

به نام پروردگار مهربان

آمار و احتمال پازدهم

آموزش، تمرین و دوره

سید مسعود طایفه

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه



تقدیم به همسر م که همیشه
مشوقم بوده و هست و
همچنین پدر و مادر م بابت یک
عمر دلسوزی شان.

سید مسعود طایفه

سخن نخست

او را یاد

وقتی همسن شما بودم، همیشه توی ذهنم این بود که ریاضی به چه دردمون می‌خوره؟! هر وقت هم که از معلم‌هام می‌پرسیدم، جواب می‌دادند: میری دانشگاه و توکار خودت می‌فهمی، الان هم به درس گوش کن! منم می‌رفتم بدون جواب تو افق‌ها محو می‌شدم! 😊

بعد رفتنم به دانشگاه، بعد از چند ترم که دنبال پاسیه (پاس‌کردنه) درس‌ها بودم، یه نکته جالب رو در مورد ریاضیات فهمیدم، اون هم این بود که پرکاربردترین بخش ریاضی، آمار و احتمال!

فکر کن!! همون درسایی که تو دبیرستان اکثر بچه‌ها باهاش درگیر بودن و یا بهش اهمیتی نمی‌دادن!

بله، شاید باورتون نشه ولی هر جا که عددی هست، آمار و احتمال هم هست! مثل کُنه چسبیده بهت!

هر کاری تو دانشگاه می‌خواهی انجام بدی، تحلیل می‌خواد، پایان‌نامه و مقاله، تحلیل آماری می‌خواد، خلاصه این‌که پاشو از زندگی‌تون بیرون نمی‌کشه!

بعد از فهمیدن اهمیت آمار و احتمال یه چیزه دیگه از اون تو جهم رو جلب کرد، اونم فرّار بودن و متنوع بودنشه، همین هم سختش کرده، چون نیاز به مرور دائمی داره تا روابط، مثال‌ها و راه‌حل‌هاش توی ذهن بمونه! سرتون رو درد نیارم برای خودش سرطانیه!

اما نگران نباشید، این سرطان درمون داره، درمونش هم تو دستتونه! من خیلی دوست داشتم که تحمل این درس رو براتون راحت کنم از اونجا هم که می‌دونم شماها همتون به حافظ شیرازی و شیراز و «چرا

عاقلم کُند کاری؟!» اعتقاد شدید دارید و حال درس خواندن زیاد و ندارید، براتون کاری رو جمع و جور کردیم باقلوا! داستان هم از اون جا شروع شد که شنیدم مهر و ماه کتابایی می‌خواد چاپ کنه که خوردنیه!

اسمش هم لُقمه است، ما هم که از هر چی بگذریم سُخن لُقمه خوشتر است! این شد که این کتاب رو طبخش کردیم و مزه‌دار، تا هم رژیم باشه و هم پُرکالری! تا مغزتون Six – pack بشه! 😊 توی این کتاب سعی شده تا بخش‌های کتاب، توی چند وعده براتون سِرو باشه! هر جا هم احساس کردیم که مطلب اضافی نیاز دارید، به اسم «چاشنی» به وعدتون اضافه کردیم. برید حالشو ببَرید!

تا یادم نرفته باید بگم که این کتاب نتیجه کمک‌ها و حمایت‌های چندتا از عزیزان هم هست. اول باید از استاد خودم، جناب آقای اشرفی، به خاطر راهنمایی و حمایت‌هاشون تشکر کنم. همین‌طور از آقایان اختیاری و انوشه به خاطر اعتمادشون به من سپاسگزاری می‌کنم. از جناب آقای مسعود محترمی یکتا که زحمت صفحه‌آرایی این کتاب رو کشیدن. همچنین از خانم‌ها دنیا سلیمی و سنور حریری که در ویرایش کتاب بسیار تلاش کردند. از همشون ممنونیم.

سید مسعود طایفه

۹۶/۳/۲۹

فهرست

۷	آشنایی با مبانی ریاضیات	فصل ۱
۸۵	احتمال	فصل ۲
۱۲۷	آمار توصیفی	فصل ۳
۱۶۷	آمار استنباطی	فصل ۴
۲۱۷	فرمول‌نامه	پیوست

فصل ۱

آشنایی با مبانی ریاضیات

آشنایی با مبانی ریاضیات

آشنایی با منطق ریاضی

درس اول

- ◀ منطق ریاضی
- ◀ گزاره
- ◀ جدول ارزش گزاره
- ◀ گزاره‌نما
- ◀ ترکیب گزاره‌ها
- ◀ نقیض یک گزاره
- ◀ ترکیب فصلی دو گزاره
- ◀ ترکیب عطفی دو گزاره
- ◀ قوانین دمورگان
- ◀ ترکیب شرطی
- ◀ ترکیب دو شرطی
- ◀ هم‌ارزی‌های مهم
- ◀ سورها
- ◀ نقیض سورها

مجموعه-زیر مجموعه

درس دوم

- ◀ یادآوری
- ◀ دو مجموعه مساوی
- ◀ زیرمجموعه
- ◀ روش عضوگیری دلخواه
- ◀ تعداد زیرمجموعه
- ◀ مجموعه توانی
- ◀ افزایش یک مجموعه

قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه)

درس سوم

- ◀ اجتماع و اشتراک
- ◀ ویژگی‌های اجتماع و اشتراک (قوانین اصلی)
- ◀ ویژگی‌های اجتماع و اشتراک (قوانین فرعی)
- ◀ روش جبر مجموعه‌ها و عضوگیری
- ◀ تفاضل دو مجموعه و ویژگی‌های آن
- ◀ ویژگی‌های تفاضل متقارن
- ◀ حل مسائل تستی جبر مجموعه‌ها
- ◀ روابط مربوط به عدد اصلی مجموعه‌ها (تعداد عضوها)
- ◀ زوج مرتب
- ◀ ضرب دکارتی بین دو مجموعه
- ◀ نمودارهای ضرب دکارتی

آشنایی با منطق ریاضی

وعده ۱



منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادی نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و درستی یا نادرستی یک استدلال را مشخص می‌کند. در این بخش کار ما بسیار شبیه به بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

وعده ۲



گزاره

به محتوای جمله خبری که دارای ارزش درست یا نادرست است، گزاره می‌گوییم. به بیان دیگر جملاتی هستند که یا درست و یا نادرست هستند، یا دست کم درست یا نادرست بودن آن‌ها را می‌توان با داشتن اطلاعات کافی به وضوح مشخص کرد.

چاشنی: ۱ مثلاً جمله «هر گردی که گردو نیست» یک گزاره است، زیرا می‌توان نادرستی آن را با یک مثال نشان داد، اما جملات «عجب گلی میزنه!» یا «چقدر خوبیم ما!» یا «ازدواج بهترین سختی دنیاست!» و ... گزاره به حساب نمی‌آیند.

۲ هر استدلال از تعدادی گزاره تشکیل شده است که یکی از آن‌ها نتیجه استدلال و بقیه، مقدمه‌های استدلال هستند. از مقدمه به نتیجه می‌رسیم.

مثال ۱: کدام یک از جملات زیر گزاره هستند؟

الف) ریاضی شیرین‌ترین درس دنیاست.

از نظر من و بقیه بچه‌های درس‌خوان درسته! 😊
اما درستی یا نادرستی این جمله را به وضوح همیشه تعیین کرد،
پس گزاره نیست.

ب) موسیقی سنتی، قدیمی‌ترین نوع موسیقی در ایران است.

درستی یا نادرستی این جمله را می‌توان با بررسی تاریخ ایران
در زمینه موسیقی تعیین کرد، پس گزاره است.

مثال ۲: نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

(کار در کلاس صفحه ۲)

الف) هر عدد مرکبی، عدد اول نیست.

۴ عددی مرکب است.

نتیجه: ۴ عدد اول نیست.

ب) اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آنگاه مدارس
تعطیل است.

به احتمال زیاد فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم است.

نتیجه: (به احتمال زیاد) فردا مدارس تعطیل است.

چاشنی: ۱ هر گزاره دارای خواص زیر است:

۱) جمله است. ۲) جمله خبری است. ۳) دارای ارزش درستی یا نادرستی است. ۴) فقط دارای یک ارزش است. (درست یا غلط) معمولاً گزاره‌ها را با حروف r, q, p و ... نمایش می‌دهند.

۲ درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

۳ یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. پس عبارتهایی را که در ریاضی نمی‌توانیم به طور قطعی درست یا نادرست بدانیم، گزاره حدسی یا حدس در ریاضیات می‌گوییم.

در تعیین ارزش گزاره حدسی، پیش‌فرض بر نادرست بودن آن است؛ مگر آن‌که دلیلی برای درستی آن پیدا کنیم.

۴ جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند. به‌عنوان مثال:

۱. چه غذای خوشمزه‌ای! (ابراز احساسات)

۲. اینجا مسئول کیست؟ (پرسشی)

۳. لطفاً درس بخوانید. (امری)

مثال ۳: کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ چرا؟

الف) گل سُرخ مکعب کامل است.

گزاره نیست. یک جمله خبری، زمانی گزاره است که ارتباط

معنایی مشخص بین اجزای آن برقرار باشد و به زبان خودمانی، مفهوم و معنی داشته باشد.

ب) هرگز نمیرد آنکه دلش زنده شد به عشق

گزاره نیست. ادبیات اینجا هم دست از سرمون بر نمی‌داره! معنی این جمله به زبان ساده این است که: «کسی که عاشق است، هرگز نمی‌میرد». با توجه به معنی و مفهوم جمله (از نظر عاطفی) درست یا غلط بودن آن قطعی نیست و کاملاً نسبی است.

پ) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت.

بله. این جمله خبری را حتی اگر به عنوان یک حدس ریاضی در نظر بگیریم، می‌توان به عنوان یک گزاره در نظر گرفت.

وعده ۳



جدول ارزش گزاره

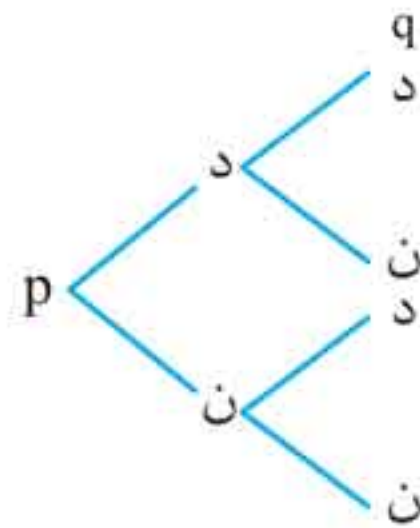
هر گزاره یکی از دو ارزش درست یا غلط را دارد، پس ارزش گزاره P به صورت جدول زیر است:

P
د
ن

برای دو گزاره P و Q در جدول ارزش گزاره چهار حالت وجود دارد، یعنی:

$$2^2 = 4$$

گزاره	گزاره
p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن



د: درست ن: نادرست

مثال ۴: جدول ارزش گزاره‌ها را برای سه گزاره p, q, r

مشخص کنید.

پاسخ با توجه به ۳ گزاره، $۲^۳ = ۸$ حالت در جدول وجود دارد.

پس داریم:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

(هر ردیف، یک حالت ارزش را شامل می‌شود. مانند سه‌تایی

مرتب هم می‌توان آن‌ها را مشخص کرد.)

چاشنی: برای n گزاره، 2^n ردیف یا حالت ارزش در جدول وجود دارد.

وعدۀ ۴
گزاره نما

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود. گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می نامیم. هر کدام از عبارات زیر، یک گزاره نما هستند:

« X عددی اول است.» \Leftarrow اگر به جای X ، ۳ قرار دهیم گزاره می شود.
 $2X + 3 = 5$ \Leftarrow اگر به جای X ، ۵ قرار دهیم گزاره می شود.
 « a عددی فرد است.» \Leftarrow اگر به جای a ، ۱۰ قرار دهیم گزاره می شود.
 «در پرتاب یک تاس، احتمال آن که پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{2}$ است.» \Leftarrow اگر $A = \{1, 2, 3\}$ باشد گزاره می شود.

چاشنی: متغیر، حرف یا علامتی است که می تواند جانشین هر عضو یک مجموعه معین شود. متغیر را با یکی از حروف X, Y, Z و ... نشان می دهیم.

«**دامنه متغیر:** در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که می توان به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره نما تبدیل به گزاره شود، دامنه متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند.

مثال ۵: دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر را تعیین کنید.

الف) « P عددی اول است.»

مجموعه اعداد طبیعی

ب) « $x + \frac{1}{2} = 3$ »

مجموعه اعداد حقیقی

«**مجموعه جواب:** در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$ ».

مثال ۶: دامنه متغیر و مجموعه جواب هر یک از گزاره‌نماهای

زیر را مشخص کنید.

(کار در کلاس، صفحه ۶)

الف) $15x^2 - 7x - 8 = 0$

$D = \mathbb{R}$ ، برای به دست آوردن مجموعه جواب باید معادله را

$S = \{1, -\frac{8}{15}\}$

حل کنیم، پس داریم:

ب) تاس را می‌اندازیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$.

$D = \{1, 2, \dots, 6\}$

$S = \{1\}$ یا $\{2\}$ یا ... یا $\{6\}$

🔍 چاشنی: ۱ روش پیدا کردن دامنه متغیر گزاره‌نما:
الف) اگر گزاره‌نما چند جمله‌ای باشد، دامنه متغیر آن، مجموعه اعداد حقیقی یعنی \mathbb{R} است.

مثلاً دامنه متغیر $5 = 3x^2 + 4$ مجموعه \mathbb{R} است.

ب) اگر گزاره‌نما کسری باشد، دامنه متغیر، \mathbb{R} به جز ریشه‌های مخرج است.

مثلاً دامنه متغیر $1 = \frac{3x+1}{x-1}$ به صورت $D = \mathbb{R} - \{1\}$ است.

پ) اگر گزاره‌نما، رادیکالی با فرجه زوج باشد، دامنه متغیر، اعداد حقیقی‌ای هستند که مقدار عبارت زیر رادیکال را مثبت یا صفر کنند. مثلاً دامنه متغیر $5 = \sqrt{x-1}$ به صورت $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ است.

۲ منظور از پیدا کردن مجموعه جواب گزاره‌نما همان حل گزاره‌نماست که اغلب به صورت معادله، نامعادله، احتمال و ... است.

🏠 مثال ۷: کدام یک از عبارتهای زیر گزاره‌نماست؟ چرا؟
 (دامنه متغیر را اعداد حقیقی در نظر بگیرید.)

الف) $x^2 \geq 0$

با توجه به این که به ازای هر مقدار x ، از اعداد حقیقی، این عبارت درست است، پس ارزش آن با توجه به دامنه متغیر همواره درست است و یک گزاره است و گزاره‌نما نیست.

ب) $X = 0$

با توجه به تمرین‌های کتاب درسی، معادله‌ها، گزاره‌ها، گزاره‌ها به حساب می‌آیند و $X = 0$ هم معادله است.

پ) $X = X$

از عبارت بالا، به یک عبارت همیشه درست می‌رسیم، پس ارزش این عبارت همواره درست بوده و یک گزاره است.

ت) در پرتاب یک تاس سالم، $P(A) = \frac{1}{4}$.

با توجه به این که درستی یا نادرستی عبارت بالا با تغییر پیشامد A تغییر می‌کند، پس ارزش این عبارت به‌طور دقیق مشخص نیست، در نتیجه یک گزاره‌نماست.

وعده ۵

ترکیب گزاره‌ها



◀ **گزاره ساده:** گزاره‌ای است که از یک جمله خبری ساده تشکیل شده باشد. (جمله یک فعل دارد).

◀ **گزاره مرکب:** گزاره مرکب نوعی از گزاره است که از ترکیب دو یا چند گزاره ساده تشکیل می‌شود. گزاره‌های مرکب به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای از گزاره‌های ساده ساخته می‌شوند که عبارت‌اند از:

- ۱ نقیض با علامت " \sim " به معنی «چنین نیست که»
- ۲ عطفی با علامت " \wedge " به معنی «و»
- ۳ فصلی با علامت " \vee " به معنی «یا»
- ۴ شرطی با علامت " \Rightarrow " به معنی «اگر، آن‌گاه»
- ۵ دو شرطی با علامت " \Leftrightarrow " به معنی «اگر، آن‌گاه و بالعکس»



نقیض یک گزاره

نقیض گزاره P را به صورت $\sim P$ می‌نویسیم و آن را «چنین نیست که P » می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره P درست باشد، ارزش $\sim P$ نادرست است و بالعکس. به « \sim » ناقض گفته می‌شود.

چاشنی: ۱ جدول

P	$\sim P$
د	ن
ن	د

ارزش گزاره‌ها برای نقیض یک گزاره به صورت روبه‌رو است:

۲ نقیض فقط روی یک گزاره

اثر می‌کند، در صورتی که رابط‌های دیگر بر دو یا چند گزاره اثر می‌کنند.

مثلاً نقیض گزاره « ۲ عددی اول است» می‌شود:

«چنین نیست که ۲ عددی اول است» یا « ۲ عددی اول نیست.»

۳ دو گزاره هم‌ارزش را گزاره‌های هم‌ارز یا معادل می‌گوییم.

به بیان دیگر P و Q را دو گزاره هم‌ارز می‌گوییم و با $P \equiv Q$ مشخص می‌کنیم. از نظر جدول دو گزاره هم‌ارزند، اگر و تنها اگر ستون ارزش آن‌ها یکی باشد.

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$
د	ن	د
ن	د	ن

۴ ارزش گزاره $\sim(\sim P)$ را در

جدول روبه‌رو می‌بینید، ارزش این گزاره با P معادل است. از این‌رو می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$



ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب " p یا q " را که به صورت " $p \vee q$ " می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی " \vee "، فاصل گفته می‌شود.

چاشنی: ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دوی p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p \vee q$ درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نمونه‌ای از ترکیب‌های فصلی را به صورت مثال‌های زیر می‌بینیم:

(الف) $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست. ارزش گزاره بالا به دلیل اینکه گزاره اول درست است، حتماً درست است.

(ب) زمین گرد است یا آسمان زرد رنگ است.

ارزش گزاره مرکب بالا به دلیل درست بودن گزاره اول، درست است.

(پ) ۳ عددی گنگ است یا زمین صاف است.

با توجه به این که هر دو گزاره بالا نادرست است، پس ارزش ترکیب فصلی آن‌ها نیز نادرست است.



ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب " $p \wedge q$ " را که خوانده می‌شود " p و q "، ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی " \wedge " عاطف گفته می‌شود.

چاشنی: ارزش گزاره مرکب $p \wedge q$ وقتی درست است که هر دو مؤلفه p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است.

P	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن

نمونه‌ای از ترکیب‌های عطفی را به صورت مثال‌های زیر می‌بینیم:

(الف) زمین گرد است و آسمان زرد رنگ است.

ارزش گزاره به دلیل نادرست بودن گزاره اول نادرست است.

(ب) ۳ عددی طبیعی است و زمین گرد است.

با توجه به درست بودن دو گزاره بالا، ترکیب عطفی آن‌ها هم درست است.

(پ) ایران بهترین تیم فوتبال قاره آسیا در ماه اخیر است و علم بهتر از ثروت است.

چون جمله دوم، ارزش درست یا نادرست قطعی ندارد، پس گزاره نبوده و ترکیب فوق، ترکیب عطفی نیست.

وعده ۹



قوانین دمورگان

مثال ۸: به کمک جدول ارزش گذاری، قانون دمورگان را در هر دو حالت اثبات کنید.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

چاشنی: ۱ می بینیم که همه حالت های ارزش دو گزاره $\sim(p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ یکسان هستند، پس داریم:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \text{ قانون دمورگان}$$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

۲ همه حالت های ارزش دو گزاره $\sim p \vee \sim q$ و $\sim(p \wedge q)$ یکسان هستند، پس می توان نتیجه گرفت:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \text{ قانون دمورگان}$$

مثال ۹: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (تمرین ۴، صفحه ۱۷)

الف) $p: 4 \leq 3$

$$\Rightarrow \sim p: 4 \not\leq 3 \Rightarrow \sim p: 4 > 3$$



ب) ابوالوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی است.

ابوالوفای بوزجانی ریاضی‌دان یا ایرانی نیست.

ابوالوفای بوزجانی ریاضی‌دان نیست یا ایرانی

نیست. $a \in \{b, c, d\}$ پ

نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$a \notin \{b, c, d\}$$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویا است.

۲ عددی زوج نیست و عدد π گویا نیست.

۲ عددی فرد است و π عددی گنگ است.

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز کردستان است.

خورشید به دور زمین نمی‌چرخد یا سنندج مرکز استان

کردستان نیست.

مثال ۱۰: ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

(تمرین ۵، صفحه ۱۷)

الف) $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$

$$(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10) \Rightarrow (د) \wedge (ن) \equiv ن$$

ب) $(5 > 3) \vee (x^2 + 1 = 0)$

$$(5 > 3) \vee (x^2 + 1 = 0) \Rightarrow (د) \vee (ن) \equiv د$$

$$پ) \left(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}\right) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$$

$$\Rightarrow (ن) \vee (ن) \equiv ن$$

ت) (عدد ۴ فرد است) \vee (عدد ۴ زوج است)

فرد بودن ۴

$$\uparrow \quad \downarrow \\ (ن) \vee (د) \equiv د$$


زوج بودن ۴

وعده ۱۰



ترکیب شرطی

هر گاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب " $p \Rightarrow q$ " که خوانده می شود «اگر p ، آن گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می گوئیم. در این ترکیب شرطی، p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می نامیم.

 **چاشنی:** گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ را به صورت های « p شرط کافی برای q است.» و « q شرط لازم برای p است.» می خوانیم.

P	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

مقدم درست و تالی نادرست

شاید برای شما این سؤال پیش بیاید که چه طور می شود که مقدم و تالی نادرست، در کل، گزاره‌ای درست را تشکیل می دهند یا حالتی که مقدم نادرست است و تالی درست، باز کل گزاره درست است. برای اینکه این مطلب به خوبی در ذهن ما بماند به این نکته باید توجه کنیم که در ترکیب شرطی، جواب شرط یا تالی به عنوان نتیجه گزاره از اهمیت بالاتری برخوردار است. پس در هر حالتی که تالی درست باشد، کل گزاره درست است. در مورد حالتی که تالی و مقدم هر دو نادرست هستند، توجه شما را به مثال زیر جلب می کنم:

«اگر a فرد باشد، آن گاه $a + 1$ زوج است.» این یک گزاره شرطی است، حالا اگر $a = 2$ باشد، داریم:

«اگر ۲ فرد باشد، آن گاه $2 + 1 = 3$ زوج است.» در نگاه اول گزاره غلط به نظر می رسد اما اگر بیشتر دقت کنیم و فرض به این باشد که ۲ عددی فرد است، قطعاً عدد بعدی زوج می شود که در واقع همان ۳ است. پس در کل، درست است.

یادداشت: گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط در صورتی غلط

است که مقدم (p) درست و تالی (q) نادرست باشد.

۲ در زبان محاوره‌ای، مقدم و تالی (p, q) در جملات

شرطی که به نام‌های شرط و جواب شرط معروف است،

به طریقی به هم مربوط هستند. به عنوان مثال: «اگر رضا

ایرانی است، آن گاه رضا حق شرکت در انتخابات را دارد.»

۳ در گزاره‌های شرطی، دو مؤلفه ممکن است هیچ ارتباطی

با هم نداشته باشند. به عنوان مثال: «اگر ۲ فرد باشد، آن گاه

مستطیل دو قطر مساوی ندارد.»

۴ هر گاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن گاه ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ درست است. در این حالت می گویند ارزش $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است.

P	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

۵ از جدول بالا نتیجه می گیریم: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۶ ترکیب‌های شرطی که بتوان از درستی شرط، درستی جواب را نتیجه گرفت را قضیه شرطی گویند.

۷ قضیه شرطی (گزاره شرطی همیشه درست) را یک استلزام منطقی نیز می گوئیم.

۸ گزاره مرکب همیشه درست، گزاره‌ای است که ارزش آن، مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همیشه درست باشد. گزاره همیشه درست را با T و گزاره همیشه نادرست را با F نشان می دهیم. مثلاً $p \wedge \sim p$ گزاره همیشه نادرست است، در این مثال چون یکی از گزاره‌ها نقیض دیگری است، به آن تناقض هم می گویند.

۹ گزاره $q \Rightarrow p$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

P	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

از جدول بالا نتیجه می‌گیریم: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
 «هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.»

مثال ۱۱: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$(p \Rightarrow p, q) \equiv T$ (همواره درست)

پاسخ

P	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

همواره درست

به رابطه بالا، قانون ادخال فاصل گفته می‌شود.

مثال ۱۲: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$

پاسخ

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

همواره درست

به رابطه بالا، قانون حذف عاطف گفته می‌شود.

چاشنی: اگر گزاره‌های $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ و گزاره q درست باشند و از ترکیب عطفی آنها درستی گزاره q نتیجه شود، این عمل یک استنتاج است و به آن استدلال استنتاجی می‌گویند.

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

مثال ۱۳: نتیجه حاصل را از گزاره‌های زیر را بنویسید.

(الف) اگر a عددی زوج باشد، آن گاه بر ۲ بخش پذیر است.
 a عددی زوج است.

نتیجه: پس a بر ۲ بخش پذیر است.

(ب) اگر باران بیارد، زمین سیراب می‌شود.

اگر زمین سیراب شود، گیاه می‌روید.

نتیجه: اگر باران بیارد گیاه می‌روید.

چاشنی: برهان خلف نوعی برهان غیر مستقیم است. در این روش برای این که ثابت کنیم قضیه‌ای درست است، ثابت می‌کنیم خلاف آن (نقیض آن) نادرست است. به این منظور، نقیض حکم را درست فرض می‌کنیم و به کمک استلزام‌های منطقی، به نتیجه‌ای خلاف فرض یا خلاف یکی از قضایایی که قبلاً ثابت شده یا خلاف اصولی که قبلاً پذیرفته شده‌اند، می‌رسیم.

مثال ۱۴: ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 فرد باشد، آن‌گاه a نیز فرد است.

پاسخ فرض می‌کنیم a فرد نباشد (عکس نقیض را اثبات می‌کنیم) پس a زوج بوده و به صورت $a = 2k$ است، پس:

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k \in \mathbb{Z}}) = 2k' \Rightarrow a^2 \text{ زوج است.}$$

مثال ۱۵: صورت‌های مختلف گزاره شرطی زیر را بیان کنید.
«اگر مربع عددی زوج باشد آن‌گاه آن عدد زوج است.»

پاسخ شرط لازم برای آن که مربع عددی زوج باشد این است که آن عدد زوج باشد. از این که مربع عددی زوج باشد نتیجه می‌شود آن عدد زوج است. شرط کافی برای آنکه عددی زوج باشد این است که مربع آن زوج باشد.

وعده ۱۱



ترکیب دو شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر p ، آن گاه q و برعکس» « p شرط لازم و کافی برای q است.»
 « p اگر و تنها اگر q »

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

$p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q هم‌ارز باشند، یعنی هم ارزش (هر دو درست یا هر دو غلط) باشند.

 **چاشنی:** نمونه‌هایی از ترکیب دو شرطی:

۱ $x = 2 \Leftrightarrow 2x = 4$

۲ $x > 3 \Leftrightarrow 2x - 5 > 1$

۳ در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آن که احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

۴ شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پارخط باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پارخط برابر باشد.

۵ نقطه D روی نیم‌ساز زاویه است، اگر و تنها اگر D از دو ضلع این زاویه به یک فاصله باشد.

۶ در ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ ، اگر p و q هر دو درست باشند، به ترکیب دو شرطی، قضیه دو شرطی گویند.