

(فصل ۱)

تابع

- درس ۱: توابع چندجمله‌ای و توابع صعودی و نزولی ۷
درس ۲: ترکیب توابع ۱۵
درس ۳: تابع وارون ۳۷

(فصل ۲)

مثلثات

- درس ۱: تناوب و تابع تانژانت ۴۹
درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان ۶۲
درس ۳: معادلات مثلثاتی ۶۷

(فصل ۳)

حد بی‌نهایت و حد دربی‌نهایت

- درس ۱: حد بی‌نهایت ۷۸
درس ۲: حد در بی‌نهایت ۹۳

(فصل ۴)

مشتق

- درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۱۰۳
درس ۲: روابط محاسبه مشتق ۱۰۸
درس ۳: خط مماس ۱۱۹
درس ۴: مشتق‌پذیری و پیوستگی ۱۲۱
درس ۵: آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای ۱۳۳
درس ۶: رفع ابهام از $\frac{0}{0}$ به کمک قاعده هسپیتال ۱۴۰

(فصل ۵)

کاربرد مشتق

- درس ۱: اکسترم‌های تابع ۱۴۴
درس ۲: بهینه‌سازی ۱۶۴

(فصل ۶)

هندسه

- درس ۱: تفکر تجسمی ۱۷۱
درس ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی ۱۸۱
درس ۳: دایره ۱۹۱

(فصل ۷)

احتمال

- قانون احتمال کل ۲۰۶

پاسخ‌نامه تشریحی

- ۲۱۵
۳۴۱ سؤالات برگزیده کنکور سراسری ۹۷
۳۴۳ پاسخ سؤالات برگزیده کنکور سراسری ۹۷
۳۴۶ پاسخ‌نامه کلیدی



توابع چند جمله‌ای و توابع صعودی و نزولی

در سال‌های دهم و یازدهم دیدید تابع f مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایزند. برای هر ورودی (x) فقط یک خروجی (y) به دست می‌آید و هر خط عمودی (موازی محور y) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه ورودی‌های تابع را دامنه و مجموعه خروجی‌ها را برد می‌نامیم.

در این بخش اول با تابع‌های چندجمله‌ای آشنا می‌شویم. هر تابع به شکل $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را یک چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دقت کنید که a_n نباید صفر باشد. دامنه تابع‌های چندجمله‌ای همیشه مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

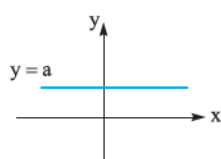
مثلاً این‌ها چندجمله‌ای هستند:

$$y = 1, y = \frac{5x-1}{3}, y = \sqrt{7}x^2 - 2x + 3, y = \frac{x^5 - \sqrt{2}}{2}$$

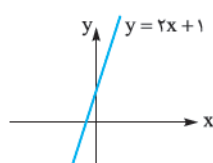
اما این‌ها چندجمله‌ای نیستند:

$$y = \frac{1}{x}, y = \sqrt{x}, y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

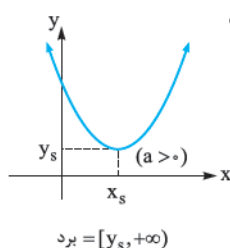
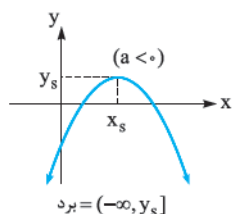
با بعضی از تابع‌های چندجمله‌ای قبلاً آشنا شدیم:



(الف) چندجمله‌ای درجه صفر یا تابع ثابت به صورت $f(x) = a$ است. نمودارش یک خط افقی خواهد بود. دامنه‌اش $\mathbb{R}$ و بردش $\{a\}$ است. ببینید:

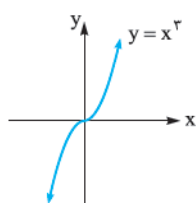


(ب) چندجمله‌ای درجه اول یا تابع خطی، $f(x) = ax + b$ است ($a \neq 0$). نمودار آن یک خط مایل می‌شود و دامنه و بردش $\mathbb{R}$ هستند. این تابع‌ها همواره یک‌به‌یک هستند و ضابطه وارون آن‌ها $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است. (وارونشان هم خطی است). ببینید:



(پ) چندجمله‌ای درجه ۲ یا سهمی، $f(x) = ax^2 + bx + c$ است (a نباید صفر شود). به یاد دارید که نمودارش به شکل سهمی بود.

خاطره رأس آن در $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ قرار دارد.



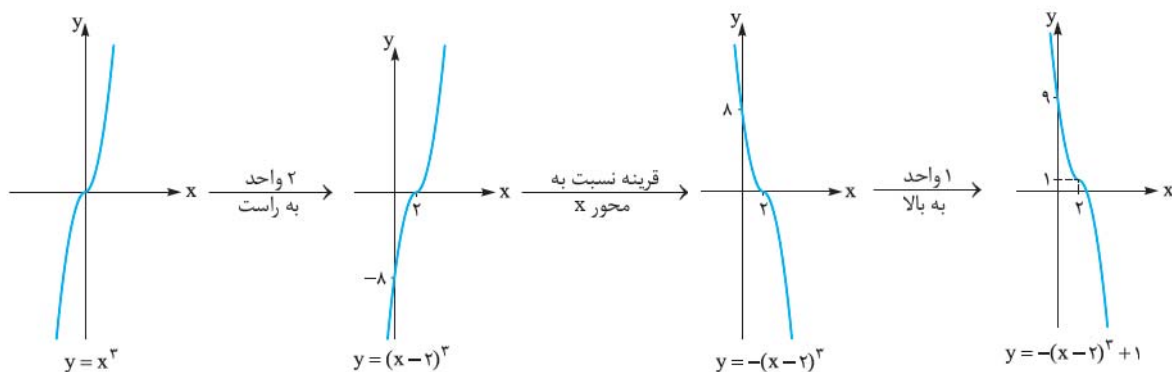
(ت) چندجمله‌ای درجه سوم به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ معرفی می‌شود.

دامنه و برد آن همیشه $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع $f(x) = x^3$ را باید یاد بگیریم:

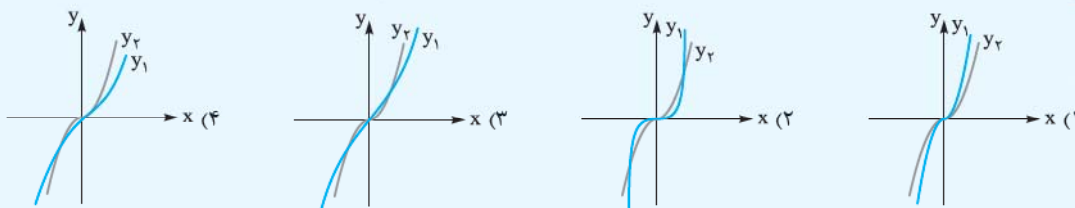
این تابع ۱ به ۱ است و وارون آن با ضابطه $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ معرفی می‌شود.

با استفاده از قوانین انتقال نمودار می‌توانیم شکل توابعی مثل $y = -(x-2)^3 + 1$ را رسم کنیم. ببینید:

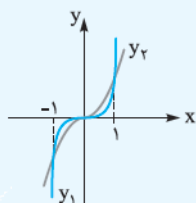
$$y = x^3 \xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = (x-2)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}} y = -(x-2)^3 \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = -(x-2)^3 + 1$$



تست در کدام شکل نمودار دو تابع $y_1 = x^3$ و $y_2 = x|x|$ نسبت به هم درست رسم شده‌اند؟



پاسخ گزینه ۲ در بحث توان‌ها، در ریاضی دهم دیدیم که اعداد بین صفر و ۱، هر چه به توان بیشتری برسند، کوچک‌تر می‌شوند. پس در فاصله



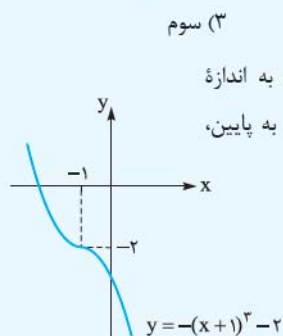
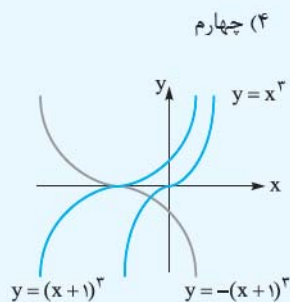
صفر تا ۱، مقدار x^3 از x^2 کم‌تر است یعنی در فاصله صفر تا ۱ باید $y_1 = x^3$ زیر $y_2 = x|x| = x^2$ باشد اما از ۱ به بعد مقدار x^3 از x^2 بیشتر می‌شود و y_1 بالاتر از y_2 قرار می‌گیرد.

با این توصیف، (۲) مناسب است.

$y_2 = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

نمودارهای $y = x|x|$ و $y = x^3$ در سه نقطه $(1,1)$ و $(0,0)$ و $(-1,-1)$ متقاطع‌اند.

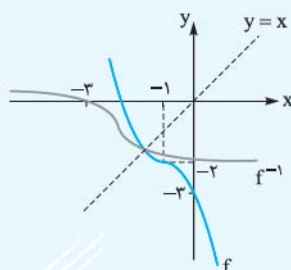
تست منحنی نمودار تابع $y = -(x+1)^3 - 2$ وارون خود را در کدام ناحیه قطع می‌کند؟



(۲) دوم

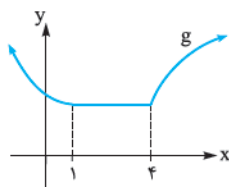
(۱) اول

پاسخ گزینه ۳ نمودار $y = -(x+1)^3 - 2$ با انتقال $y = x^3$ به اندازه یک واحد به چپ، سپس قرینه نسبت به محور x و انتقال ۲ واحدی به پایین، رسم می‌شود:



برای رسم وارون آن باید منحنی را نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم قرینه کرد: و با توجه به شکل، دو نمودار در یک نقطه روی نیمساز ناحیه سوم متقاطع‌اند.

توابع صعودی و نزولی



به نمودار مقابل دقت کنید:

وقتی x در دامنه تابع افزایش می‌یابد، یعنی روی نمودار از چپ به راست حرکت می‌کنیم، روند تغییرات تابع بررسی می‌شود.

(الف) اگر با افزایش x مقدار y هم زیاد شود، با حرکت از چپ به راست روی نمودار، نقاط منحنی به بالا می‌روند.

یعنی با فرض $x_2 > x_1$ داریم: $f(x_2) > f(x_1)$

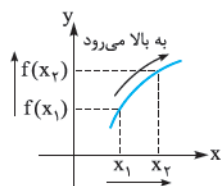
در این وضعیت می‌گوییم تابع اکیداً صعودی است.

دوتا ویژگی از تابع اکیداً صعودی یاد بگیرید:

① تابع حتماً یک‌به‌یک است و y تکراری ندارد.

② اگر از دو طرف نامساوی، تابع f را بزنیم یا از دو طرف نامساوی f بگیریم، جهت عوض نمی‌شود:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

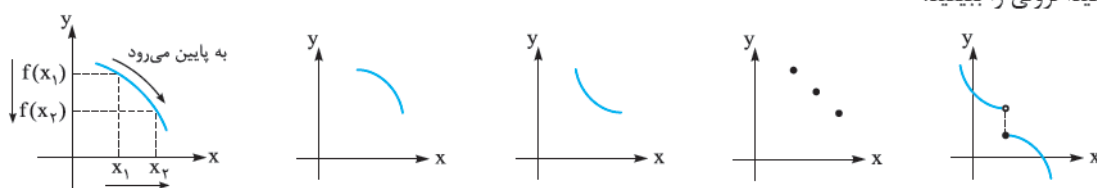


مثلاً تابع g در بالا، در بازه $(4, +\infty)$ و البته هر زیرمجموعه آن، اکیداً صعودی است.

(ب) اگر با افزایش x (حرکت از چپ به راست) مقدار y کاهش یابد (نقاط نمودار به پایین بروند) می‌گوییم تابع در آن بازه اکیداً نزولی است.

پس با فرض $x_2 > x_1$ داریم: $f(x_2) < f(x_1)$. تابع g در شکل بالا، در بازه $(-\infty, +1]$ و هر زیرمجموعه آن اکیداً نزولی است.

چند قیافه تابع اکیداً نزولی را ببینید:



تمام این تابع‌ها در دامنه خود اکیداً نزولی‌اند.

در مورد تابع اکیداً نزولی نیز همان دو ویژگی بیان می‌شوند:

① تابع حتماً یک‌به‌یک است و y تکراری ندارد.

② با حذف f از دو طرف نامساوی یا f گرفتن از دو طرف، جهت عوض می‌شود یعنی:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

در اصطلاح می‌گوییم اگر f اکیداً صعودی باشد، تغییرات x و y هم‌جهت هستند. اما در تابع اکیداً نزولی، تغییر y در خلاف جهت تغییر x است.

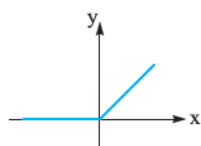
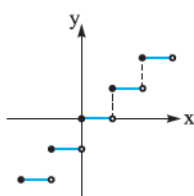
(پ) اگر تابع با افزایش x ثابت بماند یا افزایش یابد، یعنی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ آن را صعودی می‌نامیم. پس فرق صعودی و اکیداً

صعودی این است که تابع صعودی می‌تواند دو نقطه هم‌عرض داشته باشد و یک‌به‌یک نباشد.

مثلاً تابع g در فاصله $[1, 4]$ یا $[2, 5]$... صعودی است (و اکیداً صعودی نیست).

یک مثال عالی برای تابع صعودی، $y = [x]$ است که با افزایش x مقادیر y ثابت مانده و یا زیاد می‌شوند:

$y = [x]$ صعودی است.



$$y = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

هم‌چنین $y = x + |x|$:

این تابع هم صعودی غیراکید است (گاهی ثابت می‌ماند).

(ث) اگر با افزایش x مقدار y کم شود یا ثابت بماند، می‌گوییم تابع نزولی است. پس شرط ریاضی تابع نزولی $f(x_1) \geq f(x_2)$ است.

تابع g در شکل اول، روی بازه $(-\infty, 4]$ یا $(-5, 2)$ یا ... نزولی است.

در این‌جا هم فرق نزولی و اکیداً نزولی، در امکان ثابت‌بودن مقدار تابع است. تابع نزولی می‌تواند y ‌های مساوی داشته باشد و یک‌به‌یک نشود.

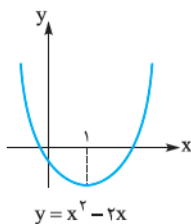
اگر تابع در بازه‌ای صعودی یا نزولی یا صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، می‌گوییم در آن بازه اکیداً یک‌نوا است و اگر نزولی یا صعودی باشد

می‌گوییم در آن بازه یک‌نوا است.

(ج) اگر تابع در قسمتی از دامنه روند صعودی و در قسمتهای دیگری روند نزولی داشته باشد، می‌گوییم نه صعودی است و نه نزولی.

این تابع‌ها یک‌نوا نیستند.

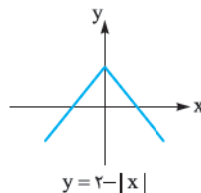
چندتا شکل غیر یکنوا ببینید:



در $(-\infty, 1)$: نزولی اکید

در $(1, +\infty)$: صعودی اکید

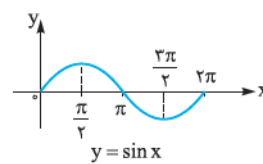
در $\mathbb{R}$: غیر یکنوا



در $(-\infty, 0)$: اکیداً صعودی

در $(0, +\infty)$: اکیداً نزولی

در $\mathbb{R}$: غیر یکنوا

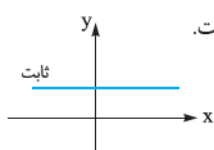


در $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$: اکیداً نزولی

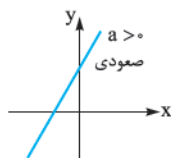
در $(0, \frac{\pi}{2})$: اکیداً صعودی

در $(0, \pi)$: غیر یکنوا

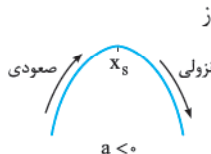
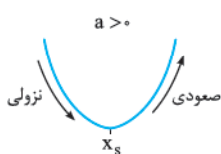
بررسی یکنوایی در تابع‌های مهم



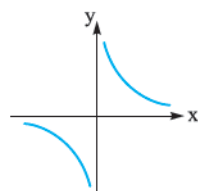
۱ تابع ثابت $f(x) = c$: این تابع در کل دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است؛ اما صعودی یا نزولی اکید نیست.



۲ تابع خطی $f(x) = ax + b$: اگر $a > 0$ باشد، صعودی و اگر $a < 0$ نزولی است.

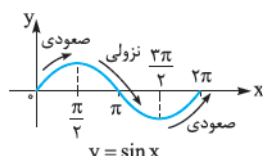
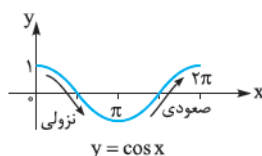


۳ تابع درجه دوم: $y = ax^2 + bx + c$ در $\mathbb{R}$ یکنوا نیست اما در بازه‌های قبل از رأس و بعد از رأس سهمی یکنوا است.



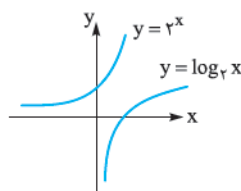
۴ تابع کسری $y = \frac{1}{x}$: نمودار این تابع را بلدیم:

تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

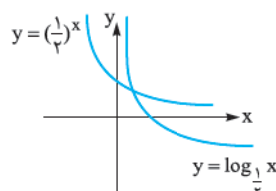


۵ تابع‌های $y = \cos x$ و $y = \sin x$:

نمودار این تابع‌ها در اصطلاح نوسانی است و در بازه‌های تکراری به طور متناوب صعودی و نزولی می‌شوند. ببینید:



وقتی $a > 1$ باشد این تابع‌ها صعودی‌اند.



وقتی $0 < a < 1$ باشد این تابع‌ها نزولی‌اند.

۶ تابع‌های نمایی و لگاریتمی $y = a^x$ و $y = \log_a x$ را می‌شناسیم.

تست اگر $f = \{(1, a-1), (-1, 2+3a), (2, 2a+2)\}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، مقادیر a در کدام بازه است؟

(۴) $(-\frac{2}{3}, 2)$

(۳) $(-3, -\frac{3}{4})$

(۲) $(-\frac{2}{3}, 1)$

(۱) $(-2, 1)$

پاسخ گزینه ۳: باید با افزایش x ، y ها هم زیاد شوند. پس داریم:

x	y
-۱	$2+3a$
۱	$a-1$
۲	$2a+2$

$$\underbrace{2+3a < a-1}_{\text{الف}} < 2a+2$$

الف) $2+3a < a-1 \Rightarrow 2a < -3 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$

ب) $a-1 < 2a+2 \Rightarrow -3 < a$

پس داریم: $-3 < a < -\frac{3}{2}$

تست به ازای کدام مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = (3a - a^2)x + |2x - 1|$ اکیداً صعودی است؟

(۴) $(-2, -1)$

(۳) $(1, 2)$

(۲) $(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$

(۱) $(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1)$

پاسخ گزینه ۳: اول برای $x \geq \frac{1}{2}$ و $x < \frac{1}{2}$ ، قدرمطلق را برداریم:

$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) = (3a - a^2)x + 2x - 1 = (3a - a^2 + 2)x - 1$

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) = (3a - a^2)x - (2x - 1) = (3a - a^2 - 2)x + 1$

پس نمودار این تابع از دو نیم خط ساخته می شود برای اکیداً صعودی بودن باید شیب این دو نیم خط مثبت باشد یعنی:

$$\begin{cases} 3a - a^2 + 2 > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 2 < 0 \\ 3a - a^2 - 2 > 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 < 0 \end{cases}$$

a	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$
$a^2 - 3a - 2$	+	-
$a^2 - 3a + 2$	-	+

a	۱	۲
$a^2 - 3a + 2$	+	-
$a^2 - 3a - 2$	-	+

با توجه به $\sqrt{17} \approx 4/1$ جواب دومی به صورت $(-0/5, 3/5)$ و جواب اولی $(1, 2)$ است که اشتراک آن ها می شود $(1, 2)$.

چند نکته در مورد توابع ترکیبی

- ۱ اگر f و g هر دو صعودی باشند $f + g$ نیز صعودی است.
- ۲ اگر f و g هر دو نزولی باشند $f + g$ نیز نزولی است.
- ۳ اگر f صعودی و g نزولی باشد $f - g$ صعودی است.
- ۴ اگر f اکیداً صعودی و g صعودی باشد $f + g$ نیز اکیداً صعودی است.

تست تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x|x| & x < 1 \\ 2x & 1 < x < 2 \\ \sqrt{x} & x \geq 2 \end{cases}$ در کدام یک از بازه های زیر یکنوا است؟

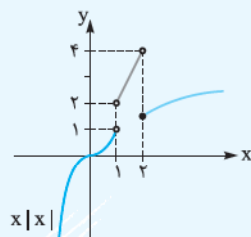
(۴) $(-1, 1)$

(۳) $(1, 3)$

(۲) $(1, 2]$

(۱) $(0, 2)$

پاسخ گزینه ۳: نمودار را ببینید:



تابع در $x = 1$ تعریف نمی شود، پس اجازه نداریم بازه $(0, 2)$ را انتخاب کنیم و ۱ درست نیست. در فاصله $[1, 2]$ ، به خاطر نقطه $x = 2$ ، ابتدا صعود و در پایان نزول داریم. در فاصله $(1, 3)$ ابتدا تابع بالا و سپس پایین می رود. اما در فاصله $(-1, 1)$ تابع اکیداً صعودی و یکنوا است.

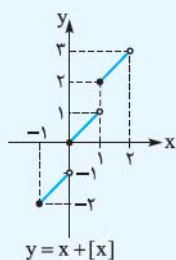
تست کدام تابع اکیداً یکنوا است؟

(۴) $y = 2x^2 - x^2$

(۳) $y = x + [x]$

(۲) $y = x - [x]$

(۱) $y = x[x]$



پاسخ گزینه ۳: در گزینه‌های ① و ④ تابع اکیداً یکنوا نیست؛ چون مثلاً $f(0)$ و $f(\frac{1}{2})$ هر دو برابر صفرند.

در تابع اکیداً یکنوا y تکراری نداریم.

در مورد ② هم می‌دانیم مقدار تابع برای تمام x های صحیح صفر است، پس این هم نیست.

اما نمودار ③ را ببینید:

اکیداً صعودی است.

④ $[x]$ صعودی و x اکیداً صعودی است، پس جمع آن‌ها اکیداً صعودی خواهد بود.

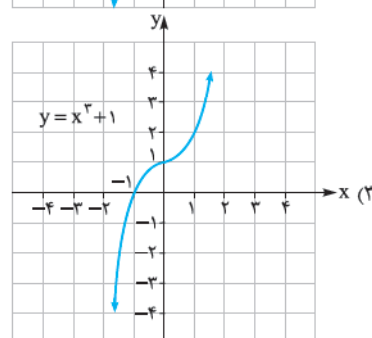
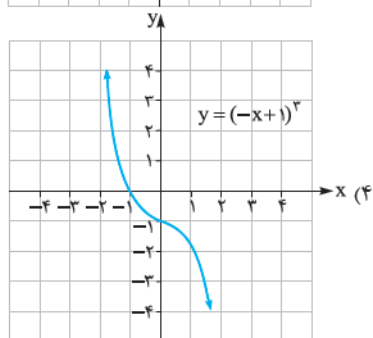
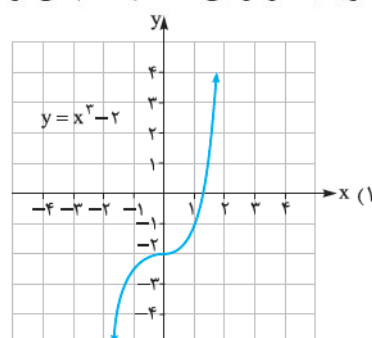
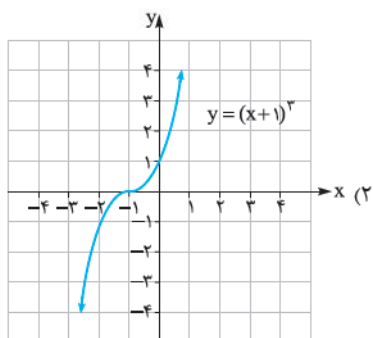
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- کدام یک از توابع زیر چندجمله‌ای از درجه ۵ است؟

$f(x) = \frac{x^5 + x}{x^2}$ (۴)
 $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x$ (۳)
 $f(x) = x^5 + x\sqrt{x} + 3$ (۲)
 $f(x) = 5x + 3$ (۱)

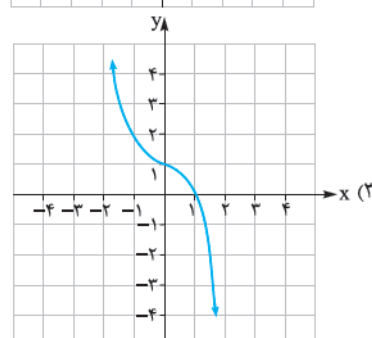
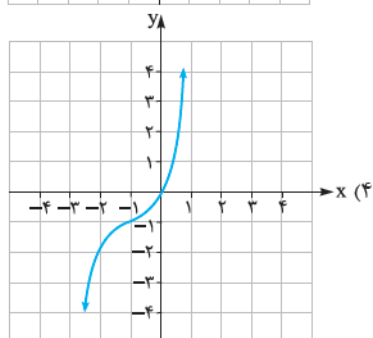
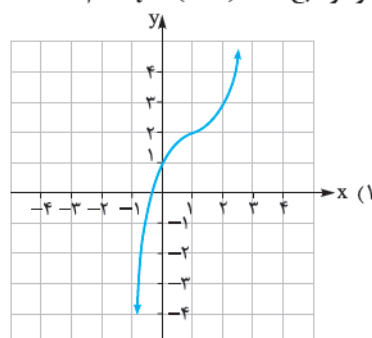
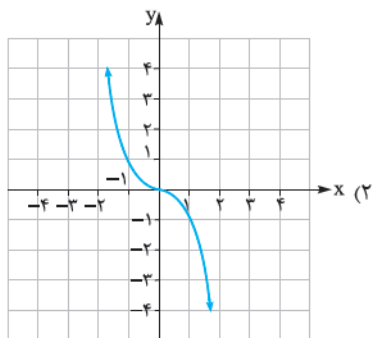
(کتاب درسی)

۲- با توجه به نمودار تابع $y = x^3$ کدام تابع درست رسم نشده است؟



(کتاب درسی)

۳- نمودار تابع $y = (x-1)^3 + 2$ کدام است؟



(کتاب درسی)

(تمرین کتاب درسی)

(کتاب درسی)

۴- در تابع $y = (x-1)^3 - 1$ چند عدد صحیح در اشتراک برد و دامنه این تابع قرار ندارند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۵- اشتراک بردهای توابع $f(x) = x^3 - 2$ و $g(x) = -(x-2)^3$ کدام است؟

$\mathbb{R}$ (۴)

$(-\infty, -2)$ (۳)

$(-2, 2)$ (۲)

$(-2, +\infty)$ (۱)

۶- بازه‌ای با بزرگ‌ترین طول که تابع $f(x) = x^3$ بالاتر از تابع $g(x) = x^2$ قرار ندارد، کدام است؟

$(-\infty, 1]$ (۴)

$(-\infty, 0]$ (۳)

$[-1, 1]$ (۲)

$[0, 1]$ (۱)

۷- نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

(۴) دوم و چهارم

(۳) سوم و چهارم

(۲) دوم و سوم

(۱) اول و سوم

۸- به ازای چه مقادیری از h تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + h$ از ربع دوم عبور نمی‌کند؟

$h \geq 8$ (۴)

$h \leq 8$ (۳)

$h \geq 0$ (۲)

$h \leq 0$ (۱)

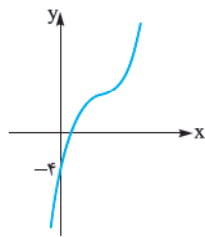
۹- اگر نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + k$ به صورت مقابل باشد، $f(3)$ کدام است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



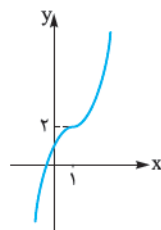
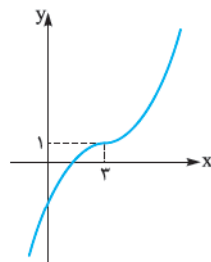
۱۰- اگر نمودار تابع $f(x) = (x-m)^3 + h$ به شکل زیر باشد، تابع $g(x) = -(x-h)^3 + m$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

اول (۱)

دوم (۲)

سوم (۳)

چهارم (۴)



۱۱- اگر نمودار تابع $f(x) = (x+a)(x^2+bx+c)$ به صورت مقابل باشد، $ab+c$ کدام است؟

۱ (۱)

-۱ (۲)

۳ (۳)

-۳ (۴)

۱۲- کدام تابع نزولی است؟

$y = -x + 3$ (۴)

$y = -x^2 + 4$ (۳)

$y = x + 1$ (۲)

$y = x^3 - 3$ (۱)

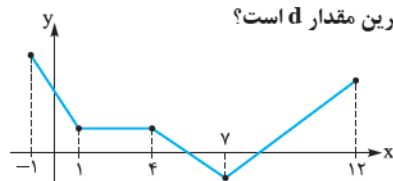
۱۳- تابع شکل زیر در بازه $[a, b]$ نزولی و در بازه $[c, d]$ صعودی است. بیشترین مقدار b چند برابر بیشترین مقدار d است؟

$\frac{12}{7}$ (۲)

$\frac{7}{12}$ (۱)

$\frac{4}{12}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)



(کتاب درسی)

۱۴- کدام یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

$f(x) = x|x|$ (۴)

$f(x) = x + |x|$ (۳)

$f(x) = x^2$ (۲)

$f(x) = |x|$ (۱)

۱۵- تابع با ضابطه $f(x) = |x^2|$ با دامنه $\mathbb{R}$ چگونه است؟

یک به یک (۴)

وارون ناپذیر (۳)

صعودی (۲)

نزولی (۱)

۱۶- تابع $f(x) = \sqrt{(x-3)^2} + 1$ چگونه است؟

نزولی (۴)

صعودی (۳)

ابتدا نزولی و سپس صعودی (۲)

ابتدا صعودی و سپس نزولی (۱)

۱۷- اگر تابع $f = \{(1,1), (3,6), (\sqrt{2}, m^2-2), (10,20)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)



۱۸- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 1-x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) غیریکنوا (۴) هم صعودی و هم نزولی

۱۹- کدام یک از توابع زیر در دامنه خود اکیداً صعودی نیست؟

(۱) $f(x) = \frac{|x|}{x} + x$ (۲) $f(x) = 2 - |x - 1|$ (۳) $f(x) = 2x - |x - 1|$ (۴) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$

۲۰- دو تابع $y = x + |x|$ و $y = x|x|$ در کدام بازه اکیداً صعودی هستند؟

(۱) $[0, 1]$ (۲) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (۳) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (۴) $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$

۲۱- تابع $g(x) = |x - 2| - |x - 1|$ چگونه است؟

(۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی (۳) صعودی (۴) نزولی

۲۲- تابع $f(x) = |x|(x - 1)$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۳- تابع $y = |x - 1| + |x + 1|$ در کدام بازه زیر صعودی است؟

(۱) $[-2, +\infty)$ (۲) $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1]$ (۴) $(-\infty, \frac{3}{2})$

۲۴- تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ مفروض است. در کدام یک از بازه‌های زیر برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطه $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ برقرار است؟

(۱) $(-3, -1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۲۵- تابع $x > 0$ و $f(x) = |x^2 - 2x|$ در بازه (a, b) نزولی اکید است. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۶- در تابع $y = \sin \frac{x}{2}$ در کدام بازه با افزایش طول نقاط، مقدار تابع کاهش نمی‌یابد؟

(۱) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (۲) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ (۳) $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ (۴) $[\pi, \frac{5\pi}{2}]$

۲۷- کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک و غیریکنوا است؟

(۱) $y = 2^x - 2$ (۲) $y = -\log_2 x + 2$ (۳) $y = x^2$ (۴) $y = \frac{1}{x}$

۲۸- چندتا از عبارات زیر درست است؟

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f + g$ یک تابع ثابت است.

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f + g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f - g$ صعودی اکید است.

ت) اگر f تابعی صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f \times g$ اکیداً صعودی است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۹- اگر f یک تابع اکیداً نزولی بوده و $f(3) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(۱) $[0, 3]$ (۲) $\mathbb{R} - (0, 3)$ (۳) $(-\infty, 3]$ (۴) $[3, +\infty)$

۳۰- کدام عبارت درباره تابع $f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$ درست است؟

(۱) یکنوا است. (۲) معکوس‌پذیر است. (۳) در بازه $(-\infty, 2]$ نزولی است. (۴) در بازه $[-4, +\infty)$ صعودی است.

۳۱- به ازای کدام مقادیر x ، نمودار تابع $y = 4 - x^2$ صعودی است؟

(۱) $x > 0$ (۲) $x < 0$ (۳) $-2 < x < 2$ (۴) $-4 < x < 4$

۳۲- تابع $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ روی بازه $[-1, 2]$ چگونه است؟

(۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی (۳) نزولی (۴) صعودی

۳۳- اگر تابع $f(x) = x^2 - mx + 3$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، محدوده m کدام است؟

(۱) $m = 2$ (۲) $m = -2$ (۳) $m \leq 2$ (۴) $m \geq -2$

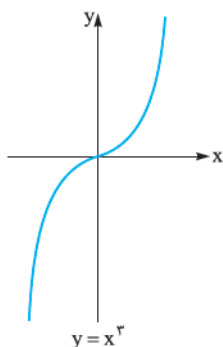
(کتاب درسی)

(کتاب درسی)

می‌توانیم با عددگذاری هم گزینه‌ها را کنترل کنیم مثلاً $x=1$ را قرار دهیم.

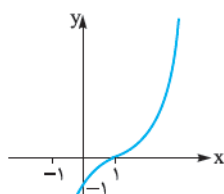
گزینه ۱-۳ در تابع $y = (x-1)^3 + 2$ نمودار شبیه x^3 است و اگر به جای x بگذاریم صفر، مقدار y می‌شود ۱؛ پس نمودار باید از $(0,1)$ بگذرد که فقط **۱** این‌طور است.

روش دوم نمودار $y = (x-1)^3 + 2$ را از روی نمودار $y = x^3$ رسم می‌کنیم:



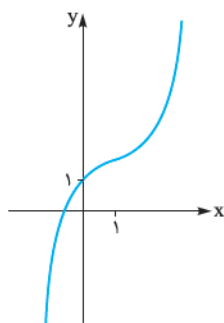
$$y = x^3$$

انتقال به اندازه $(+1)$ واحد در راستای محور x ها



$$y = (x-1)^3$$

انتقال به اندازه $(+2)$ واحد در راستای محور y ها

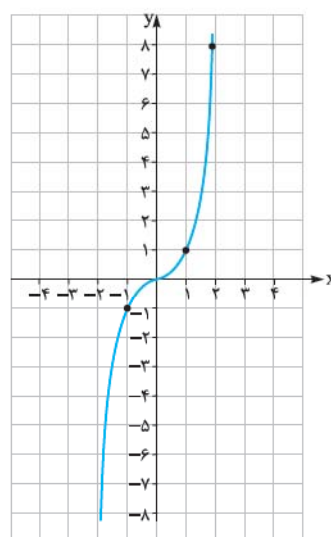


گزینه ۱-۴ می‌دانیم دامنه و برد تابع‌های چندجمله‌ای درجه فرد $\mathbb{R}$ همواره برابر $\mathbb{R}$ است، پس دامنه و برد تابع $y = (x-1)^3 - 1$ که از درجه ۳ است برابر است با $\mathbb{R}$ و اشتراک دامنه و برد (که آن هم می‌شود $\mathbb{R}$) شامل تمام اعداد صحیح است.

گزینه ۱-۵ می‌دانیم برد تابع $y = x^3$ برابر $\mathbb{R}$ یعنی بازه $(-\infty, +\infty)$ است. حالا برد تابع f و g را تعیین می‌کنیم. نمودار تابع $f(x) = x^3 - 2$ با انتقال نمودار تابع $y = x^3$ به اندازه (-2) واحد در راستای محور y ها به دست می‌آید پس برد تابع f هم برابر $\mathbb{R}$ است، نمودار تابع $g(x) = -(x-2)^3$ با انتقال نمودار تابع $y = x^3$ به اندازه دو واحد در راستای محور x ها و سپس قرینه کردن نمودار نسبت به محور x ها به دست می‌آید. پس برد تابع g نیز برابر $\mathbb{R}$ است پس اشتراک برد دو تابع f و g نیز برابر است با $\mathbb{R}$. (البته می‌توانستیم نمودار تابع f و g را رسم کنیم و به همین نتیجه برسیم.)

گزینه ۳-۱ چندجمله‌ای از درجه ۵ یعنی بزرگ‌ترین توان x در چندجمله‌ای باید برابر ۵ باشد و از طرفی تمام x ها دارای توان‌های صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند. پس:

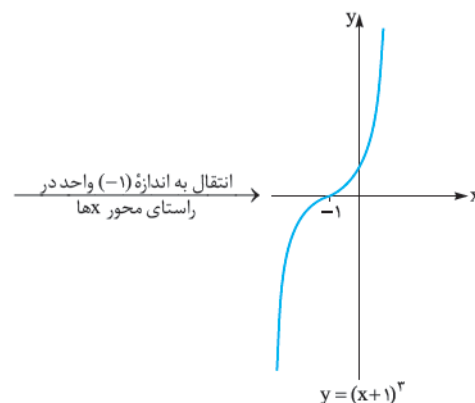
- درست نیست چون از درجه ۱ است.
- درست نیست چون x با توان کسری یعنی $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ داریم.
- درست است و **۴** هم درست نیست؛ چون در مخرج x^2 یعنی x^{-2} داریم.



گزینه ۲-۲ نمودار تابع $y = x^3$ به صورت مقابل است. برای رسم هر کدام از گزینه‌ها باید به ترتیب زیر عمل کرد.

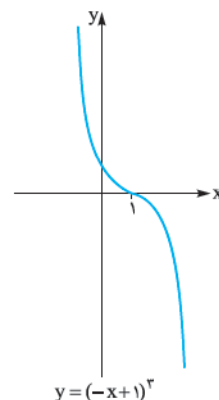
- $y = x^3 - 2$ انتقال به اندازه (-2) واحد در راستای محور y ها
- $y = (x+1)^3$ انتقال به اندازه $(+1)$ واحد در راستای محور x ها
- $y = x^3 + 1$ انتقال به اندازه $(+1)$ واحد در راستای محور y ها
- $y = (-x+1)^3$ اول انتقال به اندازه (-1) واحد در راستای محور x ها و بعد قرینه نسبت به محور y ها

با بررسی گزینه‌ها می‌بینیم که **۴** درست رسم نشده است:



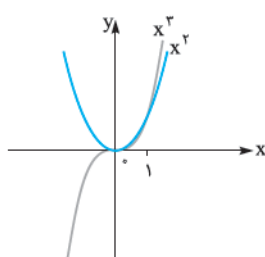
$$y = (x+1)^3$$

قرینه نسبت به محور y ها



$$y = -(x+1)^3$$

۶- گزینه ۱: نمودار دو تابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2$ را رسم می‌کنیم:

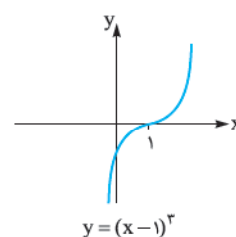
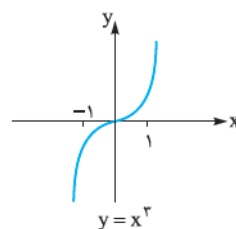


با توجه به شکل نمودار، تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(1, +\infty)$ بالای نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار می‌گیرد پس بازه‌ای که نمودار f بالاتر از نمودار g قرار ندارد برابر است با $(-\infty, 1]$.

۷- گزینه ۲: برای رسم نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ سعی می‌کنیم ضابطه تابع را ساده کنیم. با استفاده از اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای یعنی $(a+b)^3$ داریم:

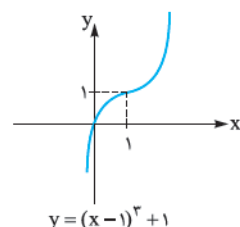
$$y - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow y - 1 = (x - 1)^3 \Rightarrow y = (x - 1)^3 + 1$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



انتقال (+1) واحد در راستای محور xها

انتقال (+1) واحد در راستای محور yها

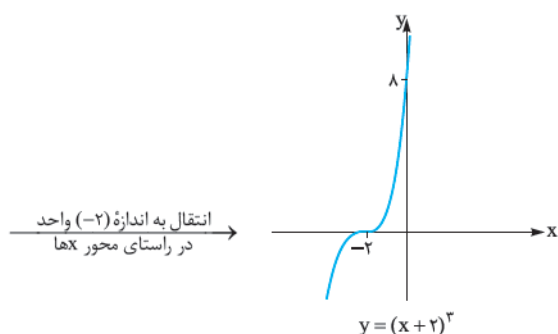
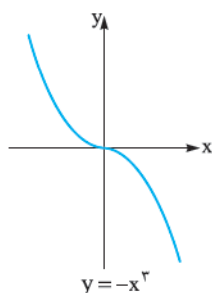
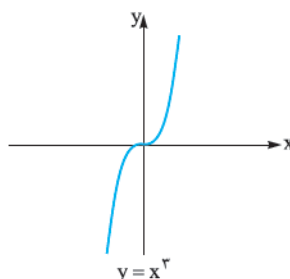


با توجه به شکل، نمودار تابع از ناحیه‌های اول و سوم دستگاه مختصات عبور می‌کند و از ناحیه‌های دوم و چهارم عبور نمی‌کند.

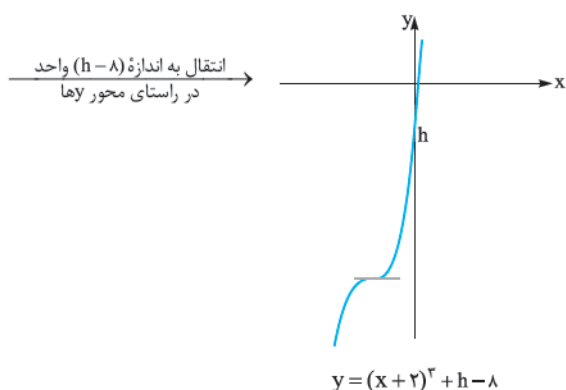
۸- گزینه ۱: اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + h = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 8 + h = (x + 2)^3 + h - 8$$

حالا اگر نمودار تابع را رسم کنیم:



انتقال به اندازه (-2) واحد در راستای محور xها



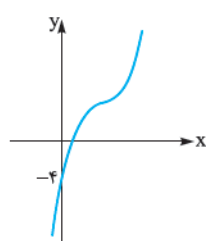
انتقال به اندازه (h-8) واحد در راستای محور yها

حالا با توجه به نمودار، برای این که نمودار تابع $y = (x + 2)^3 + h - 8$ از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نکند باید $h \leq 0$ باشد.

۹- گزینه ۳: با توجه به نمودار داده شده، تابع از نقطه $(0, -4)$ عبور می‌کند، پس داریم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + k$$

$$f(0) = -4 \Rightarrow k = -4$$



بنابراین $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$ حالا برای پیدا کردن مقدار $f(3)$ بهتر است ضابطه را کمی ساده‌تر کنیم:

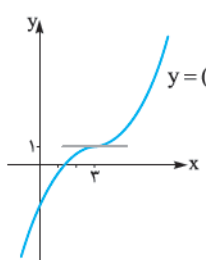
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 4 = (x - 2)^3 + 4 \Rightarrow f(3) = 1^3 + 4 = 5$$

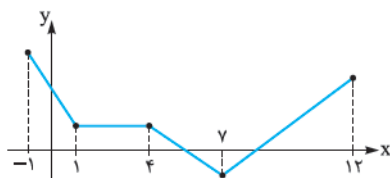
۱۰- گزینه ۳: با توجه به

نمودار تابع $y = (x - m)^3 + h$ داریم: $m = 3$ و $h = 1$.

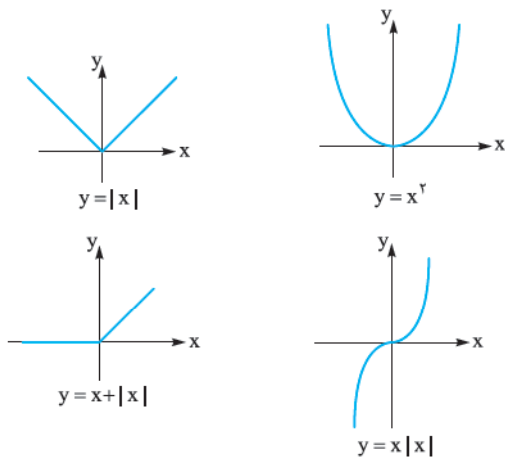
پس تابع $g(x)$ به صورت $g(x) = -(x - 1)^3 + 3$ است.

نمودار تابع $g(x)$ را رسم می‌کنیم:



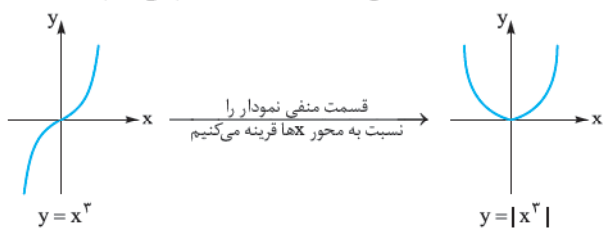


۱۴- گزینه ۲ نمودار هر کدام از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



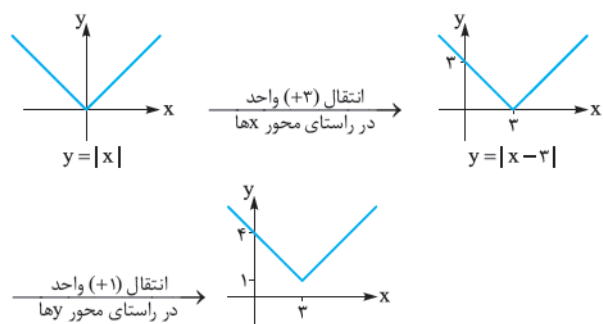
با توجه به نمودارها، تابع $y = x|x|$ صعودی اکید است.

۱۵- گزینه ۳ نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ را رسم می‌کنیم:



پس تابع $y = |x^3|$ وارون‌ناپذیر است.

۱۶- گزینه ۲ نمودار تابع $f(x) = |x-3|+1$ را رسم می‌کنیم:

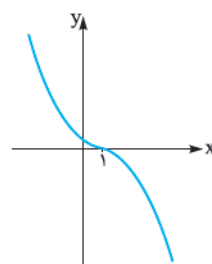


حالا با توجه به نمودار (از چپ به راست) تابع $f(x)$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۱۷- گزینه ۲ می‌دانیم در یک تابع اکیداً صعودی اگر x زیاد شود، y زیاد می‌شود؛ یعنی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. پس بهتر است زوج مرتب‌های تابع f را به ترتیب صعودی برحسب x مرتب کنیم:

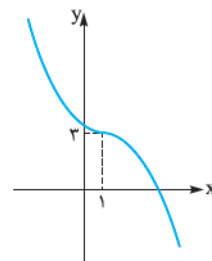
$f = \{(1, 1), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (3, 6), (10, 20)\}$
 $x = \sqrt{2}$ بین $1 < \sqrt{2} < 3$ است. پس باید $f(1) < f(\sqrt{2}) < f(3)$ باشد:
 $1 < m^2 - 2 < 6 \Rightarrow 3 < m^2 < 8 \Rightarrow \sqrt{3} < |m| < 2\sqrt{2}$

انتقال به اندازه (+۱) واحد
در راستای محور x ها



$$y = -(x-1)^2$$

انتقال به اندازه (+۳) واحد
در راستای محور y ها



$$y = -(x-1)^2 + 3$$

حالا با توجه به شکل، نمودار تابع $g(x)$ از ناحیه سوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

۱۱- گزینه ۳ با توجه به نمودار داده‌شده ضابطه تابع $f(x) = (x+a)(x^2+bx+c)$ باید به شکل $f(x) = (x-1)^2 + 2$ باشد، پس داریم:

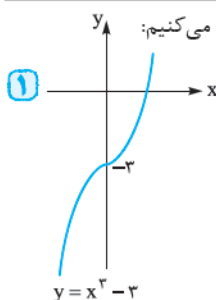
$$\begin{aligned} (x-1)^2 + 2 &= (x+a)(x^2+bx+c) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 2 = x^3 + bx^2 + cx + ax^2 + abx + ac \\ &= x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac \\ &= x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac \end{aligned}$$

حالا باید ضرایب جمله‌های هم‌درجه را مساوی قرار دهیم:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ a + b = -2 \\ ab + c = 3 \\ ac = 1 \end{cases}$$

پس دیگر لازم نیست a, b و c را پیدا کنیم، داریم $ab + c = 3$.

۱۲- گزینه ۲ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



۲) $y = x + 1 \Rightarrow$ خط‌بشیب مثبت صعودی

۳) $y = -x^2 + 4$

$\Rightarrow$ چون سهمی است و دامنه تابع $\mathbb{R}$ است، پس غیرکنوا است

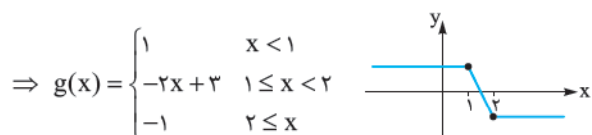
۴) $y = -x + 3 \Rightarrow$ خط‌بشیب منفی نزولی

۱۳- گزینه ۱ نمودار تابع در بازه‌های $[-1, 1]$ و $[4, 7]$ نزولی اکید و در بازه $[1, 4]$ ثابت است. پس تابع در بازه $[-1, 7]$ نزولی است، یعنی $[a, b] = [-1, 7]$. نمودار تابع در بازه $[7, 12]$ صعودی است، پس $[c, d] = [7, 12]$. بنابراین بیشترین مقدار b برابر ۷ و بیشترین مقدار d برابر ۱۲ است پس نسبت b به d برابر است با $\frac{7}{12}$.

تابع $y = x + |x|$ به ازای $x \geq 0$ صعودی اکید است، پس فقط کافی است تابع $y = x[x]$ را بررسی کنیم. تابع $y = x[x]$ در بازه $[0, 1)$ ثابت است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل قسمتی از بازه $[0, 1)$ نباشد، یعنی بازه $[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}]$.

۲۱- گزینه ۲ نمودار تابع $g(x) = |x-2| - |x-1|$ را رسم می‌کنیم:

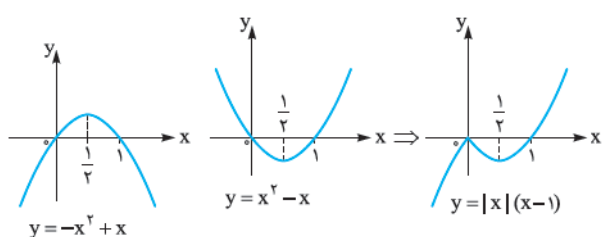
$$\begin{cases} x < 1 \Rightarrow y = -x + 2 + x - 1 = 1 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = -x + 2 - x + 1 = -2x + 3 \\ 2 \leq x \Rightarrow y = x - 2 - x + 1 = -1 \end{cases}$$



تابع در بازه $(-\infty, 1]$ ثابت و در بازه $[1, 2]$ نزولی اکید و در بازه $[2, +\infty)$ ثابت است. پس تابع در کل نزولی است.

۲۲- گزینه ۲ نمودار تابع $y = |x|(x-1)$ را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow y = -x^2 + x \\ x \geq 0 \Rightarrow y = x^2 - x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & x < 0 \\ x^2 - x & x \geq 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع در بازه $[0, \frac{1}{4}]$ نزولی اکید است پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ است.

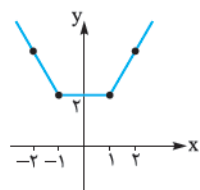
۲۳- گزینه ۲ نمودار تابع $y = |x-1| + |x+1|$ را رسم می‌کنیم:

$$x \leq -1 \Rightarrow y = -x + 1 - x - 1 = -2x$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow y = -x + 1 + x + 1 = 2$$

$$1 \leq x \Rightarrow y = x - 1 + x + 1 = 2x \Rightarrow y = \begin{cases} -2x & x \leq -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & 1 \leq x \end{cases}$$

نمودار تابع در بازه $[-1, 1]$ ثابت و در بازه $(1, +\infty)$ صعودی اکید است، پس تابع در بازه $[-1, +\infty)$ صعودی است. حالا باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعه بازه $[-1, +\infty)$ باشد که می‌شود $[-\frac{1}{4}, +\infty)$.

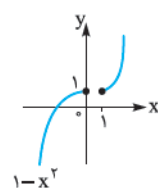


$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < m < 2\sqrt{2} \Rightarrow m = 2 \text{ مقدار صحیح} \\ -2\sqrt{2} < m < -\sqrt{3} \Rightarrow m = -2 \text{ مقدار صحیح} \end{cases}$$

پس حدود m شامل دو عدد صحیح است.

۱۸- گزینه ۱

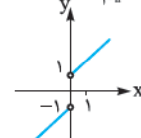
نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 1-x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



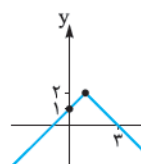
با توجه به نمودار هر کدام از شاخه‌های منحنی، صعودی اکید است اما کل تابع چون $f(0) = f(1)$ است صعودی می‌شود (اکید نیست).

۱۹- گزینه ۲

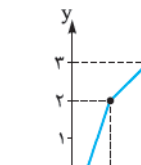
نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



$$f(x) = \frac{|x|}{x} + x = \begin{cases} 1+x & x > 0 \\ -1+x & x < 0 \end{cases}$$

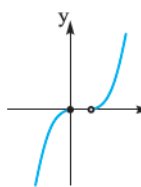


$$f(x) = 2 - |x-1|$$



$$f(x) = 2x - |x-1|$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$$

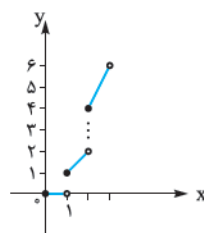


$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

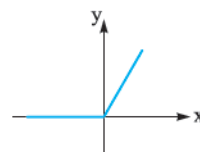
با توجه به نمودارها تابع $f(x) = 2 - |x-1|$ غیریکنوا است و بقیه تابع‌ها صعودی اکید هستند.

۲۰- گزینه ۲ نمودار هر دو تابع را در بازه $[0, 3)$ (بازه‌ای که شامل

تمام گزینه‌ها باشد) رسم می‌کنیم:



$$y = x[x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \\ 2x & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



$$y = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

۲۸- **گزینه ۲:** از بین گزاره‌ها، (ب) و (پ) همواره درست است؛ چون اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_1 > x_2 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ x_1 > x_2 &\Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 > x_2$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_1) > (f+g)(x_2)$$

برای نشان دادن نادرستی گزاره‌های دیگر مثال نقض می‌آوریم:

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2x+3 \quad \text{صعودی} \\ g(x) &= -x \quad \text{نزولی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f+g)(x) = x+3 \quad \text{صعودی}$$

ت) اگر تابع f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f \times g$ صعودی اکید است:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2x+3 \quad \text{صعودی اکید} \\ g(x) &= -3 \quad \text{ثابت} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \times g)(x) = -6x-9 \quad \text{نزولی اکید}$$

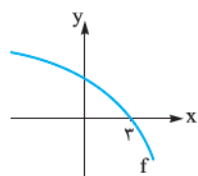
اگر توجه کنید دو گزاره (ب) و (پ) در حقیقت یکسان‌اند:

(ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

(پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

بگویید چرا این دو گزاره یکسان‌اند؟!

۲۹- **گزینه ۱:** f یک تابع نزولی اکید است و $f(3) = 0$ ؛ پس اگر یک نمودار فرضی برای f رسم کنیم:

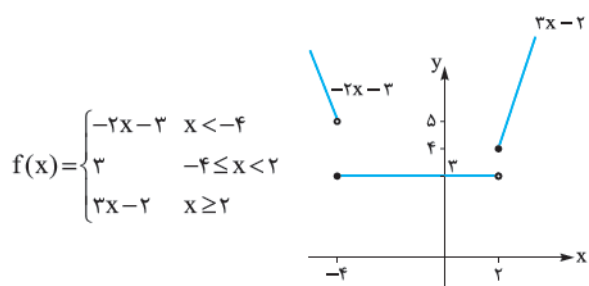


نتیجه می‌گیریم برای $x < 3$ مقدار f مثبت و برای $x > 3$ مقدار f منفی است. حالا برای پیدا کردن دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

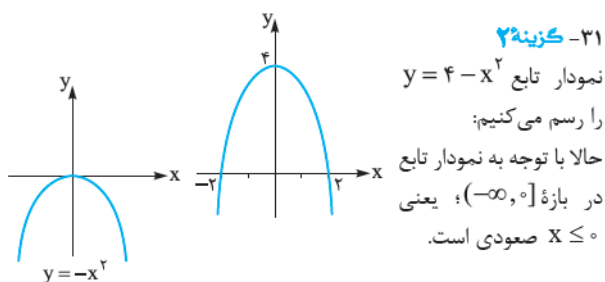
x	0	3	$+\infty$
$f(x)$	+	+	-
x	-	+	+
$xf(x)$	-	+	-

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 3$

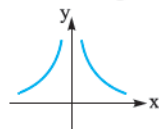
۳۰- **گزینه ۱:** نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار می‌دانیم که تابع در بازه $[-4, +\infty)$ صعودی است (در واقع در بازه $[-4, 2)$ ثابت و در بازه $[2, +\infty)$ صعودی اکید است).



۲۴- **گزینه ۲:** عبارت «برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ برقرار باشد» یعنی می‌خواهیم بازه‌ای را پیدا کنیم که تابع در آن بازه نزولی اکید باشد. برای پیدا کردن این بازه تابع را رسم می‌کنیم:

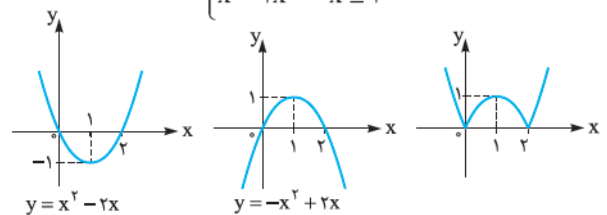


$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

با توجه به نمودار، تابع در بازه $(0, +\infty)$ نزولی اکید است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعه این بازه باشد که می‌شود بازه $(0, 1)$.

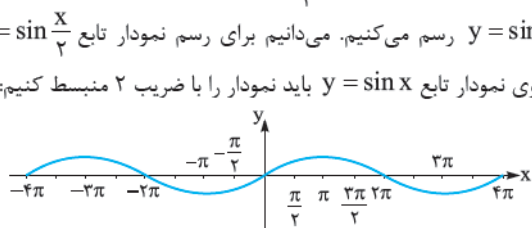
۲۵- **گزینه ۲:** نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$



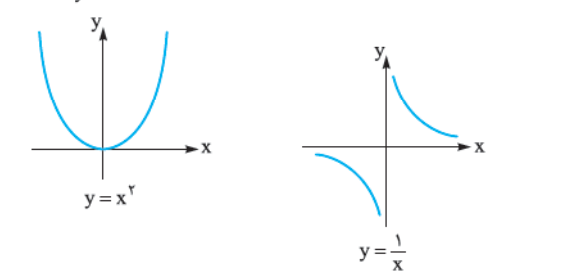
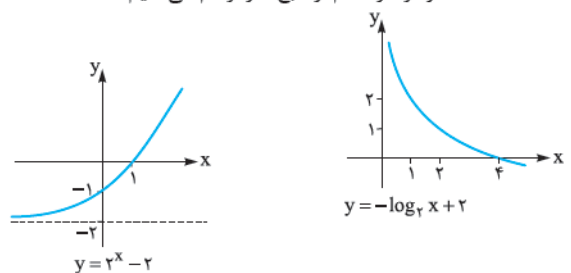
● پس تابع در $(1, 2)$ نزولی است و $b - a = 2 - 1 = 1$.

۲۶- **گزینه ۲:** نمودار تابع $y = \sin \frac{x}{2}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sin x$ رسم می‌کنیم. می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $y = \sin \frac{x}{2}$ از روی نمودار تابع $y = \sin x$ باید نمودار را با ضریب ۲ منبسط کنیم:



حالا برای این که بازه‌ای را تعیین کنیم که با افزایش طول نقطه مقدار تابع کاهش نیابد، باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که تابع در هیچ قسمت آن نزولی نباشد؛ یعنی بازه‌ای که تابع در تمام آن صعودی باشد که می‌شود بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ، یعنی ۲.

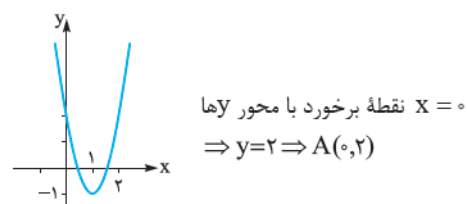
۲۷- **گزینه ۲:** نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودارها، تابع $y = \frac{1}{x}$ غیریکتوا و یک‌به‌یک است.

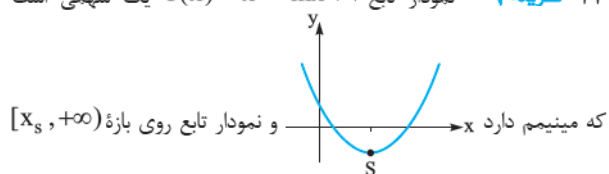
۳۲- گزینه ۲ نمودار تابع $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ (که یک سهمی است) را رسم می‌کنیم: (یادمان هست که طول رأس سهمی از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید)

$$y = 3x^2 - 6x + 2$$

$$x_S = -\frac{-6}{2 \times 3} = \frac{6}{6} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3 - 6 + 2 = -1 \Rightarrow S(1, -1)$$


حالا با توجه به نمودار، تابع در بازه $[-1, 1]$ نزولی و در بازه $[1, 2]$ صعودی است؛ پس تابع روی بازه $[-1, 2]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۳۳- گزینه ۳ نمودار تابع $f(x) = x^2 - mx + 3$ یک سهمی است



صعودی اکید است: پس برای این که تابع روی بازه $[1, +\infty)$ صعودی اکید باشد، باید $x_S \leq 1$ باشد، پس:

$$-\frac{b}{2a} \leq 1 \Rightarrow \frac{m}{2} \leq 1 \Rightarrow m \leq 2$$