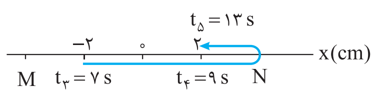
۷۱۸- گزینهٔ ۲ نحوهٔ حرکت نوسانگر و موقعیت آن در زمان‌های مختلف می‌تواند مطابق شکل‌های زیر باشد (نوسانگر روی پاره‌خط MN نوسان می‌کند).

مطابق شکل (الف)، نوسانگر در لحظهٔ $t_1=1\,s$ برای اولین بار به مکان $x=2\,cm$ و در لحظه‌های $t_2=3\,s$ و $t_3=7\,s$ به ترتیب، برای دومین و سومین بار به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری مبدأ (مکان $x=-2\,cm$) می‌رسد. نوسانگر در این مدت، نیمی از یک نوسان کامل را انجام می‌دهد. نیمهٔ دیگر را در شکل (ب) نشان داده‌ایم. از آن‌جا که نوسانگر، نیم نوسان را در نیم دوره انجام می‌دهد، داریم:

$$\Delta t=t_3-t_1=\frac{T}{2} \Rightarrow 7-1=\frac{T}{2} \Rightarrow T=12\,s$$



(الف)

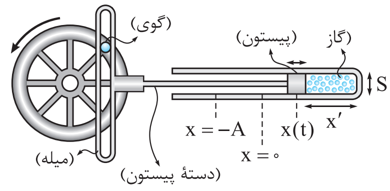


(ب)

البته، با محاسباتی که در شکل (ب) انجام داده‌ایم و قطعاً خود شما می‌توانید این محاسبات را انجام دهید (محاسبهٔ t_4 و t_5)، دورهٔ تناوب نوسانگر می‌شود:

$$\Delta t=t_5-t_1=T \Rightarrow 13-1=T \Rightarrow T=12\,s$$

۷۱۹- گزینهٔ ۲ مطابق شکل، به ازای هر نوسان کامل پیستون، حجم گاز سمت راست پیستون تغییر می‌کند و هم‌چنین چرخ یک دور کامل می‌چرخد. در نتیجه، **دورهٔ نوسان پیستون و دورهٔ گردش چرخ برابرند.** از طرفی حرکت پیستون از طریق دستهٔ پیستون و میله به گوی روی چرخ انتقال پیدا می‌کند به طوری که با جابه‌جایی پیستون از وضعیت نوسانی $x=+A$ تا $x=۰$، گوی از سمت راست چرخ به بالای چرخ می‌رسد و در ادامه با جابه‌جایی پیستون از $x=۰$ تا $x=-A$، گوی از بالای چرخ به سمت چپ چرخ می‌رسد. بنابراین دامنهٔ نوسان پیستون با شعاع گردش گوی روی چرخ یکسان است $(A=r)$.



هنگامی که پیستون در وضعیت $x=+A$ است، به انتهای سمت راست استوانه نزدیک‌تر است و x' و در نتیجه حجم گاز محبوس کم‌ترین می‌شود و هنگامی که پیستون به وضعیت $x=-A$ می‌رسد، از انتهای سمت راست استوانه دورتر است و x' و نیز حجم گاز محبوس بیشترین می‌شود. پس: (V حجم گاز و S مساحت مقطع داخلی پیستون است.)

$$V_{min}=S\times x'_{min}\Rightarrow ۱\times۱۰^{-۳}=(۱۰۰\times۱۰^{-۴})\times x'_{min}\Rightarrow ۱۰^{-۲}x'_{min}=۱۰^{-۳}\Rightarrow x'_{min}=۱۰^{-۱}\,m=۱۰\,cm$$

$$V_{max}=S\times x'_{max}\Rightarrow ۳\times۱۰^{-۳}=(۱۰۰\times۱۰^{-۴})\times x'_{max}\Rightarrow ۱۰^{-۲}x'_{max}=۳\times۱۰^{-۳}\Rightarrow x'_{max}=۳\times۱۰^{-۱}\,m=۳۰\,cm$$

اندازهٔ جابه‌جایی پیستون بین دو نقطهٔ بازگشت نوسان $(۲A)$، با اختلاف x'_{max} و x'_{min} برابر است. (چرا؟) پس:

$$۲A=x'_{max}-x'_{min}=۳۰-۱۰=۲۰\,cm\Rightarrow A=۱۰\,cm=۰/۱\,m$$

و اما خواستهٔ تست:

$$T=\frac{۲\pi r}{v}\xrightarrow[(r=A=۰/۱\,m)]{(v=۵۴\,km/h=\frac{۵۴}{۳/۶}\,m/s=۱۵\,m/s)}T=\frac{۲\pi\times۰/۱}{۱۵}\xrightarrow{(T\ \text{پیستون و چرخ برابرند.})}f=\frac{۱}{T}=\frac{۱۵}{۰/۲\pi}=\frac{۷۵}{\pi}\,Hz$$

۷۲۰- گزینهٔ ۲ از مقایسهٔ معادلهٔ حرکت نوسانگر با فرم کلی آن $(x=A\cos\omega t)$ متوجه می‌شویم که ضریب t بیانگر ω است:

$$\omega=۲۰\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=۲۰\pi\Rightarrow T=۰/۱\,s$$

نوسانگر در مدت $\Delta t=\frac{T}{۲}$ از مکان $x_۱=+A$ به مکان $x_۲=-A$ منتقل می‌شود و در مکان $x_۲$ تغییر جهت می‌دهد: $\Delta t=\frac{T}{۲}=\frac{۰/۱}{۲}=\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵\,s$

۷۲۱- گزینهٔ ۱ نوسانگر پس از مدت $\Delta t=\frac{T}{۴}$ از مکان $x=+A$ به مکان $x=۰$ منتقل می‌شود و تندی آن بیشینه می‌شود.

$$\omega=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow T=۴\,s\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۴}=\frac{۴}{۴}=۱\,s$$

۷۲۲- گزینهٔ ۱

$$\omega=\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\pi\Rightarrow T=۲\,s\Rightarrow n=\frac{t}{T}=\frac{۶۰}{۲}=۳۰$$

۷۲۳- گزینهٔ ۴ دورهٔ نوسانگر برابر است با:

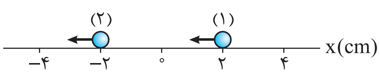
$$\omega=۱۰\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=۱۰\pi\Rightarrow T=۰/۲\,s$$

تعداد نوسان‌های متحرک در مدت $t=۶۰\,s$ برابر است با:

$$n=\frac{t}{T}=\frac{۶۰}{۰/۲}=۳۰۰$$

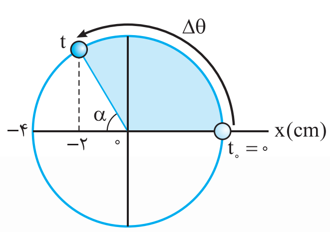
نوسانگر در هر نوسان ۲ بار پاره‌خط نوسان را طی می‌کند، بنابراین در ۳۰۰ نوسان ۶۰۰ بار طول مسیر نوسان طی می‌شود.

۷۲۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول:** دامنهٔ حرکت نوسانگر $A=۰/۰۴\,m=۴\,cm$ است. نوسانگر در لحظهٔ عبور از نقطهٔ (۱) برای اولین بار و در لحظهٔ عبور از نقطهٔ (۲) برای دومین بار در فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری از نقطهٔ تعادل قرار می‌گیرد. حرکت نوسانگر در موقعیت (۱) به صورت تندشونده و در موقعیت (۲) به صورت کندشونده است. پس باید حساب کنیم در چه لحظه‌ای برای اولین بار $x=-۲\,cm$ می‌شود:



$$x=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۶}t\Rightarrow-۰/۰۲=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۶}t\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۶}t=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{۶}t=\pi-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\frac{\pi}{۶}t=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow t=۴\,s$$

راه‌حل دوم (به کارگیری دایرهٔ مرجع): شکل مقابل نشان می‌دهد نقطهٔ مرجع چگونه حرکت کرده. در مکان $x=-۲\,cm$ داریم:



$$x=-A\cos\alpha\Rightarrow-۲=-۴\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۳}\,rad$$

البته شما خیلی تیزید و زمانی که $x=\pm\frac{۱}{۲}A$ است، سریع یاد زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}\,rad$ می‌افتید! با توجه به شکل مقابل:

$$\Delta\theta=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}\,rad$$

$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi}{۶}\Delta t\Rightarrow\Delta t=۴\,s$$

۷۲۵- گزینهٔ ۳ دامنهٔ A، $۰/۰۲\,m$ بیشتر از دامنهٔ B است:

$$A_A=A_B+۰/۰۲=۱+۰/۰۲=۱/۰۲\,m$$

دورهٔ حرکت B برابر است با:

$$\omega_B=\pi\,rad/s\Rightarrow\frac{۲\pi}{T_B}=\pi\Rightarrow T_B=۲\,s$$

دورهٔ حرکت A، ۲ s بیشتر از دورهٔ حرکت B است؛ پس:

$$T_A=T_B+۲=۲+۲=۴\,s\Rightarrow\omega_A=\frac{۲\pi}{T_A}=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\,rad/s$$

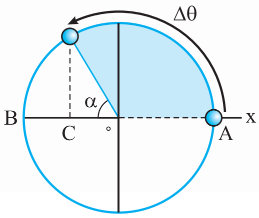
$$x_A=A_A\cos\omega_A t\Rightarrow x_A=۱/۰۲\cos\frac{\pi}{۲}t$$

۷۲۶- گزینه ۱ **راه‌حل اول:** $x_C = A\cos\omega t \Rightarrow -2 = 4\cos\omega \times 2 \Rightarrow \cos 2\omega = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\omega = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\omega = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3}\,rad/s$

$\xrightarrow{A=4\,cm} x = A\cos\omega t = 0/04\cos\frac{\pi}{3}t$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): زاویه‌ای که نقطهٔ مرجع با محور افقی در هنگام عبور نوسانگر از نقطهٔ C می‌سازد، برابر $\frac{\pi}{3}$ rad است.

$x_C = -A\cos\alpha \Rightarrow -2 = -4\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}\,rad$



بنابراین، زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع در جابه‌جایی از A تا C برابر است با:

$\Delta\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\,rad$

$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \omega \times 2 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3}\,rad/s \Rightarrow x = A\cos\omega t = 0/04\cos\frac{\pi}{3}t$

۷۲۷- گزینه ۲ **گام اول:** دامنهٔ حرکت برابر نصف پاره‌خط نوسان است:

$A = \frac{20}{2} = 10\,cm = 0/1\,m$

گام دوم: یک نوسانگر در یک چرخه ۲ بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند. بنابراین، نوسانگر در یک دقیقه $(t = 60\,s)$، ۶۰۰ چرخه انجام می‌دهد. طبق رابطهٔ (۱):

$n = \frac{t}{T} \Rightarrow 600 = \frac{60}{T} \Rightarrow T = 0/1\,s$

و طبق رابطهٔ (۵):

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0/1} = 20\pi\,rad/s$

گام سوم: جای‌گذاری مقادیر A و ω در معادلهٔ حرکت نوسانگر:

$x = A\cos\omega t = 0/1\cos 20\pi t$

۷۲۸- گزینه ۱ به خاطر اهمیت این تست، از سه راه حلش می‌کنیم.

راه‌حل اول (تشریحی): نوسانگر در هر ثانیه ۱۰ چرخه انجام می‌دهد (۱۰ بار پاره‌خط نوسان را در یک جهت و ۱۰ بار دیگر در جهت مخالف طی می‌کند.) پس بسامد نوسانگر $10\,Hz$ است.

$f = 10\,Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 10 = 20\pi\,rad/s$

معادلهٔ حرکت نوسانگر برابر است با:

$x = A\cos\omega t = 0/1\cos 20\pi t$

در لحظهٔ عبور نوسانگر از نقطهٔ تعادل $x = 0$ می‌شود:

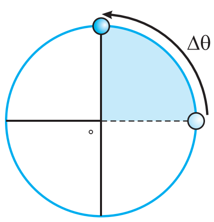
$x = 0 \Rightarrow 0/1\cos 20\pi t = 0 \Rightarrow 20\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{40}\,s$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): یک راه‌حل خیلی خوب و سریع برای حل این نوع تست‌ها (یعنی تست‌هایی که زمان جابه‌جایی نوسانگر بین دو نقطه را می‌خواهند)، این است که زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع را به دست آورید و با استفاده از رابطهٔ (۶)، زمان طی این زاویه را حساب کنید. در لحظه‌ای که $\theta = \frac{\pi}{2}\,rad$ می‌شود، نوسانگر برای اولین بار در نقطهٔ تعادل عبور می‌کند. زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع از مبدأ زمان تا این لحظه برابر است با:

$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}\,rad$

و زمان طی این جابه‌جایی:

$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 20\pi\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{40}\,s$



راه‌حل سوم (خوب و سریع، اما نه به اندازهٔ قبلی!): باز هم از دایرهٔ مرجع استفاده کنید. از آن‌جا که ω ثابت است (با توجه به رابطهٔ ۶)، بین تغییر θ و زمان انجام این تغییر، تناسب مستقیم وجود دارد. نقطهٔ مرجع، زاویهٔ $2\pi\,rad$ را در یک دوره (T) می‌پیماید؛ زاویهٔ $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}\,rad$ را در چه مدت؟ حساب می‌کنیم:

زمان (s)	تغییر زاویه (rad)
$T = 0/1$	2π
Δt	$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2\pi \times \Delta t = 0/1 \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{40}\,s$

تیزباش نقطهٔ مرجع، کل دایرهٔ مرجع رو در مدت T و ربع دایره رو در مدت $\frac{T}{4}$ طی می‌کند؛ پس:

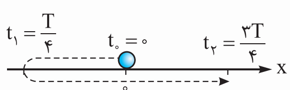
$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{0/1}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{40}\,s$

توجه در لحظهٔ $t = \frac{1}{40}\,s$، فاصلهٔ نوسانگر از وضع تعادل، اندازهٔ نیروی وارد بر نوسانگر و شتاب آن، همگی برای اولین بار، صفر و سرعت آن برای اولین بار بیشینه می‌شود.

۷۲۹- گزینه ۲ نوسانگر در هر دقیقه ۳۰۰ چرخه را انجام می‌دهد:

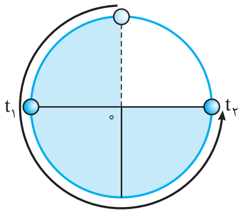
$n = \frac{t}{T} \Rightarrow 300 = \frac{60}{T} \Rightarrow T = 0/2\,s$

چون تندی نوسانگر در مبدأ زمان بیشینه است، در این لحظه از نقطهٔ تعادل عبور می‌کند. زمان جابه‌جایی از مرکز تا نقطهٔ بازگشت $\frac{T}{4}$ است. بنابراین، نوسانگر در لحظهٔ $t_1 = \frac{T}{4}$ برای اولین بار و در لحظهٔ $t_2 = \frac{3T}{4}$ برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد.



$t_2 = \frac{3T}{4} = \frac{3 \times 0/2}{4} = 0/15\,s$

توجه شکل روبه‌رو نشان می‌دهد نقطهٔ مرجع چگونه حرکت کرده؛ وقتی نوسانگر برای بار دوم تغییر جهت می‌دهد، نقطهٔ مرجع $\frac{۳}{۴}$ محیط دایره را طی می‌کند. کل دایره در مدت T طی می‌شود. $\frac{۳}{۴}$ آن در چه مدت؟



۷۳۰- گزینهٔ ۳ جسمی از حال سکون رها می‌شود و به سمت نقطهٔ تعادل شروع به حرکت می‌کند. پس نوسانگر در مبدأ زمان بیشترین فاصله را از مرکز داشته است و پس از $\Delta t_۱ = ۰/۸\,s$ برای اولین بار از نقطهٔ تعادل عبور می‌کند. این بازهٔ زمانی $\frac{T}{۴}$ طول می‌کشد. $\frac{T}{۴} = ۰/۸ \Rightarrow T = ۳/۲\,s$

زمان لازم برای این‌که نوسانگر دو بار متوالی از مرکز نوسان عبور کند $\frac{T}{۲}$ است: $\Delta t_۲ = \frac{T}{۲} = \frac{۳/۲}{۲} = ۱/۶\,s \Rightarrow \Delta t = \Delta t_۱ + \Delta t_۲ = ۰/۸ + ۱/۶ = ۲/۴\,s$

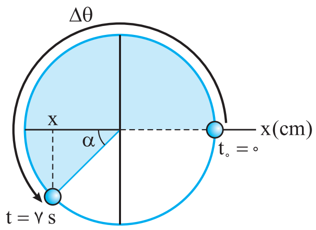
۷۳۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول (تشریحی)**: با توجه به اطلاعات تست معادلهٔ حرکت نوسانگر را می‌نویسیم:

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۶}\,rad/s \Rightarrow x(cm) = A\cos\omega t = ۱۰\cos\frac{\pi}{۶}t$$

چون A را برحسب سانتی‌متر در معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر قرار دادیم، هر لحظه‌ای را که در معادله قرار دهیم، مکان برحسب سانتی‌متر در آن لحظه به دست می‌آید:

$$x = ۱۰\cos\frac{\pi}{۶}\times ۷ = ۱۰\cos(\pi + \frac{\pi}{۶}) \xrightarrow{(\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha)} x = -۱۰\cos\frac{\pi}{۶} = -۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -۵\sqrt{۳}\,cm$$

راه‌حل دوم (استفاده از دایرهٔ مرجع): اول با استفاده از تناسب ز. ز (یعنی زمان و زاویه!) زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع را حساب می‌کنیم.



زمان (s)	زاویه (rad)
$T = ۱۲$	۲π
$\Delta t = ۷$	$\Delta\theta$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{۱۴\pi}{۱۲} = \frac{۷\pi}{۶}\,rad$$

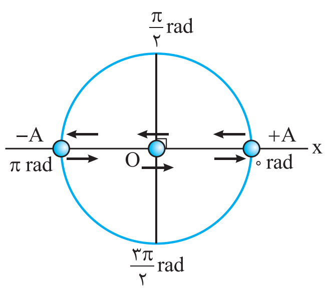
در این حالت نقطهٔ مرجع با محور افقی زاویهٔ $\frac{\pi}{۶}\,rad$ می‌سازد:

$$\Delta\theta = \pi + \alpha \Rightarrow \frac{۷\pi}{۶} = \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۶}\,rad$$

دانش‌آموز زرنگ با شنیدن زاویهٔ $\frac{\pi}{۶}$ یاد $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌افتد، شما چه‌طور؟

$$x = -A\cos\alpha = -۱۰\cos\frac{\pi}{۶} = -۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -۵\sqrt{۳}\,cm$$

۷۳۲- گزینهٔ ۴ مطابق شکل، متحرک در شناسهٔ (فاز) $\frac{\pi}{۲}\,rad$ برای اولین بار و در شناسهٔ (فاز) $\frac{۳\pi}{۲}\,rad$ برای دومین بار از نقطهٔ O (نقطهٔ تعادل) می‌گذرد که می‌بینیم مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ رادیان هستند. به بیان دقیق‌تر:



$$x = A\cos\omega t \xrightarrow[(x=۰)]{(\omega t=\theta)} ۰ = A\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = ۰ \Rightarrow \theta = (۲n-۱)\frac{\pi}{۲} = (n-\frac{۱}{۲})\pi\,(rad)$$

توجه کنید که اگر در این‌جا از $(۲n+۱)$ برای نمایش عدد فرد استفاده کنید، در شمارش تعداد دفعات عبور از O، یک پله جلو می‌افتید!

متحرک در شناسهٔ (فاز) صفر برای اولین بار از نقطهٔ بازگشت $(+A)$ و در شناسهٔ (فاز) $\pi\,rad$ برای دومین بار از نقطهٔ بازگشت $(-A)$ می‌گذرد که می‌بینیم مضارب صحیح π رادیان هستند. به بیان دقیق‌تر:

$$x = A\cos\omega t \xrightarrow[(x=\pm A)]{(\omega t=\theta)} \pm A = A\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \pm۱ \Rightarrow \theta = (n-۱)\pi\,(rad)$$

دوباره توجه کنید که اگر در این‌جا، از n برای نمایش عدد صحیح استفاده کنید، باز هم در شمارش دفعات عبور از نقطه‌های بازگشت، یک پله جلو می‌پرید!

تیزباش کدام گزینه است که اگر اندازهٔ n را در آن ۱ بگذارید، به پاسخ $\frac{\pi}{۲}\,rad$ و صفر می‌رسید؟ بله: گزینهٔ پایانی!

۷۳۳- گزینهٔ ۳ نوسانگر در هر دوره، ۲ بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند. بنابراین، در هر دوره ۲ بار از یک نقطه (که در مسیر حرکت آن قرار دارد) می‌گذرد؛ یک بار در هنگام رفت و بار دیگر در هنگام برگشت. دورهٔ حرکت نوسانگر ما برابر است با: $\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۲\,s$

با توجه به توضیح‌های فوق، معلوم می‌شود نوسانگر در مدت ۲ s، دو بار از مکان $x = +۱۰\,cm$ عبور می‌کند.

۷۳۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول**: باید حساب کنیم در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۱/۶\,s$ چند بار $x = +۱۰\,cm$ یا $x = -۱۰\,cm$ و خلاصه $x = \pm ۰/۱\,m$ می‌شود. $x = ۰/۲\cos\pi t$

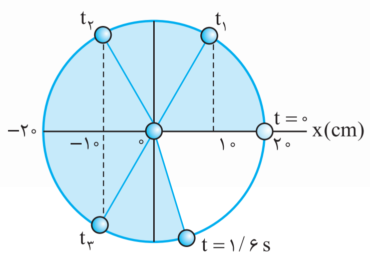
$$\pm ۰/۱ = ۰/۲\cos\pi t \Rightarrow \cos\pi t = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow \pi t = \frac{\pi}{۳}, (\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}), (\pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳}), (۲\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}), \ldots \Rightarrow t = \frac{۱}{۳}s, \frac{۲}{۳}s, \frac{۴}{۳}s, \frac{۵}{۳}s, \ldots$$

$\frac{۵}{۳}s$ بزرگ‌تر از ۱/۶ s است. پس این مقدار t و مقادیر بزرگ‌تر از $\frac{۵}{۳}s$ را قبول نمی‌کنیم. در نتیجه، نوسانگر ۳ بار و در لحظه‌های $t = \frac{۱}{۳}s$، $t = \frac{۲}{۳}s$ و $t = \frac{۴}{۳}s$ از ۱۰ سانتی‌متری مرکز نوسان عبور می‌کند.

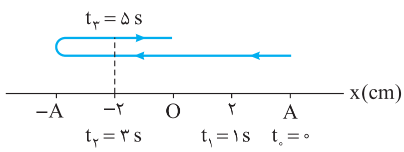
راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): در حل اکثر تست‌ها با استفاده از دایرهٔ مرجع باید ببینیم در زمان داده‌شده چه زاویه‌ای طی شده. زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۱/۶\,s$ برابر است با:

$$\Delta\theta=\omega t=\pi t=\pi\times ۱/۶=\frac{۸\pi}{۵}\,rad$$

$\frac{۸\pi}{۵}\,rad$ برابر $\frac{۸\times ۱۸۰^\circ}{۵}=۲۸۸^\circ$ است. همان‌طور که شکل روبه‌رو نشان می‌دهد، در بازهٔ زمانی $t_۰=۰$ تا $t=۱/۶\,s$، نقطهٔ مرجع روی محور x، ۳ بار (در لحظه‌های $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$) از ۱۰ سانتی‌متری O عبور می‌کند.



۷۳۵- گزینهٔ ۳ گام اول: با فرض این‌که نوسانگر حول نقطهٔ O و با دامنهٔ A نوسان می‌کند، وضعیت آن را در لحظات $t_۰$، $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ بر روی شکل روبه‌رو نشان می‌دهیم:



گام دوم: با توجه به شکل روبه‌رو، ۲ s طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $x=-۲\,m$ عبور و پس از تغییر جهت در مکان $x=-A$ دوباره از مکان $x=-۲\,m$ عبور کند:

$$\Delta t=t_۳-t_۲=۵-۳=۲\,s$$

زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $x=-۲\,cm$ به مکان $x=-A$ برسد نصف مقدار فوق است:

$$\Delta t'=\frac{۱}{۲}\Delta t=\frac{۱}{۲}\times ۲=۱\,s$$

گام سوم: دورهٔ حرکت نوسانگر را با توجه به این مطلب که زمان لازم برای انتقال نوسانگر از مکان $x=A$ به مکان $x=-A$ برسد برابر $\frac{T}{۲}$ است، به دست می‌آوریم:

$$\frac{T}{۲}=t_۲+\Delta t'\Rightarrow \frac{T}{۲}=۳+۱=۴\Rightarrow T=۸\,s$$

گام چهارم: نوسانگر در هر دوره، ۲ بار از مکان $x=+۲\,cm$ می‌گذرد، بنابراین در پایان ۱۲ دوره، $۲۴=۲\times۱۲$ بار از مکان $x=+۲\,cm$ عبور می‌کند و مطابق شکل بالا زمان لازم برای این‌که برای بار بیست و پنجم از مکان $x=۲\,cm$ بگذرد برابر است با:

$$t=۱۲T+t_۱=۱۲\times۸+۱=۹۷\,s$$

۷۳۶- گزینهٔ ۱ گام اول (محاسبهٔ دورهٔ نوسان): با توجه به رابطهٔ مکان ـ زمان:

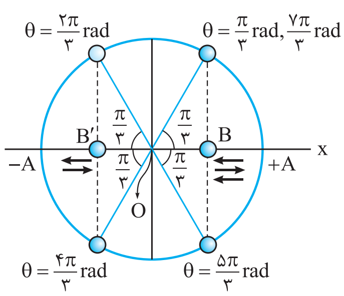
$$x=A\cos\omega t=A\cos(\frac{\pi}{۴}t)\Rightarrow \omega t=\frac{\pi}{۴}t\xrightarrow{(\omega=\frac{۲\pi}{T})}\frac{۲\pi}{T}t=\frac{\pi t}{۴}\Rightarrow T=۸\,s$$

گام دوم: در شکل مقابل، نقطه‌های وسط دامنه را B و B′ نامیده‌ایم. B وسط نقطهٔ تعادل (O) و نقطهٔ بازگشت $x=+A$ است. پس:

$$x_B=\frac{۰+A}{۲}=\frac{A}{۲}$$

نقطهٔ B′ هم وسط نقطهٔ تعادل (O) و نقطهٔ بازگشت $x=-A'$ است و:

$$x_{B'}=\frac{۰+(-A)}{۲}=-\frac{A}{۲}$$



نوسانگر در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، $\frac{۵}{۴}$ نوسان کامل (همون ۵ تا $\frac{۱}{۴}$ نوسان یا ۵ دامنهٔ نوسان) را طی می‌کند:

$$n=\frac{t}{T}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

یعنی پس از شروع نوسان از $x=+A$ و برگشت آن به همین نقطه، چهار ناحیه (دامنه) را در $T=۸\,s$ طی می‌کند و در $\frac{T}{۴}=۲\,s$ بعدی پنجمین ناحیه (دامنه) را طی کرده به O می‌رسد. خب نوسانگر در هر ناحیهٔ نوسان یک بار از یکی از دو نقطهٔ B یا B′ می‌گذرد و در کل، در ۵ ناحیه، ۵ بار از B یا B′ می‌گذرد (سه بار از B دو بار از B′). به بیان مثلثاتی می‌توان نوشت:

۳ بار: $x_B=\frac{A}{۲}\Rightarrow A\cos\theta=\frac{A}{۲}\Rightarrow \cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \theta=(\frac{\pi}{۳}\,rad$ یا $\frac{۵\pi}{۳}\,rad$ یا $\frac{۷\pi}{۳}\,rad)$: عبور از نقطهٔ B

۲ بار: $x_{B'}=-\frac{A}{۲}\Rightarrow A\cos\theta=-\frac{A}{۲}\Rightarrow \cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \theta=(\frac{۲\pi}{۳}\,rad$ یا $\frac{۴\pi}{۳}\,rad)$: عبور از نقطهٔ B′

برای درک کامل‌تر، زمان این عبورها را هم در ۱۰ ثانیهٔ اول حساب می‌کنیم:

$$\theta=\omega t=\frac{۲\pi t}{T}=\frac{۲\pi t}{۸}=\frac{\pi}{۴}t$$

۳ بار: $(\frac{\pi}{۴}t=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t=\frac{۴}{۳}s)$ یا $(\frac{\pi}{۴}t=\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow t=\frac{۲۰}{۳}s)$ یا $(\frac{\pi}{۴}t=\frac{۷\pi}{۳}\Rightarrow t=\frac{۲۸}{۳}s)$: زمان‌های عبور از نقطهٔ B

۲ بار: $(\frac{\pi}{۴}t=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow t=\frac{۸}{۳}s)$ یا $(\frac{\pi}{۴}t=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow t=\frac{۱۶}{۳}s)$: زمان‌های عبور از نقطهٔ B′

۷۳۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول (تشریحی):** مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t_۱=\frac{T}{۱۲}$ و $t_۲=\frac{۲T}{۱۲}$ حساب می‌کنیم.

$$x_۱=A\cos\omega t_۱=A\cos(\frac{۲\pi}{T})\times\frac{T}{۱۲}=A\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$$

$$x_۲=A\cos\omega t_۲=A\cos(\frac{۲\pi}{T})\times\frac{۲T}{۱۲}=A\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}A$$

جابه‌جایی نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۰=۰$ تا $t_۱$ برابر است با:

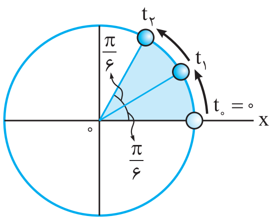
$$\Delta x_۱=x_۱-x_۰=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A-A=(\frac{\sqrt{۳}-۲}{۲})A$$

جابه‌جایی نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ برابر است با:

$$\Delta x_۲=x_۲-x_۱=\frac{۱}{۲}A-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=(\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲})A$$

$$\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱}=\frac{(\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲})A}{(\frac{\sqrt{۳}-۲}{۲})A}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲-\sqrt{۳}}\xrightarrow{\text{(گویاش کنیم.)}}\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱}=(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲-\sqrt{۳}})(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}})=\frac{۲\sqrt{۳}+۳-۲-\sqrt{۳}}{۴-۳}=\sqrt{۳}+۱$$

راه‌حل دوم (به‌کارگیری دایرهٔ مرجع): بین زمان و زاویهٔ طی‌شده توسط نوسانگر نسبت مستقیم وجود دارد. نقطهٔ مرجع در مدت T زاویهٔ $۲\pi\ rad$ و در مدت $\frac{T}{۱۲}$ زاویهٔ $\frac{\pi}{۶}\ rad$ را طی می‌کند. پس زاویه‌ای که نقطهٔ مرجع با محور افق می‌سازد در لحظهٔ $t_۱=\frac{T}{۱۲}$ برابر $\alpha_۱=\frac{\pi}{۶}\ rad$ و در لحظهٔ $t_۲=\frac{۲T}{۱۲}$ برابر $\alpha_۲=\frac{\pi}{۳}\ rad$ است.



$$x_۲=A\cos\alpha_۲=A\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}A \qquad x_۱=A\cos\alpha_۱=A\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$$

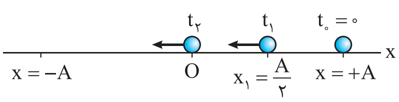
بقیهٔ مراحل حل تست مثل راه‌حل اول است.

نتیجه جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم بزرگ‌تر از جابه‌جایی در ثانیهٔ اول است، چون نوسانگر در ثانیهٔ دوم به نقطهٔ تعادل نزدیک‌تر و سرعت متوسط آن بیشتر است. در نتیجه، **جابه‌جایی با زمان جابه‌جایی نسبت مستقیم ندارد.**

۷۳۸- گزینهٔ ۲ زمان لازم را برای این‌که نوسانگر از مکان $x_۰=+A$ تا $x_۱=\frac{A}{۲}$ جابه‌جا شود، با $t_۱$ نشان می‌دهیم.

$$x_۱=A\cos\omega t_۱ \Rightarrow \frac{A}{۲}=A\cos\omega t_۱ \Rightarrow \cos\omega t_۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (\frac{۲\pi}{T})t_۱=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow t_۱=\frac{T}{۶}$$

از طرفی $t_۲=\frac{T}{۴}$ طول می‌کشد تا نوسانگر از انتهای مسیر تا مرکز $(x_۲=۰)$ جابه‌جا شود. ذره در بازهٔ زمانی $t_۰$ تا $t_۱$ به انتهای مسیر و در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ به مرکز نزدیک‌تر است:



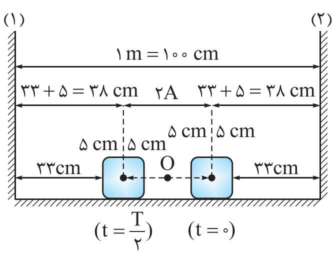
$$\Delta t_۲=t_۲-t_۱=\frac{T}{۴}-\frac{T}{۶}=\frac{T}{۱۲}$$

در ناحیهٔ اول (بازهٔ زمانی $t_۰=۰$ تا $t_۲=\frac{T}{۴}$)، احتمال (P) این‌که ذره به نقطهٔ تعادل نزدیک‌تر باشد (یعنی بین $x_۱$ و O باشد)، برابر است با:

$$P=\frac{\text{(زمان جابه‌جایی بین مکان‌های } x_۱ \text{ و O)}}{\text{(زمان جابه‌جایی در ناحیهٔ اول)}}=\frac{t_۲-t_۱}{t_۲-t_۰}=\frac{\frac{T}{۱۲}}{\frac{T}{۴}}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}\simeq ۰/۳۳$$

در ناحیه‌های بعدی هم همین درصد، احتمال وقوع دارد. پس در کل یک دوره هم همین‌طور است.

۷۳۹- گزینهٔ ۴ *رسم فنر رو بی‌خیال!* در شکل (الف)، وضعیت مکعب در دو لحظهٔ $t=۰$ که مکعب در مکان $x=+A$ و $t=\frac{T}{۲}$ که مکعب در مکان $x=-A$ است، رسم شده. با توجه به فاصله‌های ۳۳ cm نزدیک‌ترین نقطهٔ مکعب تا دیوارهٔ نزدیک‌تر در دو وضعیت داده‌شده و ضلع مکعب $(a=۱۰\ cm)$، می‌بینیم که فاصلهٔ مرکز مکعب تا دیوارهٔ نزدیک‌تر در هر دو وضعیت برابر است با:



(الف)

$$d_۱=d_۲=۳۳+\frac{a}{۲}=۳۳+\frac{۱۰}{۲}=۳۳+۵=۳۸\ cm$$

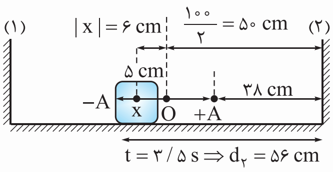
فاصلهٔ مرکز مکعب در دو لحظهٔ یادشده دو برابر دامنهٔ نوسان آن است؛ پس:

$$۲A=۱۰۰-۲\times۳۸=۱۰۰-۷۶=۲۴\ cm \Rightarrow A=۱۲\ cm$$

توجه کنید که با توجه به تقارن فاصله‌ها (برابری دوتا ۳۳ cm)، نقطهٔ تعادل (O) دقیقاً وسط دو دیواره و در فاصلهٔ ۵۰ cm از آن‌ها می‌افتد که از این راه هم می‌توانیم به اندازهٔ دامنه برسیم:

$$A=\frac{۱۰۰}{۲}-۳۸=۵۰-۳۸=۱۲\ cm$$

حالا نوسان مرکز مکعب را در نظر می‌گیریم و معادلهٔ نوسان آن حول نقطهٔ O را می‌نویسیم:



(ب)

$$x=A\cos\omega t \xrightarrow{(\omega=۲\pi f)} x=A\cos(۲\pi f)t$$

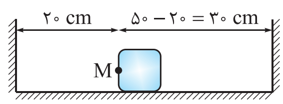
$$=۱۲\times\cos[(۲\pi\times\frac{۲}{۳})\times۳/۵]=۱۲\cos\frac{۱۴\pi}{۳}=۱۲\cos(۴\pi+\frac{۲\pi}{۳})$$

$$x=۱۲\cos\frac{۲\pi}{۳}=۱۲\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=۱۲\times(-\cos\frac{\pi}{۳})=۱۲\times(-\frac{۱}{۲})=-۶\ cm$$

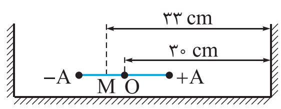
می‌بینیم که مطابق شکل (ب)، در لحظهٔ $t=۳/۵\,s$، مرکز مکعب در سمت چپ نقطهٔ O و در فاصلهٔ ۶ cm از آن قرار دارد $(x=-۶\,cm)$. چون فاصلهٔ O تا دیوارهٔ (۲)، برابر ۵۰ cm است، فاصلهٔ مرکز مکعب تا دیوارهٔ (۲) در این لحظه مطابق شکل (ب) برابر است با: $d_۲=۵۰-(-۶)=۵۰+۶=۵۶\,cm$

(در همین لحظه، فاصلهٔ مرکز مکعب از دیوارهٔ (۱)، برابر ۴۴ cm است که خواسته نشده.)

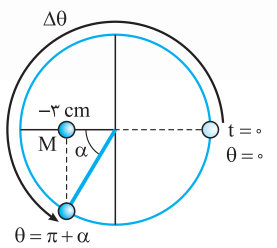
۷۴۰- گزینهٔ ۳ طول عادی فنر (۲۰ cm) مربوط به حالت تعادل است. بنابراین اگر نوسان نقطهٔ M را در نظر بگیریم، وضعیت نقطهٔ M در شکل صورت تست، نقطهٔ تعادل آن را نشان می‌دهد. با توجه به شکل (الف)، فاصلهٔ M تا دیواره‌های عمودی سمت چپ و راست به ترتیب ۲۰ cm و $۵۰-۲۰=۳۰\,cm$ است. پس، فاصلهٔ ۳۳ cm داده‌شده بین M و دیوارهٔ عمودی سمت راست مطابق شکل (ب)، مربوط به زمانی است که نقطهٔ M از مکان $x=۳۰-۳۳=-۳\,cm$ نسبت به نقطهٔ تعادل (O) می‌گذرد (یعنی ۳ cm سمت چپ O).
چون از دومین عبور M از مکان $x=-۳\,cm$ سؤال شده، نوسانگر (و نقطهٔ مرجع)، مطابق شکل (پ)، در ناحیهٔ نوسانی سوم از اولین دورهٔ نوسان هستند. می‌توان نوشت:



الف) وضعیت نقطهٔ M در نقطهٔ تعادل نوسان.



ب) وضعیت نقطهٔ M در مکان بیان‌شده؛ (دامنهٔ نوسان $OA=۶\,cm$ است.)



پ) وضعیت نقطهٔ مرجع در حالت بیان‌شده.

$$x=A\cos\omega t \xrightarrow[(f=۴\,Hz)]{(\omega=۲\pi f)} -۳=۶\cos(۲\pi\times۴\times t) \Rightarrow \cos ۸\pi t=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow[(\cos\alpha=\frac{۱}{۲})]{(\text{ناحیهٔ سوم})} ۸\pi t=\pi+\alpha=\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲t=\frac{۱}{۳} \Rightarrow t=\frac{۱}{۶}\,s$$

خودتان نشان دهید که گزینهٔ نخست، لحظهٔ اولین عبور M از مکان $x=-۳\,cm$ را نشان می‌دهد.

۷۴۱- گزینهٔ ۳ لحظه‌ای را که نوسانگر برای اولین بار و به صورت تندشونده از مکان $x_۱=+۳\,cm$ عبور می‌کند، با $t_۱$ و $۰/۱۲۵\,s$ بعد از آن را با $t_۲$ نشان می‌دهیم:

$$x_۱=۵\cos ۴\pi t_۱ \Rightarrow ۳=۵\cos ۴\pi t_۱ \Rightarrow \cos ۴\pi t_۱=۰/۶$$

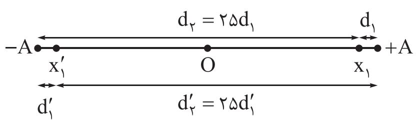
$$x_۲=۵\cos \pi t_۲=۵\cos ۴\pi(t_۱+۰/۱۲۵)=۵\cos ۴\pi(t_۱+\frac{۱}{۸})=۵\cos(۴\pi t_۱+\frac{\pi}{۲})$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha \Rightarrow x_۲=-۵\sin ۴\pi t_۱$$

اگر کسینوس زاویه‌ای ۰/۶ باشد، سینوس آن زاویه ۰/۸ است؛ پس:

$$x_۲=-۵\times ۰/۸=-۴\,cm \Rightarrow |x_۲|=۴\,cm$$

۷۴۲- گزینهٔ ۳ مطابق شکل (الف)، جسم در لحظهٔ $t_۱$ یا در مکان $x_۱$ یا $x'_۱$ است. با توجه به این شکل:



الف) ۲ وضعیت ممکن نوسانگر در لحظهٔ $t_۱$.

$$d_۱+d_۲=d'_۱+d'_۲=۲A \Rightarrow d_۱+۲۵d_۱=۲A \Rightarrow ۲۶d_۱=۲A \Rightarrow A=۱۳d_۱ \Rightarrow x_۱=A-d_۱=۱۳d_۱-d_۱=۱۲d_۱$$

$$\Rightarrow d'_۱+۲۵d'_۱=۲A \Rightarrow ۲۶d'_۱=۲A \Rightarrow A=۱۳d'_۱ \Rightarrow x'_۱=-A+d'_۱=-۱۳d'_۱+d'_۱=-۱۲d'_۱$$

بنابراین $x_۱$ و $x'_۱$ قرینه‌اند و:

$$d_۱=d'_۱=\frac{A}{۱۳} \Rightarrow x_۱=\frac{۱۲}{۱۳}A\,,\, x'_۱=-\frac{۱۲}{۱۳}A$$

در لحظهٔ $t_۱$:

$$x_۱=A\cos\omega t_۱=A\cos\theta_۱ \xrightarrow{(|x_۱|=|x'_۱|=\frac{۱۲A}{۱۳})} |x_۱|=|x'_۱|=A|\cos\theta_۱| \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۳}A=A|\cos\theta_۱| \Rightarrow |\cos\theta_۱|=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\sin^۲\theta_۱+\cos^۲\theta_۱=۱ \Rightarrow \sin^۲\theta_۱+(\frac{۱۲}{۱۳})^۲=۱ \Rightarrow \sin^۲\theta_۱=۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}=\frac{۱۶۹-۱۴۴}{۱۶۹}=\frac{۲۵}{۱۶۹} \Rightarrow |\sin\theta_۱|=\frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \sin\theta_۱=\pm\frac{۵}{۱۳} \quad (I)$$

چرا $\sin\theta_۱$ رو حساب کردیم؟! در زیر می‌بینید!! حالا بریم سراغ لحظهٔ $t_۲$ که نوسانگر در آن لحظه، در مکان $x_۲$ (یا قرینه‌اش $x'_۲$) است.

$$x_۲=A\cos\omega t_۲=A\cos\omega(t_۱+\frac{۵T}{۴})=A\cos(\omega t_۱+\frac{۵\omega T}{۴}) \xrightarrow[(\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega T=۲\pi)]{(\omega t_۱=\theta_۱)} x_۲=A\cos(\theta_۱+\frac{۵\times۲\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow x_۲=A\cos(\theta_۱+\frac{۵\pi}{۲})=A\cos(\theta_۱+\frac{\pi}{۲}+۲\pi) \quad (II)$$

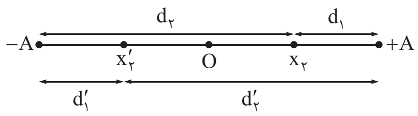
یادداشت ریاضی

در کتاب‌های ریاضی پایه‌های دهم و یازدهم می‌خوانید که: $\cos(\alpha+۲\pi)=\cos\alpha\,,\,\cos(\alpha+\frac{\pi}{۲})=-\sin\alpha$

به کمک یادداشت ریاضی بالا و رابطهٔ (II):

$$x_۲=A\cos(\theta_۱+\frac{\pi}{۲})=A\times(-\sin\theta_۱)=-A\sin\theta_۱ \xrightarrow{(I)} x_۲=\pm\frac{۵}{۱۳}A$$

در شکل (ب)، مکان نقطه‌های $x_2 = \frac{5}{13}A$ و $x'_2 = -\frac{5}{13}A$ رسم شده است.



ب) ۲ وضعیت ممکن نوسانگر در لحظهٔ t_2 .

با توجه به شکل (ب):

$$d_1 = d'_1 = |A - x_2| = A - \frac{5}{13}A = \frac{8}{13}A$$

$$d_2 = d'_2 = A + x_2 = A + \frac{5}{13}A = \frac{18}{13}A$$

نسبت خواسته‌شده:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{d'_2}{d'_1} = \frac{\frac{18}{13}A}{\frac{8}{13}A} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

۷۴۳- **گزینه ۴** با توجه به مکان نوسانگر در لحظهٔ t_1:

$$x_1 = A\cos\omega t_1 \Rightarrow 4 = 5\cos\omega t_1 \Rightarrow \cos\omega t_1 = \frac{4}{5} \quad (I)$$

بنابراین:

$$\sin^2\omega t_1 + \cos^2\omega t_1 = 1 \xrightarrow{(I)} \sin^2\omega t_1 + (\frac{4}{5})^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\omega t_1 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\omega t_1 = \pm\frac{3}{5}$$

در لحظهٔ t_2:

$$x_2 = A\cos\omega t_2 = 5\cos[\omega\times(2t_1 + \frac{5T}{4})] = 5\cos(2\omega t_1 + \frac{5\omega T}{4}) \xrightarrow[(\Rightarrow\ \omega T = 2\pi)]{(\omega = \frac{2\pi}{T})} x_2 = 5\cos(2\omega t_1 + \frac{5\times 2\pi}{4})$$

$$\Rightarrow x_2 = 5\cos(2\omega t_1 + \frac{5\pi}{2}) = 5\cos(2\omega t_1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi) = 5\cos(2\omega t_1 + \frac{\pi}{2})$$

یادداشت ریاضی

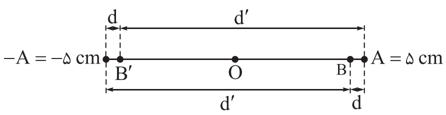
از کتاب‌های ریاضی پایه‌های دهم و یازدهم می‌دانید که: $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha \ , \ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

بنابراین:

$$x_2 = 5\cos(\frac{\pi}{2} + 2\omega t_1) = 5\times(-\sin 2\omega t_1) = -5\sin 2\omega t_1 = -5\times(2\sin\omega t_1\cos\omega t_1) = -10\sin\omega t_1\cos\omega t_1$$

$$\Rightarrow x_2 = -10\times(\pm\frac{3}{5})\times(\frac{4}{5}) = \pm\frac{24}{5}\,cm = \pm 4/8\,cm = \pm 48\,mm$$

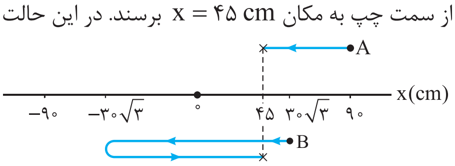
اکنون به شکل مقابل توجه کنید. در لحظهٔ t_2، چه متحرک در نقطهٔ B با مکان $x_2 = 48\,mm$ باشد چه در نقطهٔ B' با مکان $x_2 = -48\,mm$، فاصله‌اش تا نقطهٔ بازگشت نزدیک‌تر (d) برابر است با:



$$d = A - |x| = A - |x_2| \xrightarrow{(A = 5\,cm = 50\,mm)} d = 50 - |\pm 48| = 50 - 48 = 2\,mm$$

و فاصله‌اش تا نقطهٔ بازگشت دورتر (d') برابر $2A - d$ است. زیرا: $d + d' = 2A \Rightarrow d' = 2A - d = 2\times 50 - 2 = 98\,mm$

۷۴۴- **گزینه ۴** دو حالت ممکن است رخ دهد: **حالت اول**: نوسانگر A از سمت راست و نوسانگر B از سمت چپ به مکان $x = 45\,cm$ برسند. در این حالت با توجه به نمودار مقابل و با فرض این‌که دو نوسانگر در لحظهٔ t_1 از کنار یکدیگر عبور کنند، داریم:



(حالت اول)

$$x_A = 90\cos\omega_A t \Rightarrow 45 = 90\cos\omega_A t_1 \Rightarrow \omega_A t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{3\omega_A} \quad (I)$$

$$x_B = 30\sqrt{3}\cos\omega_B t \Rightarrow 45 = 30\sqrt{3}\cos\omega_B t_1 \Rightarrow \cos\omega_B t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

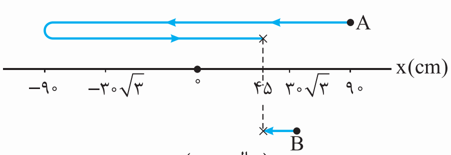
اولین جواب معادلهٔ صفحهٔ قبل $\omega_B t_1 = \frac{\pi}{6}$ است که اولین لحظهٔ عبور نوسانگر B از مکان $x = 45\,m$ را نشان می‌دهد. دومین جواب معادلهٔ بالا $\omega_B t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ است که دومین لحظهٔ عبور نوسانگر B از مکان $x = 45\,m$ را مشخص می‌کند:

$$\omega_B t_1 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{11\pi}{6\omega_B} \quad (II)$$

از مقایسهٔ (I) و (II) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\pi}{3\omega_A} = \frac{11\pi}{6\omega_B} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_A} = 5/5 \xrightarrow{(\omega = \frac{2\pi}{T})} \frac{T_A}{T_B} = 5/5$$

حالت دوم: نوسانگر A از سمت چپ و نوسانگر B از سمت راست در مکان $x = 45\,cm$ و در لحظهٔ t_2 از کنار یکدیگر عبور کنند، در این حالت با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



(حالت دوم)

$$x_A = 90\cos\omega_A t \Rightarrow 45 = 90\cos\omega_A t_2 \Rightarrow \cos\omega_A t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_A t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega_A t_2 = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{5\pi}{3\omega_A} \quad (III)$$

$$x_B=۳۰\sqrt{۳}\cos\omega_B t \Rightarrow ۴۵=۳۰\sqrt{۳}\cos\omega_B t_۲ \Rightarrow \cos\omega_B t_۲=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \omega_B t_۲=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow t_۲=\frac{\pi}{۶\omega_B} \quad (IV)$$

$$(III),(IV):\frac{۵\pi}{۳\omega_A}=\frac{\pi}{۶\omega_B} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_A}=۰/۱ \Rightarrow \frac{T_A}{T_B}=۰/۱$$

۷۴۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول:** نوسانگر در مدت یک دوره ۲ بار از هر نقطه عبور می‌کند. برای تعیین لحظه‌های عبور نوسانگر از مکان $x=۰/۰۲\,m$ کافی است این مکان را در معادلهٔ حرکت نوسانگر قرار دهیم:

$$۰/۰۲=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۱۲}t \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۱۲}t=\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ بالا دوتا جواب دارد. اولین جواب آن عبارت است از:

$$\frac{\pi}{۱۲}t=\frac{\pi}{۳}$$

که اولین لحظهٔ عبور نوسانگر از مکان $x=+۲\,cm$ را نشان می‌دهد:

$$\frac{\pi}{۱۲}t_۱=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow t_۱=۴\,s$$

دومین جواب معادلهٔ $\cos\frac{\pi}{۱۲}t=\frac{۱}{۲}$ عبارت است از:

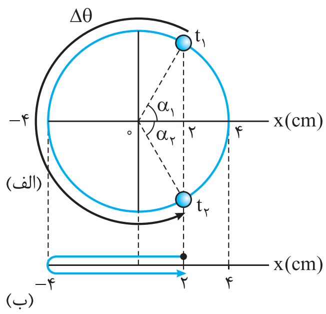
$$\frac{\pi}{۱۲}t_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$$

که دومین لحظهٔ عبور نوسانگر از مکان $x=+۲\,cm$ را نشان می‌دهد:

$$\frac{\pi}{۱۲}t_۲=\frac{۵\pi}{۳} \Rightarrow t_۲=۲۰\,s$$

$$\Delta t=t_۲-t_۱=۲۰-۴=۱۶\,s$$

راه‌حل دوم (به‌کارگیری دایرهٔ مرجع): وقتی از دایرهٔ مرجع استفاده می‌کنی باید جایگاه نقطهٔ مرجع رو در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی مطرح‌شده تعیین کنی؛ *بعدش از تناسب «ز ـ ز» استفاده کنی! «ز ـ ز» مخفف «زن ذلیل» نیست! مخفف «زاویه ـ زمانه»!*



مطابق رابطهٔ $\Delta\theta=\omega\Delta t$ بین زاویهٔ طی‌شده توسط نوسانگر و زمان طی آن زاویه نسبت مستقیم وجود دارد. بعضی موقع‌ها زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع رو به دست می‌یاری و حساب می‌کنی زاویهٔ طی‌شده در چه زمانی طی شده (مثل همین تست) و بعضی موقع‌ها زمان رو داری و باید حساب کنی در زمان داده‌شده چه زاویه‌ای طی شده. در شکل (ب) نحوهٔ حرکت نوسانگر و در شکل (الف) نحوهٔ حرکت نقطهٔ مرجع در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ رسم شده است. حالا زاویه‌ای را که نقطهٔ مرجع در لحظه‌های $t_۱$ تا $t_۲$، با محور افقی می‌سازد، حساب می‌کنیم:

$$x_۱=A\cos\alpha_۱ \Rightarrow ۲=۴\cos\alpha_۱ \Rightarrow \cos\alpha_۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha_۱=\frac{\pi}{۳}\,rad \xrightarrow{(x_۲=x_۱)} \alpha_۲=\alpha_۱=\frac{\pi}{۳}\,rad$$

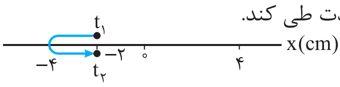
با این حساب زاویه‌ای که نقطهٔ مرجع در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ طی می‌کند، برابر است با:

$$\Delta\theta=۲\pi-\alpha_۱-\alpha_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}\,rad$$

$\Delta\theta$ را پیدا کردیم؛ Δt را می‌خواهیم:

$$\Delta\theta=\omega\Delta t \Rightarrow \frac{۴\pi}{۳}=\frac{\pi}{۱۲}\Delta t \Rightarrow \Delta t=۱۶\,s$$

۷۴۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول: گام اول:** لحظهٔ اولین عبور نوسانگر از مکان $x=-۲\,cm$ را با $t_۱$ و لحظهٔ دومین عبور نوسانگر از همین نقطه را با $t_۲$ نشان می‌دهیم. بازهٔ زمانی $\Delta t=t_۲-t_۱$ زمانی حداقل است که نوسانگر مطابق شکل (الف) کم‌ترین مسافت را در این مدت طی کند.



(الف)

$$x=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۱۲}t \xrightarrow{(x=-۰/۰۲\,m)} -۰/۰۲=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۱۲}t \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۱۲}t=-\frac{۱}{۲}$$

از حل اولین جواب معادلهٔ بالا $t_۱$ به دست می‌آید:

$$\frac{\pi}{۱۲}t_۱=\pi-\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۱۲}t_۱=\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow t_۱=۸\,s$$

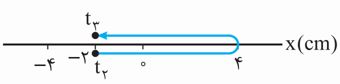
از حل دومین جواب معادلهٔ بالا $t_۲$ به دست می‌آید:

$$\frac{\pi}{۱۲}t_۲=\pi+\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۱۲}t_۲=\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow t_۲=۱۶\,s$$

بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ برابر است با:

$$\Delta t=t_۲-t_۱=۱۶-۸=۸\,s$$

گام دوم: حالت دیگری هم ممکن است پیش بیاید. نوسانگر مطابق شکل (ب) در جهت محور مکان جابه‌جا شود و پس از تغییر جهت در مکان $x=+۴\,cm$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود. در این صورت، بازهٔ زمانی دو عبور متوالی از مکان $x=-۲\,cm$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد. $t_۳$ سومین لحظه‌ای است که $x=-۲\,cm$ می‌شود. برای محاسبهٔ آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:



(ب)

$$x=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۱۲}t \Rightarrow -۰/۰۲=۰/۰۴\cos\frac{\pi}{۱۲}t \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۱۲}t=-\frac{۱}{۲}$$

جواب معادلهٔ بالا در حالت کلی به صورت $(۲n-۱)\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ است که به ازای $n=۱$، اولین و دومین لحظهٔ عبور نوسانگر از مکان $x=-۲\,cm$ و به ازای $n=۲$، سومین و چهارمین لحظهٔ عبور نوسانگر از همین مکان به دست می‌آید.

$$\frac{\pi}{۱۲}t_۳=۳\pi-\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۱۲}t_۳=\frac{۸\pi}{۳} \Rightarrow t_۳=۳۲\,s$$

بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ برابر است با:

$$\Delta t'=t_۳-t_۲=۳۲-۱۶=۱۶\,s$$

تیزباش با توجه به شکل‌های (الف) و (ب) نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$ یک نوسان کامل انجام می‌دهد. پس این بازهٔ زمانی یک دوره طول می‌کشد.

$$\omega=\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow T=۲۴\,s\Rightarrow\Delta t'=T-\Delta t=۲۴-۸=۱۶\,s$$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t}=\frac{۱۶}{۸}=۲$$

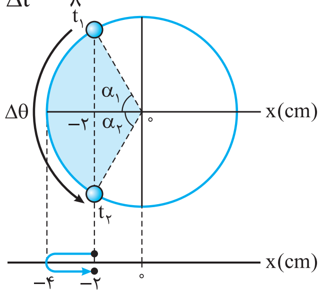
گام سوم: براساس محاسبات انجام‌شده در گام‌های قبلی داریم:

راه‌حل دوم (استفاده از دایرهٔ مرجع): **گام اول**: وقتی نوسانگر مطابق شکل (الف) جابه‌جا شود، نقطهٔ مرجع مطابق شکل (پ) حرکت می‌کند. براساس شکل، داریم:

$$x_۱=-A\cos\alpha_۱\Rightarrow-۲=-۴\cos\alpha_۱$$

$$\Rightarrow\cos\alpha_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha_۱=\frac{\pi}{۳}\,rad\xrightarrow{(x_۲=x_۱)}\alpha_۲=\alpha_۱=\frac{\pi}{۳}\,rad$$

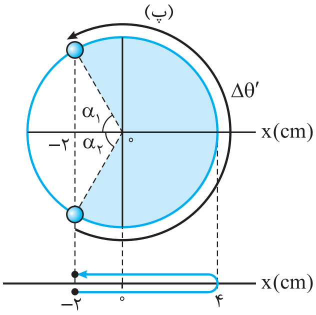
$$\Delta\theta=\alpha_۱+\alpha_۲=\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}\,rad$$



(پ)

گام دوم: وقتی نوسانگر مطابق شکل (ب) جابه‌جا می‌شود، نقطهٔ مرجع مطابق شکل (ت) دوران می‌کند. با توجه به شکل می‌نویسیم:

$$\Delta\theta'=۲\pi-\alpha_۱-\alpha_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}\,rad$$



(ت)

گام سوم: زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع در شکل (ت) دو برابر زاویهٔ طی‌شده در شکل (پ) است. زمان جابه‌جایی آن هم همین‌طور!

$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{\Delta\theta'}{\Delta\theta}=\frac{\Delta t'}{\Delta t}\Rightarrow\frac{\frac{۴\pi}{۳}}{\frac{۲\pi}{۳}}=\frac{\Delta t'}{\Delta t}\Rightarrow\frac{\Delta t'}{\Delta t}=۲$$

۷۴۷- گزینه ۱ **راه‌حل اول**: نوسانگر در مبدأ زمان در مکان $x=+۱۰\,cm$ قرار دارد:

$$x_۰=۰/۱\cos\frac{\pi}{۴}\times۰=۰/۱\,m=۱۰\,cm$$

حالا اولین لحظهٔ عبور نوسانگر از مکان $x=-۵\sqrt{۳}\,cm$ را حساب می‌کنیم:

$$x=-۵\sqrt{۳}\times۱۰^{-۲}\,m\Rightarrow-۵\sqrt{۳}\times۱۰^{-۲}=۱۰^{-۱}\cos\frac{\pi}{۴}t\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۴}t=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{۴}t=\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\frac{\pi}{۴}t=\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow t=\frac{۱۰}{۳}\,s$$

$$\Delta t=t-t_۰=\frac{۱۰}{۳}-۰=\frac{۱۰}{۳}\,s$$

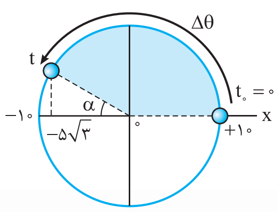
راه‌حل دوم: دامنهٔ حرکت نوسانگر برابر است با:

$$A=۰/۱\,m=۱۰\,cm$$

در مکان $x=-۵\sqrt{۳}\,cm$:

$$x=-A\cos\alpha\Rightarrow-۵\sqrt{۳}=-۱۰\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۶}\,rad$$

با توجه به شکل، زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع برابر است با:



$$\Delta\theta=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۵\pi}{۶}\,rad$$

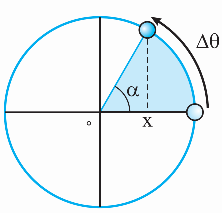
$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{۵\pi}{۶}=\frac{\pi}{۴}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{۱۰}{۳}\,s$$

۷۴۸- گزینه ۲ **راه‌حل اول**: با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t$$

$$x=A\cos\frac{۲\pi}{T}t\xrightarrow{(t=\frac{T}{۶})}x=A\cos(\frac{۲\pi}{T}\times\frac{T}{۶})=A\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}A$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): مطابق شکل مقابل، نقطهٔ مرجع در مدت $\Delta t=\frac{T}{۶}$، زاویهٔ $\Delta\theta$ را روی دایرهٔ مرجع طی می‌کند:



$$\Delta\theta=\omega\Delta t=\frac{۲\pi}{T}\times\frac{T}{۶}=\frac{\pi}{۳}\,rad$$

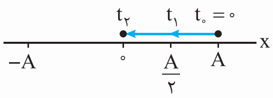
زاویهٔ α برابر $\Delta\theta$ است؛ پس:

$$\alpha=\frac{\pi}{۳}\,rad$$

$$x=A\cos\alpha=A\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}A$$

تیزهوش برای محاسبهٔ سریع $\Delta\theta$، از مورد ۱ درسنامهٔ ۲ استفاده کن! θ در مدت T به اندازهٔ $2\pi\ rad$ و در مدت $\frac{T}{6}$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}\ rad$ تغییر می‌کند.

۷۴۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول:** لحظه‌هایی را که نوسانگر برای اولین بار از مکان‌های $x_1=\frac{A}{2}$ و $x_2=0$ عبور می‌کند، به ترتیب با t_1 و t_2 نشان می‌دهیم.



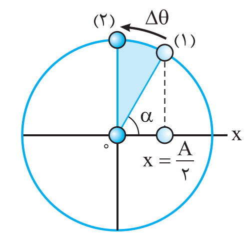
$$x_1=A\cos\omega t_1 \Rightarrow \frac{A}{2}=A\cos\omega t_1 \Rightarrow \cos\omega t_1=\frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_1=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1=\frac{T}{6}$$

$$x_2=A\cos\omega t_2 \Rightarrow 0=A\cos\omega t_2 \Rightarrow \cos\omega t_2=0 \Rightarrow \omega t_2=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2=\frac{T}{4}$$

ما بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را می‌خواهیم:

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{T}{4}-\frac{T}{6}=\frac{3T-2T}{12}=\frac{T}{12}$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): دایرهٔ مرجع رو بکش و ببین نقطهٔ مرجع چه زاویه‌ای رو طی کرده. در مکان $x=\frac{A}{2}$، نقطهٔ مرجع زاویهٔ $\alpha=\frac{\pi}{3}\ rad$ رو با محور x می‌سازه:



$$x=A\cos\alpha \Rightarrow \frac{A}{2}=A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}\ rad$$

نقطهٔ مرجع در جابه‌جایی از $x=\frac{A}{2}$ تا $x=0$ زاویهٔ $\Delta\theta$ رو طی می‌کنه:

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\ rad$$

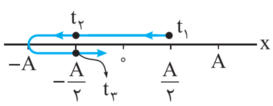
نقطهٔ مرجع زاویهٔ $2\pi\ rad$ رو در مدت T طی می‌کند؛ زاویهٔ $\frac{\pi}{6}\ rad$ رو در چه مدت؟

$$2\pi\equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{6}\equiv\frac{T}{12}$$

این‌جوری هم می‌توانستید به جواب برسید:

$$\Delta\theta=\omega\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\times\Delta t \Rightarrow \Delta t=\frac{T}{12}$$

۷۵۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول:** فرض کنید ذره از مکان $+A$ شروع به حرکت می‌کند و در لحظهٔ t_1 برای اولین بار از مکان $x_1=\frac{A}{2}$ و در لحظه‌های t_2 و t_3 برای اولین و دومین بار از مکان $x_2=-\frac{A}{2}$ عبور می‌کند.



$$x_1=A\cos\omega t_1 \Rightarrow \frac{A}{2}=A\cos\omega t_1 \Rightarrow \cos\omega t_1=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1=\frac{T}{6}$$

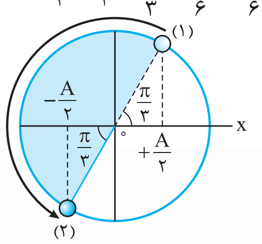
$$x_2=A\cos\omega t_2 \Rightarrow -\frac{A}{2}=A\cos\omega t_2 \Rightarrow \cos\omega t_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_2=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_2=\frac{T}{3}$$

t_2 اولین لحظه‌ای است که ذره از مکان $x=-\frac{A}{2}$ عبور می‌کند. در این لحظه سرعت ذره منفی است. پس t_2 را بی‌جهت حساب کردیم! (ما حساب کردیم که به شما بگیم حساب نکنید!) t_3 دومین لحظه‌ای است که ذره از مکان $x=-\frac{A}{2}$ عبور می‌کند. در این لحظه سرعت ذره مثبت است:

$$x=A\cos\omega t_3 \Rightarrow -\frac{A}{2}=A\cos\omega t_3 \Rightarrow \cos\omega t_3=-\frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_3=\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_3=\frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_3=\frac{2T}{3}$$

$$\Delta t=t_3-t_1=\frac{2T}{3}-\frac{T}{6}=\frac{3T}{6}=\frac{T}{2}$$

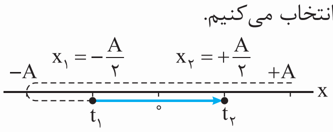
راه‌حل‌دوم (دایرهٔ مرجع): $+\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ ما رو یاد $\alpha=\frac{\pi}{3}\ rad$ و دارودسته‌اش می‌اندازه!



ابتدا ذره در مکان مثبت و سرعت آن منفی است؛ پس نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ اول و در موقعیت (۱) قرار دارد. نقطهٔ مرجع پس از این‌که نیمی از دایرهٔ مرجع را طی می‌کند، در موقعیت (۲) قرار می‌گیرد (مکان ذره، منفی و سرعت آن مثبت می‌شود). نقطهٔ مرجع کل دایره را در مدت T طی می‌کند؛ نصف دایره را در چه مدت؟

$$2\pi\equiv T \Rightarrow \pi\equiv\frac{T}{2}$$

۷۵۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول:** باز هم فرض می‌کنیم ذره از مکان $x=+A$ شروع به حرکت کرده است. اگر ذره بخواهد بدون تغییر جهت از مکان $x_1=-\frac{A}{2}$ به مکان $x_2=+\frac{A}{2}$ منتقل شود، باید مطابق شکل زیر (مسیر توپر) جابه‌جا شود. t_1 دومین لحظه‌ای است که ذره از مکان $x_1=-\frac{A}{2}$ و t_2 دومین لحظه‌ای است که ذره از مکان $x_2=+\frac{A}{2}$ عبور می‌کند. بنابراین، برای تعیین t_1 و t_2 دومین پاسخ قابل‌قبول برای آن‌ها را انتخاب می‌کنیم.



$$x_1=A\cos\omega t_1 \Rightarrow -\frac{A}{2}=A\cos\omega t_1 \Rightarrow \cos\omega t_1=-\frac{1}{2}$$

اولین پاسخ معادلهٔ بالا $\omega t_۱ = \pi - \frac{\pi}{۳}$ و دومین پاسخ آن $\omega t_۱ = \pi + \frac{\pi}{۳}$ است که دومی را می‌پذیریم:

$$\frac{۲\pi}{T}t_۱ = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow t_۱ = \frac{۲T}{۳}$$

$$x_۲ = A\cos\omega t_۲ \Rightarrow \frac{A}{۲} = A\cos\omega t_۲ \Rightarrow \cos\omega t_۲ = \frac{۱}{۲}$$

اولین پاسخ معادلهٔ بالا $\omega t_۲ = \frac{\pi}{۳}$ و دومین پاسخ آن $\omega t_۲ = ۲\pi - \frac{\pi}{۳}$ است که دومی را قبول می‌کنیم:

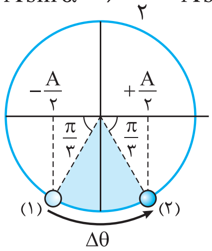
$$\frac{۲\pi}{T}t_۲ = \frac{۵\pi}{۳} \Rightarrow t_۲ = \frac{۵T}{۶}$$

$$t_۲ - t_۱ = ۰/۵ \Rightarrow \frac{۵T}{۶} - \frac{۲T}{۳} = ۰/۵ \Rightarrow \frac{T}{۶} = ۰/۵ \Rightarrow T = ۳\,s \Rightarrow f = \frac{۱}{T} = \frac{۱}{۳}\,Hz$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): زاویه‌ای که نقطهٔ مرجع با محور افقی در هر دو حالت می‌سازد $\frac{\pi}{۳}\,rad$ است.

$$x = A\sin\alpha \Rightarrow \frac{A}{۲} = A\sin\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}\,rad$$

شکل روبه‌رو نحوهٔ حرکت نقطهٔ مرجع را در جابه‌جایی از $x_۱ = -\frac{A}{۲}$ تا $x_۲ = \frac{A}{۲}$ نشان می‌دهد. براساس شکل:



$$\Delta\theta = \pi - (\frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}) = \frac{\pi}{۳}\,rad$$

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \frac{۲\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{T} \times ۰/۵ \Rightarrow T = ۳\,s \Rightarrow f = \frac{۱}{T} = \frac{۱}{۳}\,Hz$$

۷۵۲- گزینه ۲ **راه‌حل اول:** نوسانگر فاصلهٔ CM و MC را در یک مدت طی می‌کند. پس راحت‌ترین زمان جابه‌جایی جسم از M تا C را حساب کنیم. فرض می‌کنیم جسم از M شروع به حرکت می‌کند و در لحظهٔ t از نقطهٔ C عبور می‌کند.

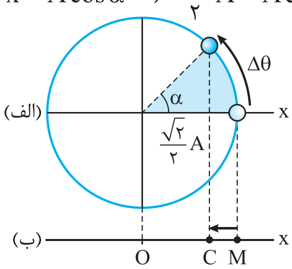
$$x = A\cos\omega t$$

$$x_C = \frac{\sqrt{۲}}{۲}A \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}A = A\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow t = \frac{T}{۸}$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): با دیدن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یاد $\frac{\pi}{۴}\,rad$ نمی‌افتی؟!

$$x = A\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}A = A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴}\,rad$$

شکل روبه‌رو نحوهٔ حرکت جسم روی محور مکان (شکل ب) و حرکت نقطهٔ مرجع روی دایرهٔ مرجع (شکل الف) را نشان می‌دهد. با توجه به شکل:



$$\Delta\theta = \alpha = \frac{\pi}{۴}\,rad$$

زمان لازم برای این‌که θ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}\,rad$ تغییر کند، $\frac{T}{۸}$ است:

$$۲\pi \equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{۴} \equiv \frac{T}{۸}$$

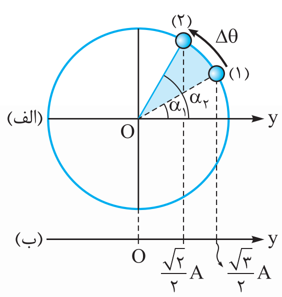
۷۵۳- گزینه ۱ **راه‌حل اول:** زمان جابه‌جایی از $y_۱$ تا $y_۲$ (بدون تغییر جهت) با زمان جابه‌جایی از $y_۲$ تا $y_۱$ (بدون تغییر جهت) برابر است. فرض می‌کنیم ذره از مبدأ زمان از $y = +A$ شروع به حرکت کند و در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ به ترتیب از مکان‌های $y_۱ = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و $y_۲ = +\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ عبور کند. در این صورت:

$$y_۱ = A\cos\omega t_۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}A = A\cos\omega t_۱ \Rightarrow \cos\omega t_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۱ = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow t_۱ = \frac{T}{۱۲}$$

$$y_۲ = A\cos\omega t_۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}A = A\cos\omega t_۲ \Rightarrow \cos\omega t_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۲ = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow t_۲ = \frac{T}{۸}$$

$$\Delta t = t_۲ - t_۱ = \frac{T}{۸} - \frac{T}{۱۲} = \frac{T}{۲۴}$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): با دیدن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یاد $\frac{\pi}{۶}\,rad$ و با دیدن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یاد $\frac{\pi}{۴}\,rad$ می‌افتیم!



$$y_۱ = A\cos\alpha_۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}A = A\cos\alpha_۱ \Rightarrow \cos\alpha_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \alpha_۱ = \frac{\pi}{۶}\,rad$$

$$y_۲ = A\cos\alpha_۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}A = A\cos\alpha_۲ \Rightarrow \cos\alpha_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \alpha_۲ = \frac{\pi}{۴}\,rad$$

پس زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع در مدت جابه‌جایی از مکان $y_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ به $y_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ برابر است با:

$$\Delta\theta = \alpha_۲ - \alpha_۱ = \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۳\pi - ۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۱۲}\,rad$$

$۲\pi\,rad$ در مدت T و $\frac{\pi}{۱۲}\,rad$ در مدت $\frac{T}{۲۴}$ طی می‌کنه:

$$۲\pi \equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{۱۲} \equiv \frac{T}{۲۴}$$

۷۵۴- گزینه «۱» **راه‌حل اول:** با این فرض که نوسانگر در مبدأ زمان از مکان $x=+A$ به حرکت درآمده باشد، لحظه‌های عبور متوالی نوسانگر از مکان $x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ را به دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اولین جواب معادلهٔ بالا اولین لحظهٔ عبور متحرک از مکان $x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ را نشان می‌دهد:

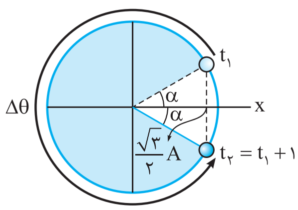
$$\omega t_1=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1=\frac{T}{12}$$

دومین جواب معادلهٔ بالا دومین لحظهٔ عبور متحرک از مکان $x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ را نشان می‌دهد:

$$\omega t_2=2\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_2=\frac{11T}{12}$$

$$\Delta t=t_2-t_1=1\,s \Rightarrow \frac{11T}{12}-\frac{T}{12}=1 \Rightarrow \frac{5T}{6}=1 \Rightarrow T=\frac{6}{5}=1/2\,s$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): نوسانگر در لحظهٔ t_1 در مکان مثبت و در حال نزدیک‌شدن به مبدأ است. پس نقطهٔ مرجع در این لحظه در ناحیهٔ اول قرار دارد و برای رسیدن نوسانگر به مکان اولیه‌اش، باید مسیر طولانی نشان داده شده در شکل روبه‌رو طی شود:



$$x=A\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}\,rad$$

$$\Delta\theta=\omega\Delta t \Rightarrow 2\pi-2\alpha=\frac{2\pi}{T}(t_2-t_1) \Rightarrow 2\pi-\frac{2\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\times 1 \Rightarrow T=1/2\,s$$

البته می‌توانستید از هم‌ارزی $2\pi\equiv T$ (تناسب زمان ـ زاویه) استفاده کنید.

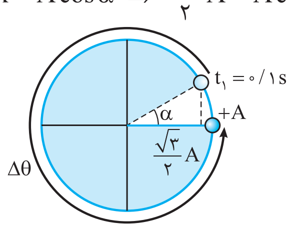
۷۵۵- گزینه «۲» **راه‌حل اول:** در لحظهٔ $t=0/1\,s$، $x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌شود؛ پس:

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\omega\times 0/1 \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}\times 0/1=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0/1\times\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow T=1/2\,s$$

نوسانگر پس از $1/2\,s$ به مکان اولیه‌اش برمی‌گردد؛ بنابراین $1/1\,s$ پس از لحظهٔ $t=0/1\,s$ به جای اولیه‌اش برمی‌گردد.

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): در لحظهٔ $t_1=0/1\,s$ که نوسانگر از مکان $x=+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ عبور می‌کند، نقطهٔ مرجع زاویهٔ $\alpha=\frac{\pi}{6}\,rad$ را با محور مکان می‌سازد.

$$x=A\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}\,rad$$

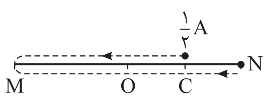


با توجه به شکل روبه‌رو، نقطهٔ مرجع باید زاویهٔ $\Delta\theta=\frac{11\pi}{6}\,rad$ را طی کند تا در مکان $x=+A$ قرار بگیرد.

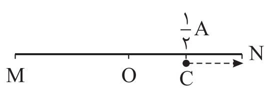
$$\Delta\theta=2\pi-\alpha \Rightarrow 2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

نقطهٔ مرجع زاویهٔ $\alpha=\frac{\pi}{6}\,rad$ را در مدت $0/1\,s$ طی می‌کند، پس زاویهٔ $\Delta\theta=\frac{11\pi}{6}\,rad$ را در مدت $1/1\,s$ (یعنی $11\times 0/1\,s$) طی می‌کند.

۷۵۶- گزینه «۲» **راه‌حل اول: گام اول:** فرض می‌کنیم نوسانگر از نقطهٔ N شروع به حرکت کرده و در لحظهٔ t_1 برای اولین بار و در لحظهٔ t_2 برای دومین بار از نقطهٔ C عبور می‌کند.



(الف)



(ب)

$$x_C=A\cos\omega t \Rightarrow \frac{1}{2}A=A\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t=\frac{1}{2}$$

اولین جواب معادلهٔ بالا، t_1 و دومین جواب این معادله t_2 را مشخص می‌کند.

$$\omega t_1=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1=\frac{T}{6}$$

$$\omega t_2=2\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{5\pi}{3} \Rightarrow t_2=\frac{5T}{6}$$

گام دوم: زمان جابه‌جایی نوسانگر از نقطهٔ C تا N در صورتی حداکثر است که نوسانگر مطابق شکل (الف) جابه‌جا شده باشد و در صورتی حداقل است که نوسانگر مطابق شکل (ب) حرکت کرده باشد. با توجه به این‌که نوسانگر پس از مدت T یک نوسان کامل انجام می‌دهد و به مکان اولیه‌اش (نقطهٔ N) می‌رسد،

زمان جابه‌جایی بین دو نقطهٔ C و N در شکل (الف) برابر است با:

$$\Delta t_1=t_N-t_C=T-t_1=T-\frac{T}{6}=5\frac{T}{6}$$

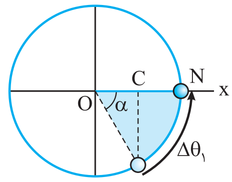
زمان جابه‌جایی بین دو نقطهٔ C و N در شکل (ب) برابر است با:

$$\Delta t_2=t_N-t_C=T-t_2=T-\frac{5T}{6}=\frac{T}{6}$$

بنابراین:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{5\frac{T}{6}}{\frac{T}{6}} \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{2}=5 \Rightarrow \Delta t_1=10\,s$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): اگر نوسانگر بدون تغییر جهت از C به N جابه‌جا شود، نقطهٔ مرجع مطابق شکل (پ) و اگر نوسانگر پس از یک بار تغییر جهت از C تا N جابه‌جا شود، نقطهٔ مرجع مطابق شکل (ت) دوران می‌کند. وقتی جسم از نقطهٔ C رد می‌شود، نقطهٔ مرجع زاویهٔ $\alpha=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$ را با محور تقارن می‌سازد.

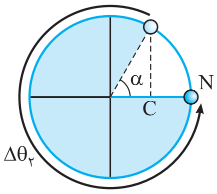


(پ)

$$x_C = A\cos\alpha \Rightarrow \frac{۱}{۲}A = A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

بنابراین، زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع در شکل (پ) برابر است با:

$$\Delta\theta_۱=\alpha=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$



(ت)

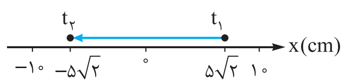
و در شکل (ت):

$$\Delta\theta_۲ = ۲\pi-\alpha = ۲\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}\,\text{rad}$$

$\Delta\theta_۲$، ۵ برابر $\Delta\theta_۱$ است، پس زمان جابه‌جایی نوسانگر در شکل (ت) ۵ برابر زمان جابه‌جایی نوسانگر در شکل (پ) است:

$$\Delta t_۲ = ۵\Delta t_۱ = ۵\times ۲ = ۱۰\,\text{s}$$

۷۵۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول**: فرض کنید متحرک از مکان $x=+۱۰\,\text{cm}$ شروع به حرکت کرده و در لحظهٔ $t_۱$ برای اولین بار از مکان $x_۱=+۵\sqrt{۲}\,\text{cm}$ و در لحظهٔ $t_۲$ برای اولین بار از مکان $x_۲=-۵\sqrt{۲}\,\text{cm}$ عبور می‌کند.



در این صورت:

$$x_۱ = A\cos\omega t_۱ \Rightarrow ۵\sqrt{۲}=۱۰\cos\omega t_۱ \Rightarrow \cos\omega t_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \omega t_۱=\frac{\pi}{۴}\,\text{rad} \quad (I)$$

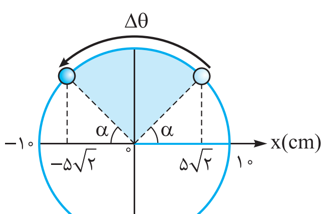
$$x_۲ = A\cos\omega t_۲ \Rightarrow -۵\sqrt{۲}=۱۰\cos\omega t_۲ \Rightarrow \cos\omega t_۲=-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \omega t_۲=\pi-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \omega t_۲=\frac{۳\pi}{۴}\,\text{rad} \quad (II)$$

از مقایسهٔ (I) و (II) نتیجه می‌گیریم:

$$\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \omega(t_۲-t_۱)=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \omega\times ۲=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{۴}\,\text{rad/s}$$

$$x=A\cos\omega t \xrightarrow{(A=۱۰\,\text{cm}=۰/۱\,\text{m})} x=۰/۱\cos\frac{\pi}{۴}t$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): با توجه به شکل روبه‌رو و اطلاعات عددی تست، داریم:



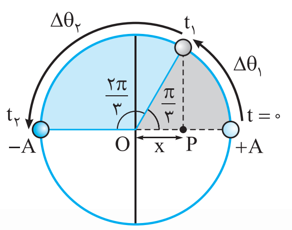
$$x=A\cos\alpha \Rightarrow +۵\sqrt{۲}=۱۰\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۴}\,\text{rad}$$

$$\Delta\theta=\pi-۲\alpha=\pi-۲\times\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\,\text{rad}$$

$$\Delta\theta=\omega\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{۲}=\omega\times ۲ \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{۴}\,\text{rad/s}$$

$$x=A\cos\omega t=۰/۱\cos\frac{\pi}{۴}t$$

۷۵۸- گزینهٔ ۴ اول به قطر افقی شکل روبه‌رو دقت کنید. گفته شده فاصلهٔ نقطهٔ P از یک نقطهٔ بازگشت (مثلاً $-A$) سه برابر فاصله‌اش از نقطهٔ بازگشت دیگر (مثلاً $+A$) است. با توجه به شکل، فاصلهٔ نقطهٔ P از نقطهٔ $-A$ برابر $A+x$ و از نقطهٔ $+A$ برابر $A-x$ است. بنابراین:



$$A+x=۳(A-x) \Rightarrow A+x=۳A-۳x \Rightarrow ۴x=۲A \Rightarrow x=\frac{A}{۲}$$

حالا سراغ معادلهٔ نوسان می‌رویم:

$$x=A\cos\theta \Rightarrow \frac{A}{۲}=A\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۰<\theta<\frac{\pi}{۲}\,\text{rad})} \theta=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

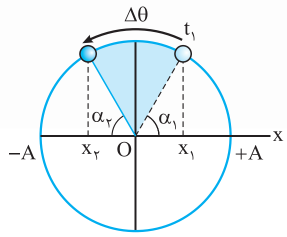
پس با توجه به شکل، نوسانگر در مدت $t_۱$ از $+A$ تا P می‌رود و نقطهٔ مرجع روی دایره از زاویهٔ صفر به $\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$ می‌رسد. در مدت $t_۲$ نوسانگر از P به نقطهٔ بازگشت $-A$ می‌رود و نقطهٔ مرجع روی دایره از $\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$ به $\pi\,\text{rad}$ می‌رسد.

$$\Delta\theta=\omega t \xrightarrow{(\omega:\text{ثابت})} \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱}=\frac{t_۲}{t_۱} \Rightarrow \frac{\pi-\frac{\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۳}-۰}=\frac{t_۲}{t_۱} \Rightarrow \frac{t_۲}{t_۱}=\frac{\frac{۲\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۳}}=۲$$

۷۵۹- گزینهٔ ۴ نقطهٔ مرجع در مدت $\Delta t=\frac{T}{۶}$ به اندازهٔ $\Delta\theta=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$ دوران می‌کند: $\Delta\theta=\omega\Delta t=\frac{۲\pi}{T}\times\frac{T}{۶}=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$

برای این‌که جابه‌جایی نوسانگر در مدت فوق بیشینه باشد، باید سرعت متوسط آن در این مدت بیشینه باشد و این اتفاق در صورتی می‌افتد که نوسانگر حول مرکز نوسان (که سرعتش بیشینه است) جابه‌جا شود، طوری که نیمی از زمان Δt را در مکان‌های منفی و نیم دیگر را در مکان‌های مثبت جابه‌جا شود. (چرا؟)

در این صورت براساس شکل زیر، داریم:



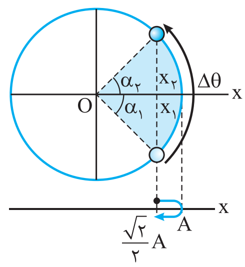
$$\alpha_۲=\alpha_۱=\frac{\pi-\Delta\theta}{۲}=\frac{\pi-\frac{\pi}{۳}}{۲}=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

$$x_۱=A\cos\alpha_۱=A\cos\frac{\pi}{۳}=A\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}A$$

$$x_۲=-A\cos\alpha_۲=-A\cos\frac{\pi}{۳}=-A\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}A$$

$$\Delta x=x_۲-x_۱=-\frac{۱}{۲}A-\frac{۱}{۲}A=-A\ \Rightarrow\ |\Delta x|=A$$

۷۶۰- گزینهٔ ۲ به روش مشابه با تست قبلی، معلوم می‌شود زمانی مسافت طی‌شده توسط نوسانگر کمینه است که نوسانگر حول یک انتهای مسیر (که سرعت متوسط در آن کمینه است) جابه‌جا شود؛ به گونه‌ای که نیمی از زمان را با سرعت مثبت و نیم دیگر را با سرعت منفی طی کند. (چرا؟) با توجه به این‌که نقطهٔ مرجع در مدت $\Delta t=\frac{T}{۴}$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}\,\text{rad}$ دوران می‌کند، داریم:



$$\alpha_۲=\alpha_۱=\frac{\Delta\theta}{۲}=\frac{\pi}{۴}\,\text{rad}$$

$$x_۱=x_۲=A\cos\alpha_۱=A\cos\frac{\pi}{۴}=A\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\xrightarrow{(\sqrt{۲}=۱/۴)}x_۲=x_۱=۰/۷\,A$$

نوسانگر فاصلهٔ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ تا A را طی و همین مسیر را برمی‌گردد. بنابراین، مسافت طی‌شده توسط نوسانگر برابر است با: $l=۲(A-۰/۷A)=۲\times۰/۳A=۰/۶\,A$

۷۶۱- گزینهٔ ۴ آیا این جمله را به یاد دارید؟ **نوسانگر در هر دوره، مسافتی به اندازهٔ ۴A را طی می‌کند.** (اگر به یاد ندارید، به نتیجهٔ ۳ درس‌نامهٔ ۲ مراجعه کنید تا یادتان بیاید!)

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{T}\ \Rightarrow\ T=۴\,s$$

خب؛ دورهٔ حرکت نوسانگر هم ۴ s است؛ مسافت طی‌شده توسط نوسانگر در این مدت برابر است با:

$$l=۴A=۴\times۲=۸\,m$$

۷۶۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول:** معادلهٔ حرکت نوسانگر را تعیین می‌کنیم:

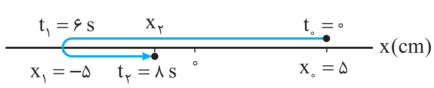
$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۱۲}\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{۶}\,\text{rad/s}$$

$$A=۵\,cm\ \Rightarrow\ x(cm)=A\cos\omega t=۵\cos\frac{\pi}{۶}t$$

مکان نوسانگر در لحظهٔ $t_۲=۸\,s$ برابر است با:

$$x_۲=۵\cos\frac{\pi}{۶}\times۸=۵\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-۵\cos\frac{\pi}{۳}=-۵\times\frac{۱}{۲}=-۲/۵\,cm$$

با توجه به شکل روبه‌رو مسافت طی‌شده توسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۰=۰$ تا $t_۲=۸\,s$ برابر است با:



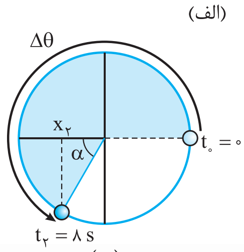
(الف)

$$l=|x_۱-x_۰|+(x_۲-x_۱)=|-۵-۵|+[-۲/۵-(-۵)]=۱۰+۲/۵=۱۲/۵\,cm$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): زاویه‌ای که نقطهٔ مرجع در بازهٔ زمانی $t_۰=۰$ تا $t=۸\,s$ طی می‌کند برابر است با:

$$\Delta\theta=\omega\Delta t=\frac{۲\pi}{T}(t-t_۰)=\frac{۲\pi}{۱۲}\times۸=\frac{۴\pi}{۳}\,\text{rad}$$

شکل (ب) نحوهٔ حرکت نقطهٔ مرجع را نشان می‌دهد:



(ب)

$$\Delta\theta=\pi+\alpha\ \Rightarrow\ \frac{۴\pi}{۳}=\pi+\alpha\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

مکان جسم در لحظهٔ $t_۲=۸\,s$:

$$x_۲=-A\cos\alpha=-۵\cos\frac{\pi}{۳}=-۵\times\frac{۱}{۲}=-۲/۵\,cm$$

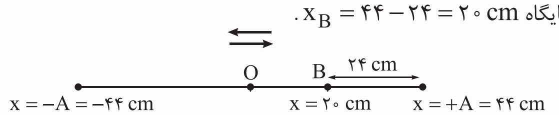
بقیه‌اش مثل راه‌حل اوله!

۷۶۳- گزینهٔ ۱ **گام اول:** $x=A\cos\omega t=۰/۴۴\cos\omega t\ \Rightarrow\ A=۰/۴۴\,m=۴۴\,cm$

گام دوم: مطابق شکل، نوسانگر حرکت خود را از مکان $x=A=۴۴\,cm$ آغاز می‌کند و در هر ناحیه از نوسان، مسافتی به اندازهٔ دامنه (۴۴ cm) را طی می‌کند. صحبت از مسافت ۲ متر شده و:

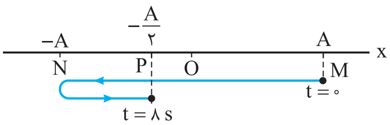
$$(\text{ناحیهٔ طی‌شده } n)=\frac{۲}{۰/۴۴}=\frac{۲۰۰}{۴۴}=۴\frac{۲۴}{۴۴}$$

پس زمانی که متحرک مسافت ۲ m را طی می‌کند، ۴ ناحیهٔ نوسانی به همراه ۲۴ cm دیگر را پشت سر می‌گذرد، یعنی یک نوسان کامل و رسیدن دوباره به نقطهٔ بازگشت +A و سپس ۲۴ cm دیگر به سمت A و قرارگرفتن در نقطهٔ B، در جایگاه $x_B=۴۴-۲۴=۲۰\,cm$.



خب؛ ساده شد: متحرک در لحظه‌های $t=\frac{T}{۴}$ و $t=\frac{۳T}{۴}$ یعنی ۲ بار از نقطهٔ تعادل می‌گذرد؛ در لحظه‌های $t=۰$ و $t=T$ از نقطهٔ بازگشت $+A$ و در لحظهٔ $t=\frac{T}{۲}$ از نقطهٔ بازگشت $-A$ می‌گذرد و در مجموع، ۳ بار از نقطه‌های بازگشت عبور می‌کند و دیدید که در پایان در $x_B=۲۰\,cm$ قرار می‌گیرد.

۷۶۴- گزینه ۲ **راه‌حل اول:** مطابق شکل زیر، نوسانگر از نقطهٔ M شروع به نوسان روی پاره‌خط MN می‌کند و پس از پیمودن مسافت $۲/۵A$ در نقطهٔ P قرار می‌گیرد:

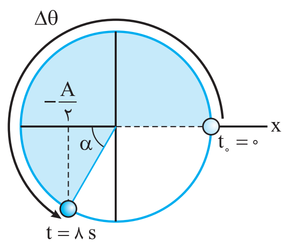


$$x_P=-\frac{A}{۲} \Rightarrow A\cos\omega t_P=-\frac{A}{۲} \Rightarrow \cos\omega t_P=-\frac{۱}{۲}$$

اولین جواب معادلهٔ بالا $\omega t_P=\pi-\frac{\pi}{۳}$ است که به ازای آن اولین لحظهٔ عبور نوسانگر از نقطهٔ P به دست می‌آید. دومین جواب معادلهٔ بالا با دومین لحظهٔ عبور نوسانگر از نقطهٔ P (یعنی $t_P=۸\,s$) متناظر است:

$$\omega t_P=\pi+\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \omega\times ۸=\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow T=۱۲\,s$$

راه‌حل دوم (استفاده از دایرهٔ مرجع): شکل روبه‌رو، نحوهٔ حرکت نقطهٔ مرجع را در بازهٔ زمانی $t_\circ=۰$ تا $t=۸\,s$ نشان می‌دهد. نوسانگر در لحظهٔ $t=۸\,s$ از مکان $x=-\frac{A}{۲}$ عبور می‌کند. ضریب A (یعنی $\frac{۱}{۲}$) شما رو یاد کسینوس چه زاویه‌ای می‌اندازد؟



بله! $\frac{\pi}{۳}\,rad$:

$$x=-A\cos\alpha \Rightarrow -\frac{A}{۲}=-A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۳}\,rad$$

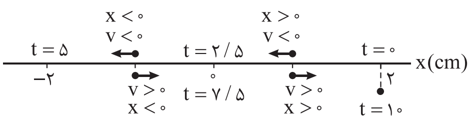
پس زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع در ۸ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با: $\Delta\theta=\pi+\alpha=\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}\,rad$

$$\Delta\theta=\omega\Delta t \Rightarrow \frac{۴\pi}{۳}=(\frac{۲\pi}{T})\times ۸ \Rightarrow T=۱۲\,s$$

۷۶۵- گزینه ۲ دورهٔ حرکت نوسانگر برابر است با:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{\pi}{۵}=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T=۱۰\,s$$

یعنی نوسانگر پس از ۱۰ s برمی‌گردد در سر جای اولیه‌اش. همان‌طور که شکل روبه‌رو نشان می‌دهد در بازهٔ زمانی $t=۲/۵\,s$ تا $t=۵\,s$ سرعت و مکان نوسانگر، هر دو منفی و در بازهٔ زمانی $t=۷/۵\,s$ تا $t=۱۰\,s$ سرعت و مکان نوسانگر هر دو مثبت است. پس در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۸\,s$، به مدت ۳ s سرعت و مکان نوسانگر هم‌جهت‌اند:



$$\Delta t=(۵-۲/۵)+(۸-۷/۵)=۲/۵+۰/۵=۳\,s$$

۷۶۶- گزینه ۲ سرعت نوسانگر در دو انتهای مسیر صفر می‌شود و سپس تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، جهت حرکت نوسانگر در دو انتهای مسیر $(x=\pm A)$ عوض می‌شود. پس باید حساب کنیم نوسانگر در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۰/۰۸\,s$ چند بار از مکان $x=+A$ یا $x=-A$ عبور می‌کند:

$$x=A\cos ۴۰\pi t=\pm A \Rightarrow \cos ۴۰\pi t=\pm ۱ \Rightarrow ۴۰\pi t=n\pi \quad (n=۱,۲,...)$$

(توجه بفرمایید که به ازای $n=۰$، $t=۰$ می‌شود. در مبدأ زمان نوسانگر در مکان $x=+A$ قرار دارد، اما از حال سکون به حرکت درمی‌آید و تغییر جهت نمی‌دهد. به همین دلیل $n\ge ۱$ انتخاب شد.)

$$\Rightarrow \begin{cases} n=۱ \Rightarrow ۴۰\pi t=\pi \Rightarrow t=\frac{۱}{۴۰}\,s \ \checkmark \\ n=۲ \Rightarrow ۴۰\pi t=۲\pi \Rightarrow t=\frac{۲}{۴۰}\,s \ \checkmark \\ n=۳ \Rightarrow ۴۰\pi t=۳\pi \Rightarrow t=\frac{۳}{۴۰}\,s \ \checkmark \\ n=۴ \Rightarrow ۴۰\pi t=۴\pi \Rightarrow t=\frac{۱}{۱۰}\,s \ \times \ (\text{در این حالت } t>\frac{۸}{۱۰۰}\,s \text{ است.}) \end{cases}$$

تیزباش: از آن‌جا که قرار است $۰<t<۰/۰۸\,s$ باشد، می‌توان نوشت:

$$۰<۴۰\pi t<۴۰\pi\times ۰/۰۸$$

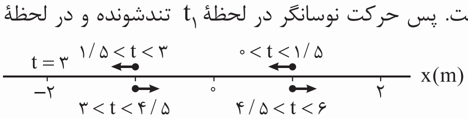
$$۰<۴۰\pi t<۳/۲\pi \xrightarrow{(۴۰\pi t=n\pi)} ۰<n\pi<۳/۲\pi \Rightarrow ۰<n<۳/۲$$

n باید عددی صحیح در بازهٔ ۰ تا ۳/۲ باشد؛ یعنی n می‌تواند یکی از مقادیر صحیح ۱، ۲ و ۳ باشد و جهت حرکت نوسانگر ۳ بار تغییر می‌کند.

۷۶۷- گزینه ۲ باید تشخیص دهیم نوسانگر در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ کجا است. اگر از مرکز دور شود، حرکت آن کندشونده و اگر به مرکز نزدیک شود، حرکت آن تندشونده است. دورهٔ حرکت نوسانگر ۶ s است:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T=۶\,s$$

با توجه به این‌که حرکت نوسانگر از یک انتهای مسیر تا مرکز $\frac{T}{۴}=۱/۵\,s$ طول می‌کشد نحوهٔ حرکت نوسانگر مطابق شکل زیر است. با توجه به شکل نوسانگر در لحظهٔ $t_۱=۱\,s$ در حال نزدیک‌شدن و در لحظهٔ $t_۲=۵\,s$ در حال دورشدن از مرکز نوسان است. پس حرکت نوسانگر در لحظهٔ $t_۱$ تندشونده و در لحظهٔ $t_۲$ کندشونده است.



تیزباش با تشخیص جایگاه نقطهٔ مرجع، می‌توان مکان نوسانگر رو تشخیص بدی.

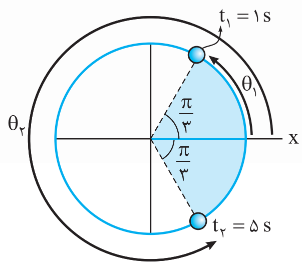
در لحظهٔ $t_1 = 1\,s$:

$$\theta = \frac{\pi}{3}t \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3}\times 1 = \frac{\pi}{3}\,rad$$

و در لحظهٔ $t_2 = 5\,s$:

$$\theta = \frac{\pi}{3}t \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3}\times 5 = \frac{5\pi}{3}\,rad$$

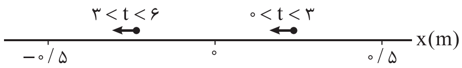
شکل روبه‌رو نشون می‌ده نقطهٔ مرجع در لحظهٔ t_1 در ناحیهٔ اول و در لحظهٔ t_2 در ناحیهٔ چهارم است. حرکت نوسانگر در ناحیهٔ اول تندشونده و در ناحیهٔ چهارم کندشونده است.



۷۶۸- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب نوسانگر $12\,s$ است:

$$\omega = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = 12\,s$$

نوسانگر $\frac{T}{4}$ اول حرکت (یعنی از لحظهٔ $t=0$ تا $t=3\,s$) به مرکز نوسان نزدیک و در $\frac{T}{4}$ دوم (از لحظهٔ $t=3\,s$ تا $t=6\,s$) از مرکز نوسان دور می‌شود. پس نوسانگر در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=4\,s$ به مدت $3\,s$ تندشونده حرکت می‌کند.



۷۶۹- گزینهٔ ۳ نوسانگر پس از یک دوره دوباره به مکان اولیه‌اش $(x = +A)$ برمی‌گردد و جابه‌جایی و سرعت متوسط آن برای اولین بار صفر می‌شود. پس $T = 1\,s$ است و:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,rad/s$$

۷۷۰- گزینهٔ ۴ اول معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر را برحسب دامنهٔ حرکت آن می‌نویسیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}\,rad/s \Rightarrow x = A\cos\omega t = A\cos\frac{\pi}{6}t$$

مسافت طی‌شده توسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=1\,s$ را با l و مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $t=1\,s$ تا $t=3\,s$ را با l' نشان می‌دهیم. متحرک تا لحظهٔ $t=6\,s$ (یعنی $\frac{T}{2}$) تغییر جهت نمی‌دهد و مسافت طی‌شده توسط نوسانگر هم‌اندازه با جابه‌جایی آن است.

$$t_0 = 0:\ x_0 = A\cos\frac{\pi}{6}\times 0 = A$$

$$t_1 = 1\,s:\ x_1 = A\cos\frac{\pi}{6}\times 1 = A\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

$$t_2 = 3\,s:\ x_2 = A\cos\frac{\pi}{6}\times 3 = A\times 0 = 0$$

$$l = |x_1 - x_0| = |\frac{\sqrt{3}}{2}A - A| = \frac{2-\sqrt{3}}{2}A \Rightarrow s_{av} = \frac{l}{t_1 - t_0} \xrightarrow{(t_1 - t_0 = 1\,s)} s_{av} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}A$$

$$l' = |x_2 - x_1| = |0 - \frac{\sqrt{3}}{2}A| = \frac{\sqrt{3}}{2}A \Rightarrow s'_{av} = \frac{l'}{t_2 - t_1} \xrightarrow{(t_2 - t_1 = 2\,s)} s'_{av} = \frac{\sqrt{3}}{4}A$$

$$\frac{s_{av}}{s'_{av}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}A}{\frac{\sqrt{3}}{4}A} = \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$$

۷۷۱- گزینهٔ ۱ **گام اول:** با توجه به معادلهٔ حرکت نوسانگر فاصله‌های MM' و ON' را به دست می‌آوریم:

$$x = 0/05\cos\frac{\pi}{6}t \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = 12\,s$$

نقطهٔ M: $t_M = 0 \Rightarrow x_M = +A = 0/05\,m$

نقطهٔ M': $t_{M'} = 2\,s \Rightarrow x_{M'} = 0/05\cos\frac{\pi}{6}t_{M'} = 0/05\cos(\frac{\pi}{6}\times 2) = 0/05\times\frac{1}{2} = 0/025\,m$

فاصلهٔ MM': $l_1 = |x_{M'} - x_M| = |0/025 - 0/05| = 0/025\,m$

نقطهٔ O: $t_O = \frac{T}{4} = \frac{12}{4} = 3\,s \Rightarrow x_O = 0$

نقطهٔ N': $t_{N'} = t_O + 1 = 3 + 1 = 4\,s \Rightarrow x_{N'} = 0/05\cos(\frac{\pi}{6}\times 4) = 0/05(-\frac{1}{2}) = -0/025\,m$

(فاصلهٔ ON') $l_2 = |x_{N'} - x_O| = |-0/025 - 0| = 0/025\,m$

گام دوم: حالا می‌توان تندی متوسط نوسانگر در فواصل MM' و ON' و در پایان خواستهٔ تست یعنی نسبت این دو را به دست آورد:

$$s_۱ = \frac{l_۱}{\Delta t_۱} = \frac{۰/۰۲۵}{۲}\ m/s$$

$$s_۲ = \frac{l_۲}{\Delta t_۲} = \frac{۰/۰۲۵}{۱}\ m/s$$

$$\frac{s_۱}{s_۲} = \frac{۱}{۲}$$

۷۷۲- **گزینه ۱** **راه‌حل اول**: با این فرض که نوسانگر از مکان $x = +۱۰\ cm$ شروع به حرکت کرده باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان آن را تعیین می‌کنیم:

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۰/۱۲} = \frac{۵۰\pi}{۳}\ rad/s$$

$$x = A\cos\omega t \Rightarrow x(cm) = ۱۰\cos\frac{۵۰\pi}{۳}t$$

اولین لحظه‌ای را که نوسانگر از مکان $x_۱ = ۵\ cm$ عبور می‌کند با $t_۱$ و اولین لحظه‌ای را که نوسانگر از مکان $x_۲ = -۵\ cm$ عبور می‌کند با $t_۲$ نشان می‌دهیم.

$$x_۱ = ۱۰\cos\frac{۵۰\pi}{۳}t_۱ \Rightarrow ۵ = ۱۰\cos\frac{۵۰\pi}{۳}t_۱ \Rightarrow \cos\frac{۵۰\pi}{۳}t_۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۵۰\pi}{۳}t_۱ = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۵۰}\ s$$

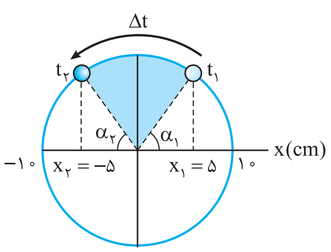
$$x_۲ = ۱۰\cos\frac{۵۰\pi}{۳}t_۲ \Rightarrow -۵ = ۱۰\cos\frac{۵۰\pi}{۳}t_۲ \Rightarrow \cos\frac{۵۰\pi}{۳}t_۲ = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۵۰\pi}{۳}t_۲ = \pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۵۰\pi}{۳}t_۲ = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow t_۲ = \frac{۲}{۵۰}\ s$$

$$v_{av} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۵-۵}{\frac{۲}{۵۰} - \frac{۱}{۵۰}} = \frac{-۱۰}{\frac{۱}{۵۰}} = -۵۰۰\ cm/s = -۵\ m/s$$

چون نوسانگر تغییر جهت نداده، تندی متوسط آن هم‌اندازه با سرعت متوسطش است:

$$s_{av} = |v_{av}| = ۵\ m/s$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): در حل تست‌ها به کمک دایرهٔ مرجع باید زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع را معلوم کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



$$x_۱ = A\cos\alpha_۱ \Rightarrow ۵ = ۱۰\cos\alpha_۱ \Rightarrow \cos\alpha_۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha_۱ = \frac{\pi}{۳}\ rad$$

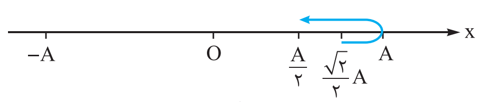
$$x_۲ = -A\cos\alpha_۲ \Rightarrow -۵ = -۱۰\cos\alpha_۲ \Rightarrow \cos\alpha_۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha_۲ = \frac{\pi}{۳}\ rad$$

$$\Delta\theta = \pi - \alpha_۱ - \alpha_۲ = \pi - \frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}\ rad$$

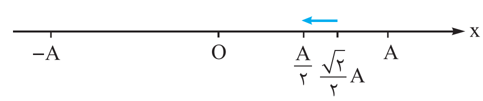
$$۲\pi \equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{۳} \equiv \frac{T}{۶} \Rightarrow t_۲ - t_۱ = \frac{T}{۶} = \frac{۰/۱۲}{۶} = ۰/۰۲\ s$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۵-۵}{۰/۰۲} = -۵۰۰\ cm/s \Rightarrow |v_{av}| = ۵\ m/s \Rightarrow s_{av} = ۵\ m/s$$

۷۷۳- **گزینه ۴** **راه‌حل اول**: سرعت متوسط یک جسم در هنگام جابه‌جایی بین دو نقطه زمانی بیشینه است که نوسانگر فاصلهٔ آن دو نقطه را در کم‌ترین زمان ممکن طی کند. شکل‌های (الف) و (ب) دو روش انتقال نوسانگر از مکان $x_۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ به $x_۲ = \frac{۱}{۲}A$ را نشان می‌دهد. واضح است که مسیر (ب) در زمان کم‌تری طی می‌شود. با این فرض که نوسانگر از مکان $x = +A$ به حرکت درآمده $t_۱$ و $t_۲$ را حساب می‌کنیم.



(الف)



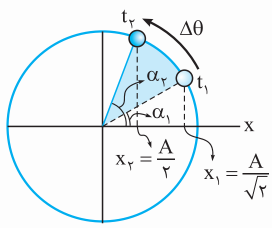
(ب)

$$x_۱ = A\cos\omega t_۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}A = A\cos\frac{۲\pi}{T}t_۱ \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۱ = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow t_۱ = \frac{T}{۸}$$

$$x_۲ = A\cos\omega t_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}A = A\cos\frac{۲\pi}{T}t_۲ \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۲ = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow t_۲ = \frac{T}{۶}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{۱}{۲}A - \frac{\sqrt{۲}}{۲}A}{\frac{T}{۶} - \frac{T}{۸}} = \frac{(\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲})A}{\frac{T}{۲۴}} = ۱۲(۱-\sqrt{۲})\frac{A}{T} \Rightarrow |v_{av}| = ۱۲(\sqrt{۲}-۱)\frac{A}{T}$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): باز هم باید ببینید نقطهٔ مرجع در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ چه زاویه‌ای را طی می‌کند. با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



$$x_۱=A\cos\alpha_۱ \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{۲}}=A\cos\alpha_۱ \Rightarrow \cos\alpha_۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \alpha_۱=\frac{\pi}{۴}\,\text{rad}$$

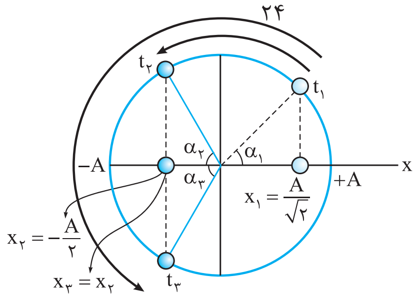
$$x_۲=A\cos\alpha_۲ \Rightarrow \frac{A}{۲}=A\cos\alpha_۲ \Rightarrow \cos\alpha_۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha_۲=\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

$$\Delta\theta=\alpha_۲-\alpha_۱=\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۱۲}\,\text{rad}$$

$$۲\pi\equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{۱۲}\equiv\frac{T}{۲۴}$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{\Delta t}=\frac{\frac{A}{۲}-\frac{A}{\sqrt{۲}}}{\frac{T}{۲۴}}=\frac{۱۲(۱-\sqrt{۲})A}{T} \Rightarrow |v_{av}|=۱۲(\sqrt{۲}-۱)\frac{A}{T}$$

۷۷۴- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $t_۱<t_۲<T$، حرکت نوسانگر در اولین دوره (T) مورد پرسش است. با توجه به شکل:



در لحظهٔ $t_۱$:

$$x_۱=A\cos\theta_۱ \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{۲}}=A\cos\theta_۱$$

$$\Rightarrow \cos\theta_۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta_۱=\alpha_۱=\frac{\pi}{۴}\,\text{rad}$$

در لحظهٔ $t_۲$:

$$x_۲=A\cos\theta_۲ \Rightarrow -\frac{A}{۲}=A\cos\theta_۲ \Rightarrow \cos\theta_۲=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{(در ناحیهٔ دوم است.} \ \theta_۲)} \theta_۲=\pi-\alpha_۲=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}\,\text{rad}$$

در لحظهٔ $t_۳$:

$$x_۳=A\cos\theta_۳ \xrightarrow{(x_۳=x_۲)} -\frac{A}{۲}=A\cos\theta_۳ \Rightarrow \cos\theta_۳=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{(در ناحیهٔ سوم است.} \ \theta_۳)} \theta_۳=\pi+\alpha_۲=\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}\,\text{rad}$$

پس یا نقطهٔ مرجع از وضعیت (۱) در لحظهٔ $t_۱$ به وضعیت (۲) در لحظهٔ $t_۲$ رفته یا از وضعیت (۱) در لحظهٔ $t_۱$ به وضعیت (۳) در لحظهٔ $t_۳$ رسیده است. هر چه نوسانگر به مرکز تعادل نزدیک‌تر باشد، تندی‌های لحظه‌ای و تندی متوسط آن بیشتر و هر چه از مرکز تعادل دورتر شود، تندی‌های لحظه‌ای و تندی متوسط آن کم‌تر می‌شود. (به تندشونده یا کندشونده بودن حرکت در ناحیه‌های نوسانی دقت کنید.)

در ضمن، توجه کنید که چون $t_۱<t_۲$ است، ناحیهٔ چهارم را برای $x_۱$ در نظر نگرفتیم. از آن‌جا که کم‌ترین تندی متوسط خواسته‌شده، پاسخ مربوط به جابه‌جایی نقطهٔ مرجع از وضعیت (۱) به وضعیت (۳) می‌باشد:

$$\Delta\theta=\omega\Delta t \Rightarrow \theta_۳-\theta_۱=\frac{۲\pi}{T}(t_۳-t_۱) \Rightarrow \frac{۴\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}=\frac{۲\pi}{T}(t_۳-t_۱)$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{T}(t_۳-t_۱)=\frac{۱۶\pi-۳\pi}{۱۲}=\frac{۱۳\pi}{۱۲} \Rightarrow t_۳-t_۱=\frac{۱۳T}{۲۴} \quad (I)$$

در جابه‌جایی نقطهٔ مرجع از وضعیت (۱) به (۳)، نوسانگر از نقطهٔ $x_۱$ (در ناحیهٔ اول) به نقطهٔ تعادل و سپس به سمت نقطهٔ بازگشت $-A$ می‌رود (انتهای ناحیهٔ دوم) و سپس از آن‌جا به نقطهٔ $x_۳$ می‌رسد (ناحیهٔ سوم). مسافت طی‌شده توسط نوسانگر در این بازهٔ زمانی را به دست می‌آوریم:

$$l_{۱۳}=x_۱+|-A|+|x_۳-(-A)|=\frac{A}{\sqrt{۲}}+A+|-\frac{A}{۲}+A|=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A+A+\frac{A}{۲}=\frac{(\sqrt{۲}+۳)A}{۲} \quad (II)$$

پاسخ نهایی تست برابر است با:

$$(s_{av})_{min}=\frac{l_{۱۳}}{t_۳-t_۱} \xrightarrow[(I)]{(II)} (s_{av})_{min}=\frac{\frac{(\sqrt{۲}+۳)A}{۲}}{\frac{۱۳T}{۲۴}}=\frac{۱۲}{۱۳}(\sqrt{۲}+۳)(\frac{A}{T})$$

برای تمرین بیشتر، خودتان نشان دهید که ۱ بیشترین تندی متوسط و ۲ کم‌ترین اندازهٔ سرعت متوسط را نشان می‌دهد.

۷۷۵- گزینهٔ ۲ **گام اول**: با توجه به داده‌های تست، مکان نقطه‌های A، B و C را به دست می‌آوریم:

$$x_A=OA=۱\,\text{cm} \quad , \quad x_B=x_A+AB=۱+(\sqrt{۳}-۱)=\sqrt{۳}\,\text{cm}$$

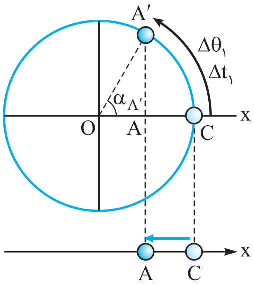
$$x_C=x_B+BC=\sqrt{۳}+(۲-\sqrt{۳}) \xrightarrow[\text{(دامنهٔ نوسان A است.)}]{(x_C=A)} A=۲\,\text{cm}$$

گام دوم: مطابق شکل (الف)، هنگامی که نوسانگر بدون تغییر جهت از C به A می‌رسد، نقطهٔ مرجع روی دایره از C به A' می‌رود. با توجه به مکان A:

$$x_A = A\cos\alpha_{A'} \Rightarrow ۱ = ۲\cos\alpha'_A \Rightarrow \cos\alpha_{A'} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha_{A'} = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

متحرک این حرکت را در زمان Δt طی می‌کند:

$$\omega = \frac{\Delta\theta_۱}{\Delta t_۱} = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_۱}{۲\pi} = \frac{\Delta t_۱}{T} \xrightarrow[(T=\frac{۱}{f}=۳\,s)]{(\Delta\theta_۱=\alpha_{A'}=\frac{\pi}{۳}\,rad)} \frac{\frac{\pi}{۳}}{۲\pi} = \frac{\Delta t_۱}{۳} \Rightarrow \Delta t_۱ = \frac{۱}{۲}\,s$$

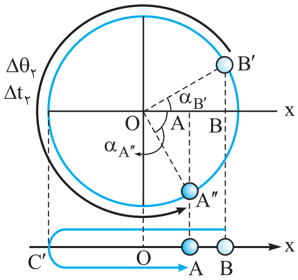


(الف)

تندی متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$s_{av(۱)} = \frac{l_۱}{\Delta t_۱} = \frac{|x_A - x_C|}{\Delta t_۱} = \frac{|۱-۲|}{\frac{۱}{۲}} = ۲\,m/s$$

گام سوم: با توجه به شکل (ب)، هنگامی که نوسانگر تندشونده از B عبور کرده و پس از یک بار تغییر جهت به A می‌رسد (یعنی از B به C' می‌رود و سپس تا A برمی‌گردد)، نقطهٔ مرجع روی دایره از B' به A'' می‌رسد.



(ب)

با توجه به مکان نقطه‌های B و A:

$$x_B = A\cos\alpha_{B'} \Rightarrow \sqrt{۳} = ۲\cos\alpha_{B'} \Rightarrow \cos\alpha_{B'} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \alpha_{B'} = \frac{\pi}{۶}\,\text{rad}$$

$$x_A = A\cos\theta_{A''} \Rightarrow ۱ = ۲\cos\alpha_{A''} \Rightarrow \cos\alpha_{A''} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha_{A''} = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

این حرکت در مدت $\Delta t_۲ = \frac{۳T}{۴}$ انجام می‌شود:

$$\omega = \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta t_۲} = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_۲}{۲\pi} = \frac{\Delta t_۲}{T} \xrightarrow[(T=\frac{۱}{f}=۳\,s)]{(\Delta\theta_۲=۲\pi-\alpha_{B'}-\alpha_{A''}=۲\pi-\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۳}=\frac{۳\pi}{۲}\,rad)} \frac{\frac{۳\pi}{۲}}{۲\pi} = \frac{\Delta t_۲}{۳} \Rightarrow \Delta t_۲ = \frac{۹}{۴}\,s$$

تندی متوسط متحرک در این بازه:

$$s_{av(۲)} = \frac{l_۲}{\Delta t_۲} = \frac{|BC'|+|C'A|}{\Delta t_۲} = \frac{(x_B+A)+(A+x_A)}{\Delta t_۲} = \frac{x_A+x_B+۲A}{\Delta t_۲} = \frac{(۱+\sqrt{۳}+۲\times۲)}{\frac{۹}{۴}} = \frac{۴(\sqrt{۳}+۵)}{۹}\,m/s$$

گام چهارم: خواستهٔ تست:

$$\Delta s_{av} = s_{av(۲)} - s_{av(۱)} = \frac{۴(\sqrt{۳}+۵)}{۹} - ۲ = \frac{(۴\sqrt{۳}+۲۰)-۱۸}{۹} = \frac{۴\sqrt{۳}+۲}{۹} = \frac{۲(۲\sqrt{۳}+۱)}{۹}\,m/s$$

۷۷۶- گزینهٔ ۴ *روی‌هم‌رفته، تست خوبی است!!* اول باید ببینیم نوسانگر در مدت $\Delta t = ۰/۰۱\,s$، حداکثر چند متر می‌تواند جابه‌جا شود. قبول دارید $\Delta t = \frac{T}{۲}$ است؟ این رو هم قبول دارید که نوسانگر در مدت $\frac{T}{۲}$، می‌تواند بیشترین جابه‌جایی ممکن (۲A) را داشته باشد و آن زمانی است که نوسانگر از یک انتهای مسیر، بدون تغییر جهت به انتهای دیگر کوچ می‌کند! پس می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{max} = ۲A = ۲\times۵ = ۱۰\,cm = ۰/۱\,m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av(max)} = \frac{\Delta x_{max}}{\Delta t} = \frac{۰/۱}{۰/۰۱} = ۱۰\,m/s$$

لذا، هر سه عدد عنوان‌شده در ۱، ۲ و ۳، می‌توانند بیانگر بزرگی سرعت متوسط نوسانگر باشند.

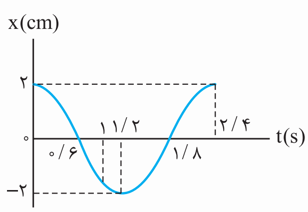
۷۷۷- گزینهٔ ۱ بازهٔ زمانی بین دو عبور متوالی نوسانگر از مرکز نوسان (مکان $x=۰$) برابر نصف دوره $(\frac{T}{۲})$ است.

$$\Delta t = ۱۰^{-۲}\,s \Rightarrow \frac{T}{۲} = ۱۰^{-۲} \Rightarrow T = ۲\times۱۰^{-۲}\,s \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۲\times۱۰^{-۲}} = ۱۰۰\pi\,rad/s$$

$$A = ۱\,m \Rightarrow x = A\cos\omega t = \cos ۱۰۰\pi t$$

۷۷۸- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل روبه‌رو، نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۰ = ۰$ تا $t_۱ = ۰/۶\,s$ به سمت مبدأ حرکت می‌کند ($|x|$ کاهش می‌یابد) و در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰/۶\,s$ تا $t_۲ = ۱\,s$ از مبدأ دور می‌شود ($|x|$ افزایش می‌یابد). بنابراین، در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ حرکت نوسانگر به صورت کندشونده است:

$$\Delta t = t_۲ - t_۱ = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴\,s$$



۷۷۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول:** در لحظهٔ $t_۱$ برای اولین بار از مکان $x = ۲\,cm$ عبور می‌کند. بنابراین داریم:

$$x = A\cos\omega t = ۴\cos\omega t \Rightarrow ۲ = ۴\cos\omega t_۱ \Rightarrow \cos\omega t_۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۱ = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow t_۱ = \frac{T}{۶}$$

t_2 را لازم نیست حساب کنیم، معلومه که ربع دوره‌س!

$$t_2=\frac{T}{4}$$

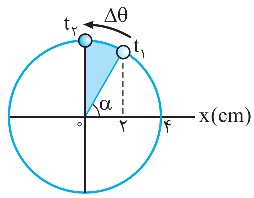
$$t_2-t_1=0/1 \Rightarrow \frac{T}{4}-\frac{T}{6}=0/1 \Rightarrow \frac{T}{12}=0/1 \Rightarrow T=1/2\,s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1/2}=\frac{5\pi}{3}\,rad/s$$

$$x=A\cos\omega t \xrightarrow{(A=4\,cm=0/04\,m)} x=0/04\cos\frac{5\pi}{3}t$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): باید ببینیم در زمان داده‌شده $(t_2-t_1=0/1\,s)$ چه زاویه‌ای طی‌شده، در لحظهٔ t_1 نوسانگر در مکان $x=2\,cm$ قرار دارد. یعنی در مکان $x=\frac{1}{2}A$ است. با دیدن $\frac{1}{2}$ یاد کسینوس چه زاویه‌ای می‌افتید؟ بله! $\alpha=\frac{\pi}{3}\,rad$. به عبارت دیگر:

$$x=A\cos\alpha \Rightarrow 2=4\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}\,rad$$

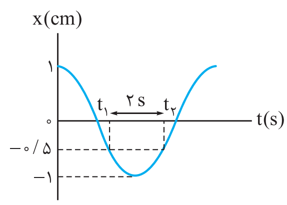


بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو زاویهٔ طی‌شده توسط نقطهٔ مرجع برابر است با:

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\,rad$$

$$\Delta\theta=\omega\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{6}=\omega\times 0/1 \Rightarrow \omega=\frac{5\pi}{3}\,rad/s \Rightarrow x=A\cos\omega t=0/04\cos\frac{5\pi}{3}t$$

۷۸۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول:** با توجه به نمودار روبه‌رو، نوسانگر در لحظهٔ t_1 برای اولین بار و در لحظهٔ t_2 برای دومین بار از مکان $x=-0/5\,cm$ عبور می‌کند. پس:

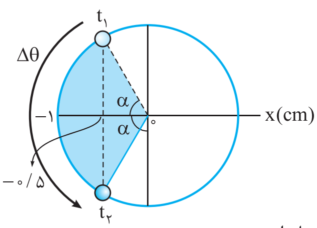


$$x=-0/5\,cm \Rightarrow -0/5=1\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}\omega t_1=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1=\frac{T}{3}\\ \omega t_2=\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_2=\frac{2T}{3}\end{cases}$$

$$t_2-t_1=2\,s \Rightarrow \frac{2T}{3}-\frac{T}{3}=2 \Rightarrow \frac{T}{3}=2 \Rightarrow T=6\,s \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\,rad/s$$

$$x=A\cos\omega t \xrightarrow{(A=1\,cm=10^{-2}\,m)} x=10^{-2}\cos\frac{\pi}{3}t$$

راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): در لحظه‌های t_1 و t_2 موقعیت نقطهٔ مرجع را مشخص می‌کنیم. براساس شکل روبه‌رو:



$$x_1=-A\cos\alpha \Rightarrow -0/5=-1\times\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}\,rad$$

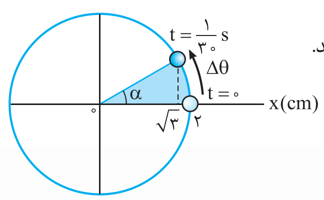
$$\Delta\theta=2\alpha=\frac{2\pi}{3}\,rad$$

$$\Delta\theta=\omega\Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3}=\omega\times 2 \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{3}\,rad/s \Rightarrow x=A\cos\omega t=10^{-2}\cos\frac{\pi}{3}t$$

۷۸۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول:** نوسانگر در لحظهٔ $t=\frac{1}{30}\,s$ برای اولین بار از مکان $x=\sqrt{3}\,cm$ عبور می‌کند. بنابراین:

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow \sqrt{3}=2\cos\omega\times\frac{1}{30} \Rightarrow \cos\frac{\omega}{30}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\omega}{30}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega=5\pi\,rad/s \Rightarrow \frac{2\pi}{T}=5\pi \Rightarrow T=0/4\,s$$

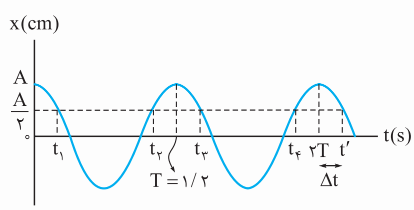
راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع): نقطهٔ مرجع در بازهٔ زمانی $t_0=0$ تا $t=\frac{1}{30}\,s$ مطابق شکل روبه‌رو دوران و زاویهٔ $\Delta\theta$ را طی می‌کند.



$$x=A\cos\alpha \Rightarrow \sqrt{3}=2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}\,rad \Rightarrow \Delta\theta=\alpha=\frac{\pi}{6}\,rad$$

$$\Delta\theta=\omega\Delta t=(\frac{2\pi}{T})\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\times\frac{1}{30} \Rightarrow T=0/4\,s$$

۷۸۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول:** به شکل روبه‌رو نگاه کنید. نوسانگر تا لحظهٔ t' چهار بار دیگر (در لحظه‌های t_1، t_2، t_3 و t_4) از مکان $x=\frac{A}{2}$ عبور می‌کند. پس t' پنجمین لحظه‌ای است که $x=\frac{A}{2}$ می‌شود.



(الف)

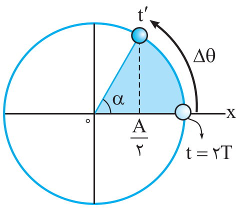
$$x=A\cos\omega t \Rightarrow \frac{A}{2}=A\cos\omega t' \Rightarrow \cos\omega t'=\frac{1}{2}$$

$$\omega t'=\frac{\pi}{3},2\pi-\frac{\pi}{3},2\pi+\frac{\pi}{3},4\pi-\frac{\pi}{3},\underbrace{4\pi+\frac{\pi}{3}}_{\text{۵اُمین جواب}}$$

$$\frac{2\pi}{T}t'=4\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{1/2}t'=\frac{13\pi}{3} \Rightarrow t'=2/6\,s$$

راه‌حل دوم: در مدت T، نمودار مکان ـ زمان نوسانگر از نو تکرار می‌شود. بنابراین، با توجه به شکل (الف) داریم:

$$t' = ۲T + \Delta t = ۲\times ۱/۲ + \Delta t = ۲/۴ + \Delta t \quad (I)$$



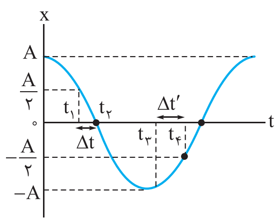
(ب)

نقطهٔ مرجع در بازهٔ زمانی Δt مطابق شکل (ب) جابه‌جا می‌شود و زاویهٔ $\Delta\theta$ را روی دایرهٔ مرجع طی می‌کند.

$$x = A\cos\alpha \Rightarrow \frac{A}{۲} = A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad} \xrightarrow{(\Delta\theta=\alpha)} \Delta\theta = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

نقطهٔ مرجع زاویهٔ $۲\pi\,\text{rad}$ را در مدت T و زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$ را در مدت $\frac{T}{۶}$ طی می‌کند. به عبارت دیگر:

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = (\frac{۲\pi}{T})\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{۳} = (\frac{۲\pi}{T})\times\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{۶} \Rightarrow \Delta t = \frac{۱/۲}{۶} = ۰/۲\,s \xrightarrow{(I)} t' = ۲/۴ + ۰/۲ = ۲/۶\,s$$



۷۸۳- گزینه ۴ **راه‌حل اول:** برای محاسبهٔ فواصل زمانی Δt و $\Delta t'$ لازم است در ابتدا لحظات t_1 تا t_4 در شکل روبه‌رو را به دست آوریم، با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر $(x = A\cos\omega t)$ و محل قرارگیری لحظات t_1 تا t_4 داریم:

$$t_1 \text{ محاسبه}: \frac{A}{۲} = A\cos\omega t_1 \Rightarrow \cos\omega t_1 = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{۶}$$

$$t_2 \text{ تعیین}: t_2 = \frac{T}{۴}$$

$$\Delta t \text{ محاسبه}: \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{۴} - \frac{T}{۶} = \frac{T}{۱۲}$$

$$t_3 \text{ تعیین}: t_3 = \frac{T}{۲}$$

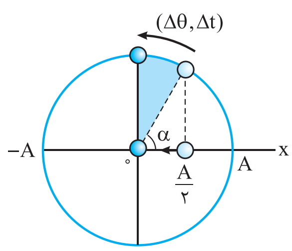
$$t_4 \text{ محاسبه}: -\frac{A}{۲} = A\cos\omega t_4 \Rightarrow \cos\omega t_4 = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \omega t_4 = \pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_4 = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow t_4 = \frac{۲T}{۳}$$

$$\Delta t' \text{ محاسبه}: \Delta t' = t_4 - t_3 = \frac{۲T}{۳} - \frac{T}{۲} = \frac{T}{۶}$$

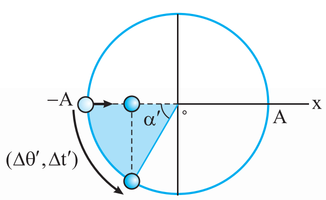
$$\text{خواستهٔ تست}: \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\frac{T}{۶}}{\frac{T}{۱۲}} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

راه‌حل دوم (استفاده از دایرهٔ مرجع): گام اول: شکل (الف) نحوهٔ حرکت نوسانگر و نقطهٔ مرجع را در مدت Δt نشان می‌دهد. $\frac{۱}{۲}$ شما رو یاد کسینوس چه زاویه‌ای می‌اندازه؟ بله! $\alpha = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$. بنابراین زاویه‌ای که نقطهٔ مرجع در جابه‌جایی از $x = \frac{A}{۲}$ تا $x = ۰$ طی می‌کند، برابر است با:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{۲} - \alpha = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۶}\,\text{rad}$$



(الف)



(ب)

گام دوم: نوسانگر در مدت $\Delta t'$ از مکان $x = -A$ به مکان $x = -\frac{A}{۲}$ می‌رود و نقطهٔ مرجع مطابق شکل (ب) زاویهٔ $\Delta\theta'$ را طی می‌کند. $\Delta\theta' = \alpha'$

(باز هم $\frac{۱}{۲}A$ و $\frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$!)

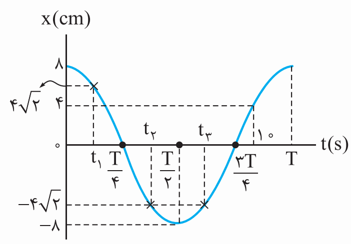
$$x = -A\cos\alpha' \Rightarrow -\frac{A}{۲} = -A\cos\alpha' \Rightarrow \cos\alpha' = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad} \Rightarrow \Delta\theta' = \frac{\pi}{۳}\,\text{rad}$$

گام سوم: براساس رابطهٔ $\Delta\theta = \omega\Delta t$ داریم:

$$\frac{\Delta\theta'}{\Delta\theta} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۶}} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = ۲$$

۷۸۴- گزینهٔ ۲ تست را به صورت تشریحی حل می‌کنیم؛ حل به کمک دایرهٔ مرجع با شما!

گام اول: نوسانگر در مبدأ زمان در بیشینهٔ مکان خود قرار دارد، بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان آن به صورت روبه‌رو است: $x = ۸\cos\omega t$



مطابق شکل، نوسانگر در لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ در مکان $x = +۴\,cm$ (واقع در ربع چهارم) قرار دارد، بنابراین:

$$x = ۸\cos\omega t \Rightarrow ۴ = ۸\cos(\omega\times ۱۰) \Rightarrow \cos ۱۰\omega = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱۰\omega = ۲\pi - \frac{\pi}{۳}$$

$$۱۰\omega = \frac{۵\pi}{۳} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{۶}\,rad/s$$

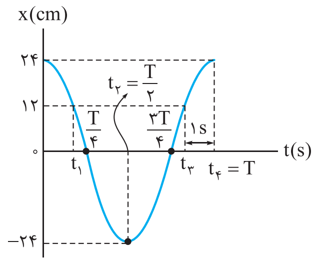
گام دوم: با توجه به شکل بالا، در لحظهٔ $t_۳$ ، فاصلهٔ نوسانگر از مبدأ مکان برای سومین بار $۴\sqrt{۲}\,cm$ می‌شود. $(x = -۴\sqrt{۲}\,cm)$؛ چون این نقطه در ربع سوم قرار دارد، داریم:

$$x = -۴\sqrt{۲} \Rightarrow -۴\sqrt{۲} = ۸\cos\omega t_۳ \Rightarrow \cos\omega t_۳ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \omega t_۳ = \pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$\omega t_۳ = \frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۶}\times t_۳ = \frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow t_۳ = \frac{۳۰}{۴} = ۷/۵\,s$$

۷۸۵- گزینهٔ ۳ تابع کسینوسی مکان ـ زمان به شکل (الف) رسم شده. از شکل صورت تست هم داریم:

$$A - (-A) = ۱۲ + ۳۶ \Rightarrow ۲A = ۴۸ \Rightarrow A = ۲۴\,cm$$



(الف)

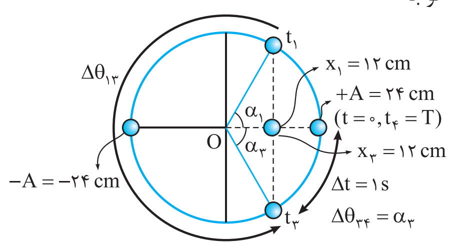
پس با توجه دوباره به شکل صورت تست و شکل (الف)، مکان در لحظهٔ $t_۱$ برابر است با:

$$x_۱ = A - ۱۲ = ۲۴ - ۱۲ = ۱۲\,cm$$

و در لحظه‌های دیگر:

$$x_۰ = x_۴ = ۲۴\,cm\,,\,x_۲ = -A = -۲۴\,cm\,,\,x_۳ = x_۱ = ۱۲\,cm$$

مکان نوسانگر و نقطهٔ مرجع در لحظه‌های داده‌شده در شکل (الف) را در شکل (ب) رسم کرده‌ایم. با توجه به هر دو شکل داریم:



(ب)

$$x_۱ = A\cos\alpha_۱ \Rightarrow ۱۲ = ۲۴\cos\alpha_۱ \Rightarrow \cos\alpha_۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha_۱ = \frac{\pi}{۳}\,rad$$

$$x_۳ = A\cos\alpha_۳ \Rightarrow ۱۲ = ۲۴\cos\alpha_۳ \Rightarrow \cos\alpha_۳ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha_۳ = \frac{\pi}{۳}\,rad$$

اکنون به سراغ اختلاف ۱ ثانیه‌ای $t_۳$ و $t_۴$ می‌رویم:

$$\Delta\theta_{۳۴} = \alpha_۳ = \omega(t_۴ - t_۳) \Rightarrow \frac{\pi}{۳} = \omega\times ۱ \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{۳}\,rad/s$$

$$\Delta\theta_{۱۳} = ۲\pi - \alpha_۱ - \alpha_۳ = ۲\pi - \frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳}\,rad \xrightarrow{(\Delta\theta_{۱۳} = \omega(t_۳ - t_۱))} \frac{۴\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}(t_۳ - t_۱) \Rightarrow t_۳ - t_۱ = ۴\,s$$

از لحظهٔ $t_۱$ تا $t_۳$، متحرک از مکان $x_۱$ به نقطهٔ تعادل (O) و سپس به نقطهٔ بازگشت $-A$ می‌رود و سپس از نقطهٔ بازگشت $-A$ به نقطهٔ O و سپس به $x_۳ = x_۱$ برمی‌گردد. مسافت طی‌شده بین $t_۱$ و $t_۳$ برابر است با:

$$l_{۱۳} = x_۱ + A + A + x_۳ = ۱۲ + ۲۴ + ۲۴ + ۱۲ = ۷۲\,cm$$

تندی متوسط بین $t_۱$ و $t_۳$:

$$s_{av} = \frac{l_{۱۳}}{t_۳ - t_۱} = \frac{۷۲}{۴} = ۱۸\,cm/s$$

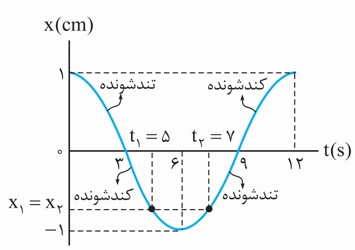
با توجه به برابری $x_۳ = x_۱$، جابه‌جایی و در نتیجه، سرعت متوسط نوسانگر بین $t_۱$ و $t_۳$ صفر است:

$$v_{av} = \frac{x_۳ - x_۱}{t_۳ - t_۱} \xrightarrow[(t_۳ \neq t_۱)]{(x_۳ = x_۱)} v_{av} = ۰$$

۷۸۶- گزینهٔ ۱ **گام اول:** دورهٔ تناوب نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow T = ۱۲\,s$$

گام دوم: بر روی نمودار مکان ـ زمان، ناحیه‌هایی را که حرکت نوسانگر کندشونده یا تندشونده است مشخص می‌کنیم؛ با توجه به نمودار مشخص است که تا لحظهٔ $t_۱ = ۵\,s$، نوسانگر $۳s$ به صورت تندشونده و $۲\,s$ به صورت کندشونده حرکت کرده و بنابراین تا این لحظه، زمانی که نوسانگر به صورت تندشونده حرکت کرده $۱s$ بیشتر از زمانی است که به صورت کندشونده حرکت کرده است و به همین ترتیب تا لحظهٔ $t_۲ = ۷\,s$ نیز نوسانگر $۱s$ بیشتر به صورت تندشونده حرکت کرده است.



گام سوم: برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده توسط نوسانگر بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 کافی است مکان نوسانگر در این لحظات را به دست آوریم:

$$x_1 = (1\,cm)\cos\frac{\pi}{6}t_1 = \cos 5\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$$

$$x_2 = (1\,cm)\cos\frac{\pi}{6}t_2 = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$$

$$l = |-1+\frac{\sqrt{3}}{2}| + |-\frac{\sqrt{3}}{2}+1| = 2(1-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2-\sqrt{3}\,cm$$

۷۸۷- گزینه ۲ **گام اول**: معادلهٔ مکان ـ زمان هر یک از نوسانگرهای A و B را با استفاده از نمودار داده‌شده مشخص می‌کنیم:

$$\frac{T_A}{2} = 2 \Rightarrow T_A = 4\,s \Rightarrow \omega_A = \frac{2\pi}{T_A} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,rad/s$$

$$x_A = A_A\cos\omega_A t \Rightarrow x_A = 3\cos\frac{\pi}{2}t \quad (I)$$

$$\frac{T_B}{4} = 2 \Rightarrow T_B = 8\,s \Rightarrow \omega_B = \frac{2\pi}{T_B} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}\,rad/s$$

$$x_B = A_B\cos\omega_B t \Rightarrow x_B = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t \quad (II)$$

گام دوم: در لحظه‌ای که دو متحرک از کنار یکدیگر عبور می‌کنند، داریم:

$$x_A = x_B \xrightarrow[(II)]{(I)} 3\cos\frac{\pi}{2}t = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t$$

برای به دست آوردن t لازم است تا معادلهٔ مثلثاتی بالا را حل کنیم، ولی به عنوان یک روش بهتر می‌شود گزینه‌های داده‌شده را در معادلهٔ بالا قرار داد که نتیجه خواهیم گرفت $t = \frac{2}{3}\,s$ ۲ درست است.

بحث بیشتر

اما حل معادلهٔ مثلثاتی بالا:

$$3\cos(2\times\frac{\pi}{4}t) = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t \xrightarrow{(\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1)} 3(2\cos^2\frac{\pi}{4}t - 1) = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$\Rightarrow 6\cos^2\frac{\pi}{4}t - \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t - 3 = 0 \xrightarrow{(\cos\frac{\pi}{4}t = x)} 6x^2 - \sqrt{3}x - 3 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4(6)(-3)}}{2\times 6} = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{75}}{12} = \frac{\sqrt{3}\pm 5\sqrt{3}}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

از پاسخ $\cos\frac{\pi}{4}t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ صرف‌نظر می‌کنیم، چون در این صورت $\frac{\pi}{4}t > \frac{\pi}{2}$ و $t > 2\,s$ به دست می‌آید که بزرگ‌تر از پاسخ $t = \frac{2}{3}\,s$ است (ما دنبال اولین لحظهٔ تلاقی دو نوسانگر بودیم.)

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{4}t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{4}t) = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{4}t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2}{3}\,s$$