بسم الله الرحمن الرحیم

صفر تا صد

هندسه پایه

مجموعه کتاب‌های جمع‌بندی کنکور

علیرضا قومی
محسن زرینچه

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

شنیدیم که خدمت به خلق خدا بزرگ‌ترین عبادت است. در انتشارات خوشخوان سیاست بر این است که در حد توان خدمترسانی به دانش‌آموزان مستعد را از حالت شعار به عمل نزدیک کرده و این موضوع را سرلوحه‌ی اعمال خود قرار دهیم. در این راستا و برای نیل به این هدف نیاز به دعای دانش‌آموزان عزیز و دل‌پاک داریم، آخر هر چه باشد جوان‌ها به ملکوت نزدیک‌ترند و دعایشان زود مستجاب می‌شود. دعای واجبتر آن است که انجام این اعمال خالصانه و صادقانه فقط در جهت رضایت حق‌تعالی باشد که اگر چنین شود شیرینی این خدمتگزاری دوچندان شده و گذران عمر، مفید و دلچسب خواهد شد که اگر چنین شد در روز آخر عمر بر خلاف روز تولد که ما گریان بودیم و همه خندان، ما خندان خواهیم بود و بقیه گریان. به هر حال ما انسان‌ها به امید زنده‌ایم و ما امید داریم شما عزیزان ما را از دعای خیر خود محروم نکنید.

یکی از مجموعه‌هایی که خدمتگزاران شما در انتشارات خوشخوان در راستای توضیحات عبارات بالا، تدوین و به داوطلبان کنکور ارائه کرده است مجموعه‌ی حاضر است که مخصوص دوران جمع‌بندی است. این مجموعه ویژگی‌های زیر را دارا است:

- اهمیت هر فصل از کتاب در کنکور سراسری با ارائه‌ی جداول و نمودارهای مرتبط، شرح داده شده است.
- مطالب هر فصل به زیرموضوعاتی تقسیم شده و اهمیت هر زیرمجموعه در کنکور سراسری بیان شده است.
- نکات مهم هر فصل در ذیل هر زیرموضوعی یادآوری شده‌اند که برای مرور آن‌ها داوطلب شرکت در کنکور وقت زیادی صرف نمی‌کند.
- برای تفهیم نکات فوق، از تست‌های تالیفی به همراه پاسخ تشریحی مفصل کمک گرفته شده است.
- سوالات کنکور سراسری و بعضاً دانشگاه آزاد اسلامی (که فاصله‌ی زیادی با قالب سوالات کنکور سراسری نداشته باشند) در چند سال اخیر با توجه به زیرموضوعات اشاره شده به دنبال هم آورده شده‌اند که جواب تشریحی همه‌ی آن‌ها به صورت کامل و جامع ارائه شده است.
- در انتهای هر فصل سه آزمون جامع آورده شده است که برای جلوگیری از حجیم شدن کتاب فقط پاسخ کلیدی آنان در انتهای کتاب آمده است (پاسخ تشریحی آن‌ها بر روی سایت انتشارات موجود است که در صورت ضرورت می‌توانید به آن رجوع کنید). توجه کنید که تلاش شده است سطح آزمون‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ساده، متوسط و دشوار باشد.

با توجه به توضیحات فوق سعی شده است که کتاب حاضر برای نیازها و طیف‌های گوناگون دانش‌آموزان قابل استفاده باشد. توصیه می‌شود به نکات ذیل توجه کنید:

- نکات و تست‌های تالیفی کنار آنان برای دانش‌آموزانی است که قبلاً درس را به صورت مفهومی یاد گرفته‌اند و احساس می‌کنند برای یادآوری بعضی از فرمول‌ها و یا تعاریف به مروری گذرا نیاز دارند. بنابراین کسانی که به فصلی از کتاب تسلط کافی دارند نیازی به رجوع به این قسمت از کتاب ندارند.

- سوالات کنکور سراسری در هر زیرموضوعی به همراه پاسخ تشریحی که بلافاصله بعد از سوال ارائه می‌شود به دنبال هم چیده شده‌اند. در واقع نقطه‌ی قوت این کتاب نسبت به کتب جمع‌بندی موجود در بازار، همین قسمت است. با نگاهی به این سوالات تشابه سوالات کنکور در سنوات مختلف در هر زیرموضوعی را مشاهده خواهید کرد. رجوع به این قسمت را به همه‌ی دانش‌آموزان توصیه

می‌کنیم چرا که با دیدن سوال اول، دوم، . . .و مشاهده‌ی جواب آن‌ها که به هم شباهت دارند می‌توانید به سوالات اخیر در همان موضوع به راحتی جواب دهید.

ـ آزمون‌های سه‌گانه سعی شده است استاندارد باشند. البته چون درجه‌ی سختی سوالات در کنکور قابل پیش‌بینی نیست بنابراین این آزمون‌ها در سه سطح آسان، متوسط و دشوار طراحی شده‌اند. مراجعه‌ی همه‌ی دانش‌آموزان مخصوصاً دانش‌آموزان قوی که نیازی به مرور نکات فصل نمی‌بینند، به این آزمون‌ها توصیه می‌شود.

در پایان لازم می‌بینم از همه‌ی دوستان و همکاران اعم از مولفین و دبیران گرامی، پرسنل انتشارات، واحد حروفچینی و صفحه‌آرایی که در تولید این اثر زحمات بی‌شائبه‌ای داشتند تشکر و قدردانی نمایم و از شما دانش‌آموزان و احیاناً دبیران گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنید تقاضامندم نقصان و ضعف‌های آن را بر ما ببخشایید و با انتقال و اعلام آن‌ها به انتشارات، در بازنویسی و رفع آن نواقص یاور ما در چاپ‌های بعدی کتاب باشید.

به یاد دارم که در دوره‌ی دانش‌آموزی ما که خبری از اینترنت و رسانه‌های امروزی نبود، داوطلبین کنکور در دهه‌ی آخر شهریور در مقابل کیوسک‌های روزنامه‌فروشی صف می‌بستند تا با تهیه‌ی روزنامه‌ی اعلام نتایج کنکور از وضعیت قبولی خود آگاه شوند. در آن زمان صفحه‌ی اول روزنامه مملو از عکس داوطلبانی بود که در فاصله‌ی بین کنکور و اعلام نتایج، به درجه‌ی رفیع شهادت نائل آمده بودند. این اثر را تقدیم می‌کنم به همه‌ی شهدای دانش‌آموزی که با نثار جان و خون خود، امنیت و آسایش را برای ما و شما باقی گذاشته‌اند. روحشان شاد

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

والسلام علی من اتبع الهدی

مقدمه مؤلف

الحمدلله رب العالمین

هندسه در میان مباحث ریاضی به واسطه‌ی درک شهودی‌اش توان حل مسأله و خلاقیت دانش‌آموزان را مورد سنجش قرار می‌دهد و از دیرباز به عنوان ابزاری برای پرورش خلاقیت انسان مورد توجه اهالی علم بوده است.

همه‌ی این دلایل کافی است تا درس هندسه پایه از میان ۵۵ تست ریاضی درکنکور سراسری، ۸ تست را به خود اختصاص دهد که این میزان یعنی تقریباً ۱۵ درصد کل نمره‌ی ریاضی. پس لازم است دانش‌آموزان به خوبی بر این درس مسلط شوند.

تا حالا، چند بار این جمله را شنیده‌اید: «تست‌های هندسه‌ی پایه‌ی کنکور سخت هستند؟»، «هندسه پایه، کار هر کسی نیست!» و یا مثلاً پیشنهاد «اصلاً هندسه پایه را درکنکور رها کن!»؟

این حرف‌ها ناشی از این است که دانش‌آموزان عزیز به جای یادگرفتن «مسأله حل کردن»، «حل مسأله»ها را یاد می‌گیرند و در این میان برخی کتاب‌های کمک‌آموزشی نیز با ارائه‌ی فرمول در قالب جدول‌هایی برای حفظ راحت‌تر، حرف از حل این مشکل می‌زنند؛ اما این کار جز دلسردی بیش‌تر از حل مسائل، دستاورد دیگری نداشته است.

ضرورت آماده‌سازی دانش‌آموزان برای روبرویی با این درس درکنکور و داشتن دورنمایی از تمام مشکلات موجود بر سر راه، ما را بر آن داشت تا با جمع‌آوری تست‌های کنکور سال‌های اخیر و ارائه‌ی راه‌کار با ضمیمه ساختن نکات اساسی و مهم که در آن‌ها استفاده می‌شود به دانش‌آموزان عزیز نشان دهیم که کسب مهارت در حل مسائل هندسه کار بسیار آسان و سهل‌الوصولی است.

جالب این‌که هم دانش‌آموزان توانمند در مبحث هندسه پایه، با مرور تست‌های کنکور در دوران جمع‌بندی و هم دانش‌آموزان متوسط به واسطه‌ی دیدن الگوهای مختلف تست‌های کنکور می‌توانند از این کتاب بهره‌مندی کامل را ببرند.

در پایان از استاد بزرگوار جناب آقای حاجی‌زاده که فرصت تهیه و تنظیم این کتاب را ایجاد کردند و از دوست عزیز آقای رسول محسنی‌منش که کمک فراوانی در به ثمر رسیدن این تلاش داشتند، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

فهرست مطالب

فصل ۶ فضایی ۱۹۵

۱

استدلال

۱-۱ معرفی

در این فصل که به نام «استدلال» می‌باشد مجموعه‌ای از نکات و مطالبی که دانش‌آموزان در سال‌های دوم و سوم دبیرستان در فصل اول کتاب هندسه خوانده‌اند آمده است.

این فصل بخش‌های مختلفی دارد که جلوتر به آن اشاره خواهیم کرد منتها دو بخش آن‌ها به نام انواع مثلث و چهارضلعی‌ها بحث‌های محبوب طراحان می‌باشند و همان‌طور که در جداول بعدی خواهید دید از این دو بخش تست‌های به مراتب بیشتری درکنکور سراسری آمده است.

جدول ۱-۱ تعداد سؤالات استدلال درکنکور سراسری داخل (ریاضی و تجربی):

سال	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
تعداد	۵	۱	–	۱	۲	۶	۴	۱	۱	۴	۳	۳	۲	۳	۲	۱	۱	۳

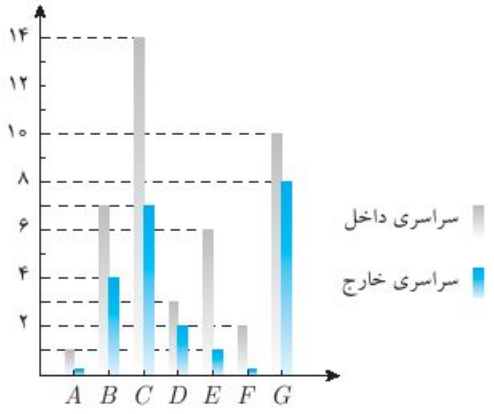
سال								
تعداد								

A. ... B. ... C. ...

D. ... E. ... F. ...

G. ...

نمودار ۱-۱ نمودار توزیع سؤالات کنکور سراسری داخل و خارج در بخش‌های مختلف این فصل



۱-۲ نکات برجسته‌ی فصل

۱-۲-۱ زاویه

۱. α و β را متمم گوییم، هرگاه داشته باشیم: $\alpha+\beta=۹۰^\circ$

۲. α و β را مکمل گوییم، هرگاه داشته باشیم: $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$

۳. اگر دو زاویه برابر باشند، متمم‌ها و مکمل‌هایشان نیز با هم برابر است.

تست ۱. دو زاویه A و B متمم‌اند و اندازه زاویه A برابر $\frac{۱}{۶}$ اندازه مکمل زاویه B است. مکمل زاویه A چند درجه است؟

۱) ۱۷۲ ۲) ۱۶۲ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۸

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

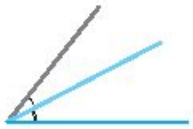
$A+B=۹۰^\circ$

$A=\frac{۱}{۶}(۱۸۰^\circ-B) \Rightarrow ۹۰^\circ-B=\frac{۱}{۶}(۱۸۰^\circ-B)$

$\Rightarrow ۵۴۰^\circ-۶B=۱۸۰^\circ-B \Rightarrow ۵B=۳۶۰^\circ \Rightarrow B=۷۲^\circ$

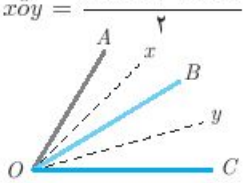
$\Rightarrow A=۹۰^\circ-۷۲^\circ=۱۸^\circ \Rightarrow A_{\text{مکمل}}=۱۸۰^\circ-۱۸^\circ=۱۶۲^\circ$

۴. به دو زاویه که دارای رأس مشترک و یک ضلع مشترک باشند، دو زاویه‌ی مجاور گوییم.



۵. زاویه‌ی بین نیمسازهای دو زاویه مجاور، برابر با نصف مجموع آن دو زاویه است.

$$x\hat{o}y=\frac{A\hat{O}B+B\hat{O}C}{۲}$$



۶. به دو زاویه مجاور که مجموع آن‌ها ۱۸۰ درجه باشد، دو زاویه‌ی مجانب می‌گوییم.

۷. نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب بر هم عمودند.

تست ۲. در دو زاویه‌ی مجاور و مکمل اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است. زاویه‌ی بین نیمسازها چند درجه است؟

۱) ۶۰° ۲) ۷۵° ۳) ۸۰° ۴) ۹۰°

حل: ۱ ۲ ۳ ✓

طبق نکته بالا، زاویه‌ی بین دو نیمساز زاویه‌های مجاور مکمل (مجانب) ۹۰ درجه است.

تست ۳. اگر دو زاویه‌ی $۲x - y$ و $\frac{x}{۳} + \frac{۳y}{۲}$ مجانب بوده و دو زاویه‌ی $\frac{x}{۲}$ و $\frac{y}{۴}$ مجاور یکدیگر باشند. به طوریکه زاویه‌ی بین نیمسازهایشان ۲۵ درجه باشد. مکمل $۲y - x$ کدام است؟

۱) ۸۰° ۲) ۱۴۰° ۳) ۴۰° ۴) ۶۰°

حل: ✓ ۲ ۳ ۴

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{y}{۴} + \frac{x}{۲}\right) = ۲۵^\circ \xrightarrow{\times ۸} y + ۲x = ۲۰۰^\circ \Rightarrow y = ۲۰۰^\circ - ۲x \qquad (۱)$$

$$\frac{x}{۳} + \frac{۳y}{۲} + ۲x - y = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\times ۶} ۲x + ۹y + ۱۲x - ۶y = ۱۰۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۴x + ۳y = ۱۰۸۰^\circ \xrightarrow{(۱)} ۱۴x + ۳(۲۰۰ - ۲x) = ۱۰۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۴x + ۶۰۰^\circ - ۶x = ۱۰۸۰^\circ \Rightarrow ۸x = ۴۸۰^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow y = ۲۰۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۸۰^\circ$$

$$۲y - x = ۱۶۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \text{مکمل آن} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

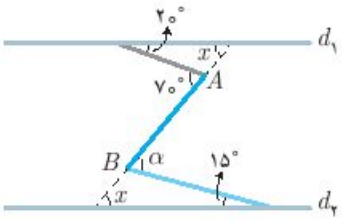
۸. زاویه‌های متقابل به رأس مساوی‌اند.

۹. اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند آنگاه زوایای حاده‌ی ایجاد شده با هم و زوایای منفرجه‌ی ایجاد شده با هم مساوی‌اند. و هر زاویه‌ی حاده با هر زاویه‌ی منفرجه مکمل است.

تست ٤. در شکل زیر دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی α کدام است؟

۱) ۵۵° ۲) ۶۵° ۳) ۷۵° ۴) ۴۵°

حل: ۱ ✓ ۳ ۴



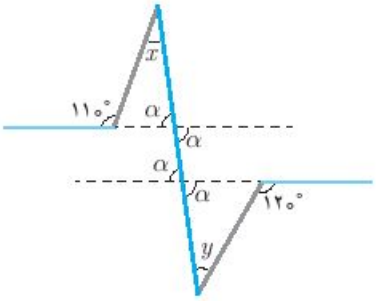
$$۲۰^\circ + x = ۷۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

$$\alpha = x + ۱۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۵۰^\circ + ۱۵^\circ = ۶۵^\circ$$

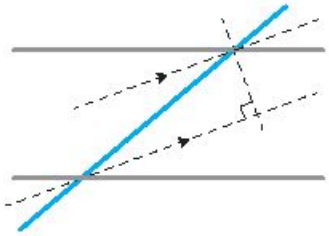
تست ۵. در شکل زیر $d_۱$ و $d_۲$ موازی هستند. تفاضل x و y کدام است؟

۱) ۱۰° ۲) ۲۰° ۳) ۲۵° ۴) ۳۰°

حل: ✓ ۲ ۳ ۴



$$y + \alpha = ۱۲۰^\circ$$
$$x + \alpha = ۱۱۰^\circ$$
$$\text{تفاضل}\ y - x = ۱۰^\circ$$



۱۰. نیمسازهای زوایای حاده با هم و نیمسازهای زوایای منفرجه با هم موازیند.

۱۱. نیمساز زاویه حاده و منفرجه بر هم عمودند.

۱-۲-۲ مثلث و اجزای آن

۱۲. مجموع زاویای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° و مجموع زوایای خارجی هر مثلث برابر ۳۶۰° است.

۱۳. هر زاویه‌ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش.

تست ۶. سه زاویه مثلثی متناسب با اعداد ۶،۳،۱ می‌باشند. اختلاف کوچکترین و بزرگترین زاویه‌ی خارجی منفرجه این مثلث چند درجه است؟

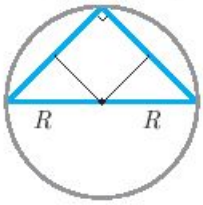
۷۲°

۱ ۲ ✓ ۴

زوایای خارجی

۱-۲-۲-۱ عمودمنصف

۱۴. خطی است که در وسط یک ضلع بر آن عمود است. در هر مثلث، سه عمودمنصف وجود دارد که همرس‌اند. و محل همرسی عمودمنصف‌ها مرکز دایره‌ای است که رئوس مثلث بر محیط آن قرار دارند.

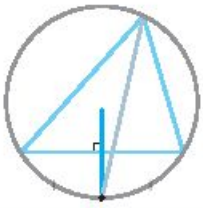


۱۵. نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌ها در مثلث حاده زاویه داخل و در مثلث منفرجه الزاویه خارج مثلث است و در مثلث قائم‌الزاویه روی وتر است.

۱۶. در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایره‌ی محیطی نصف وتر است.

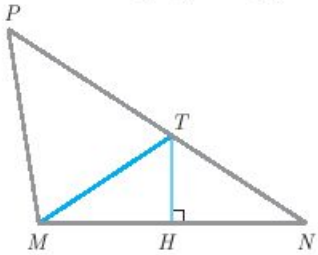
۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایره‌ی محیطی مثلث، $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع مثلث است.

۱۸. در صفحه‌ی مثلث یک نقطه وجود دارد که از سه رأس آن به یک فاصله باشد و آن محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است.



۱۹. عمودمنصف هر ضلع مثلث به جز مثلث متساوی‌الساقین با نیمساز داخلی زاویه‌ی مقابل آن ضلع، همواره همدیگر را بیرون مثلث قطع می‌کنند که نقطه‌ی برخورد وسط کمان دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

تست ۷. در مثلث MNP، $P\hat{M}N = ۳P\hat{N}M$ و عمودمنصف ضلع MN ضلع PN را در نقطه‌ی T قطع کرده است. اگر $PM = ۶$ و $PN = ۱۰$ آن‌گاه طول MT چقدر است؟



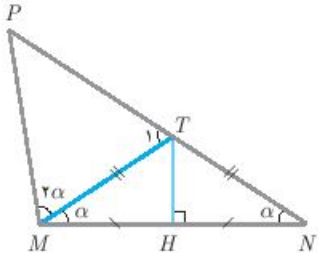
۱) ۸

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۳/۵

حل: ۱ ۲ ✓ ۴



$$\hat{T}_۱ = \alpha + \alpha = ۲\alpha$$

$$\Rightarrow PM = PT \qquad (۱)$$

$$MT = TN = PN - PT$$

$$\overset{(۱)}{=} ۱۰ - PM = ۱۰ - ۶ = ۴$$

تست ۸. شعاع دایره‌ی محیطی مثلثی که زاویه‌های آن به نسبت ۲، ۴، ۶ می‌باشند و اندازه‌ی کوچک‌ترین ضلع آن ۴ می‌باشد کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

حل: ۱ ۲ ✓ ۴

$$۲x + ۴x + ۶x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

$$\hat{A} = ۳۰^\circ, \hat{B} = ۶۰^\circ, \hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow$$

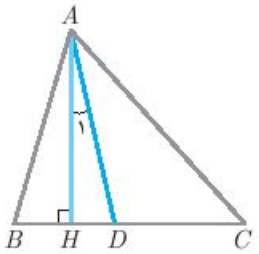
$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ قائم‌الزاویه است} \Rightarrow \begin{cases} R = \text{نصف وتر} \\ \text{نصف وتر} = \text{ضلع روبه‌رو به } ۳۰^\circ \end{cases} \rightarrow R = ۴$$

۱-۲-۲-۲ ارتفاع

۲۰. سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند که به این نقطه مرکز ارتفاعی گفته می‌شود. و به مثلثی که از پای ارتفاع‌ها تشکیل می‌شوند مثلث ارتفاعی گفته می‌شود.

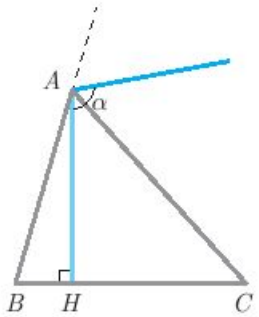
۲۱. در مثلث دلخواه، زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز یک رأس، مساوی نصف تفاضل دو زاویه‌ی دیگر است.

$$A_۱ = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲}$$



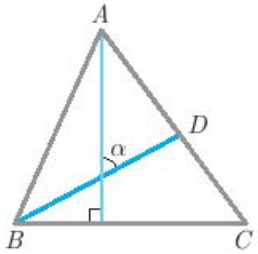
۲۲. در هر مثلث زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز خارجی یک رأس برابر است با:

$$\alpha = ۹۰^\circ + \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲}$$



۲۳. در هر مثلث، زاویه‌ی بین ارتفاع یک ضلع و نیمساز نظیر رأس دیگر برابر است با:

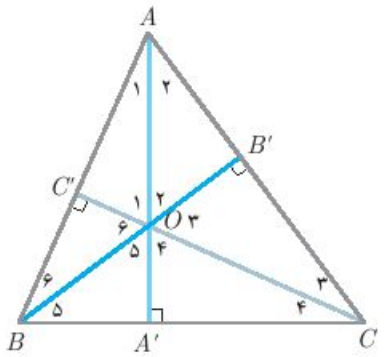
$$\alpha = \frac{\hat{C} + \hat{A}}{۲}$$



تست ۹. در شکل مقابل AA'، BB'، CC' سه ارتفاع ABC می‌باشند. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\hat{۱} = \hat{۴}$ ۲) $\hat{۲} = \hat{۵}$ ۳) $\hat{۳} = \hat{۶}$ ۴) $\hat{۱} = \hat{۵}$

حل: ۱ ۲ ۳ ✓

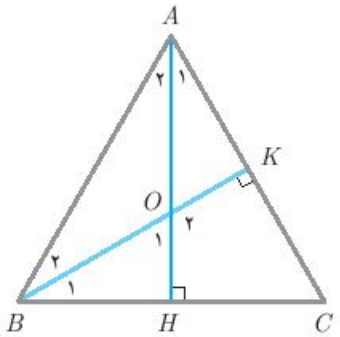


$$\left.\begin{array}{l}\hat{۱}+\hat{O}_۱=۹۰\\ \hat{۴}+\hat{O}_۴=۹۰\\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۴\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{۱}=\hat{۴}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{۲}+\hat{O}_۲=۹۰\\ \hat{۵}+\hat{O}_۵=۹۰\\ \hat{O}_۲=\hat{O}_۵\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{۲}=\hat{۵}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{۳}+\hat{O}_۳=۹۰\\ \hat{۶}+\hat{O}_۶=۹۰\\ \hat{O}_۳=\hat{O}_۶\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{۳}=\hat{۶}$$

تست ۱۰. در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BK را رسم می‌کنیم. زاویه بین دو ارتفاع برابر کدام است؟



۱) $۹۰ - \frac{\hat{C}}{۲}$ ۲) $۹۰ + \frac{\hat{C}}{۲}$

۳) $۹۰ - \hat{C}$ ۴) $۹۰ + \hat{C}$

حل: ۱ ۲ ۳ ✓

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱=۹۰-\hat{B}_۱\\ \hat{B}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ\rightarrow \hat{B}_۱=۹۰-\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_۱=۹۰-(۹۰-\hat{C})$$

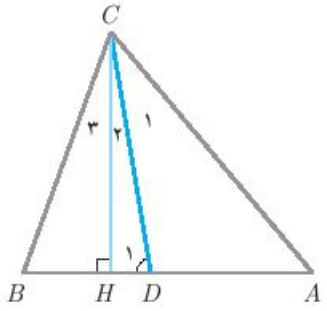
$$=۹۰-۹۰+\hat{C}=\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۲=۱۸۰-\hat{C}$$

تست ۱۱. زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۳، ۴ و ۵ هستند. زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز نظیر زاویه‌ی بزرگتر کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) $۷/۵^\circ$ ۳) $۲۲/۵^\circ$ ۴) ۲۵°

حل: ۱ ✓ ۳ ۴



$$۳x + ۴x + ۵x = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۲x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = ۴۵^\circ \\ B = ۶۰^\circ \\ C = ۷۵^\circ \end{cases}$$

$$\text{نیمساز } CD \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ + \hat{C}_۳ = \frac{۷۵^\circ}{۲} = ۳۷/۵^\circ$$

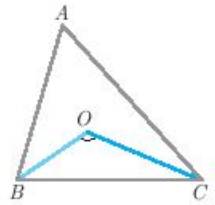
$$\hat{D}_۱ = \hat{A} + \hat{C}_۱ + ۴۵^\circ + ۳۷/۵^\circ = ۸۲/۵^\circ$$

$$\hat{C}_۲ = ۹۰^\circ - \hat{D}_۱ = ۹۰^\circ - ۸۲/۵^\circ = ۷/۵^\circ$$

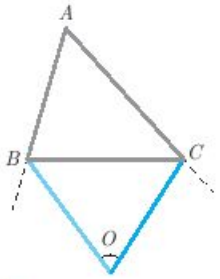
۱-۲-۲-۳ نیمساز

۲۴. نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث دلخواه در یک نقطه همرس‌اند که این نقطه مرکز دایره‌ای است که داخل مثلث است و بر اضلاع آن مماس است (دایره‌ی محاطی)

۲۵. در هر مثلث ABC:

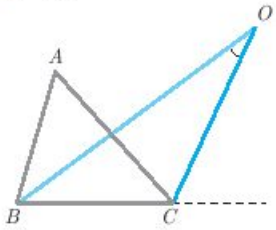


اگر نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی B و C یکدیگر را در O قطع کنند، داریم: $B\hat{O}C = ۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲}$



اگر نیمسازهای خارجی دو زاویه‌ی B و C یکدیگر را در O قطع کنند، داریم:

$$B\hat{O}C = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

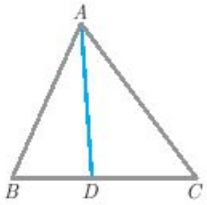


ای . . . . . .

. . . . . O . . . . . C B

$$B\hat{O}C = \frac{\hat{A}}{\ }$$

۲۶. . . . . . A . . . . . AD . ABC . . . .



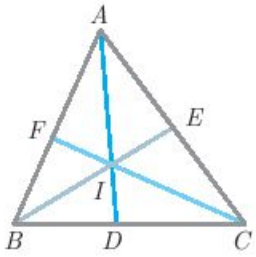
الف. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

ب. $AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$

. . . . . .

۲۷. . . . . . .

۲۸. . . . . . .

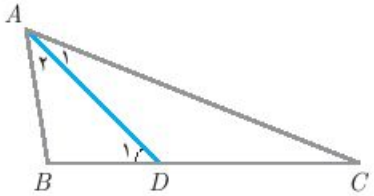


$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a},$$
$$\frac{BI}{IE} = \frac{a+c}{b},$$
$$\frac{CI}{IF} = \frac{b+a}{c}$$

تست ۱۲. . . . . ABC . . . . $\hat{B} = \ ^\circ + \hat{C}$ . . . . A . . . . BC . . . .

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۷۵°

حل ۱ ✓ ۳ ۴

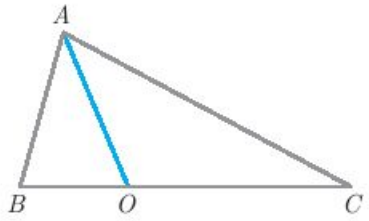


$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \ ^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۱ + \ ^\circ + \hat{C} + \hat{C} = \ ^\circ$$
$$(\hat{A}_۱ + \hat{C}) = \ ^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{C} = \ ^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{C} = \ ^\circ$$

تست ۱۳. در شکل روبه‌رو داریم:

$AB = ۳$ و $AC = ۶$ و $AD = \sqrt{۱۰}$ و AD نیمساز زاویه‌ی A است. طول ضلع BC کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $\frac{۱۱}{۲}$ ۴) ۶



حل: ۱ ۲ ۳ ✓

$$\begin{cases} AD^۲ = AB.AC - BD.DC & (۱) \\ \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow DC = ۲BD & (۲) \end{cases}$$

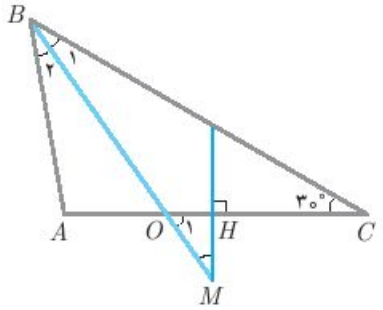
$$\xrightarrow{(۲),(۱)} ۱۰ = ۳ \times ۶ - ۲BD^۲ \Rightarrow ۲BD^۲ = ۸ \Rightarrow BD = ۲ \Rightarrow CD = ۴$$

$$BC = BD + CD = ۶$$

تست ۱۴. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۱۰۰$ و $\hat{C} = ۳۰$ می‌باشد، زاویه‌ی حاده بین نیمساز داخلی B و عمودمنصف ضلع AC چند درجه است؟

۱) ۲۰° ۲) ۲۵° ۳) ۳۰° ۴) ۳۵°

حل: ۱ ۲ ۳ ✓



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۰۰^\circ + ۳۰^\circ + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۵۰^\circ$$

$$\hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ - (\hat{A} + \hat{B}_۲)$$

$$= ۱۸۰^\circ - (۱۰۰^\circ + ۲۵^\circ) = ۵۵^\circ$$

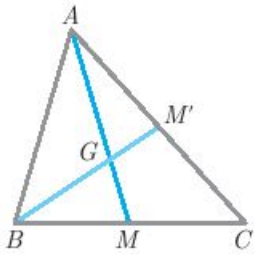
$$\hat{M} + \hat{D}_۱ = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M} = ۹۰^\circ - \hat{D}_۱ = ۹۰^\circ - ۵۵^\circ = ۳۵^\circ$$

۱-۲-۲-۴ میانه

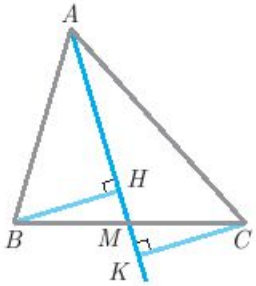
۲۹. سه میانه در هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند که این نقطه را معمولاً با G نمایش می‌دهند که آن‌را مرکز ثقل مثلث می‌نامند.

۳۰. میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند.



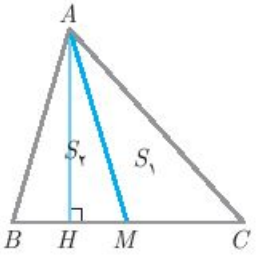
$GM = \frac{۱}{۲}AG$

۳۱. فاصله‌ی دو رأس مثلث از میانه‌ی نظیر ضلع سوم برابراست و برعکس



میانه $AM \Leftrightarrow BH = CK$

۳۲. میانه‌ی هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کنند.



$S_۱ = S_۲ \Leftrightarrow AM$

۳۳. اگر در مثلثی هر سه میانه را رسم کنیم، شش مثلث با مساحت‌های مساوی به وجود می‌آید.

۳۴. اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم مثلثی به وجود می‌آید (مثلث میانه‌ای) که مساحتش $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث و محیطش نصف محیط مثلث است.

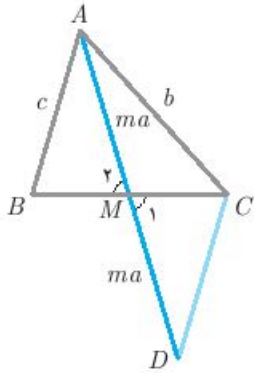
۳۵. اگر با میانه‌های مثلث ABC مثلث جدیدی بسازیم به‌طوری که s' مساحت مثلث جدید باشد آنگاه:

$$S' = \frac{۳}{۴}S$$

تست ۱۵. در مثلثی طول اضلاع a، b و c است و ma میانه‌ی نظیر BC می‌باشد. مثلث دیگری با طول اضلاع b، c و $۲ma$ رسم کرده‌ایم. طول میانه‌ی وارد بر ضلع $۲ma$، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ گردیده است. اندازه‌ی BC کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل: ✓ ۲ ۳ ۴



$$\begin{cases} AM = MD \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ MC = BM \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{\triangle}{AMB} = \overset{\triangle}{MCD}$$

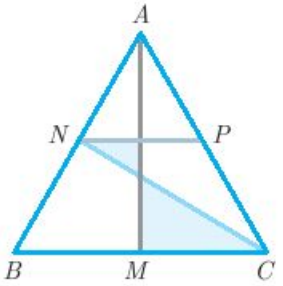
$$\Rightarrow CD = AB = c$$

مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ مثلث مطلوب است که CM میانه‌ی ضلع $۲ma$ می‌باشد پس:

$$BC = ۲CM = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

تست ۱۶. در شکل مقابل M، N، P وسط‌های اضلاع‌اند. اگر مساحت قسمت‌های هاشورخورده ۵ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۰ ۳) ۲۴ ۴) ۴۶



حل: ۱ ۲ ✓ ۴

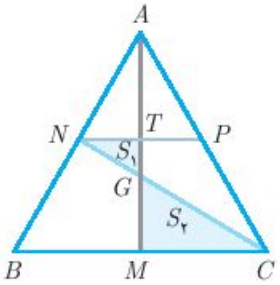
$$S_۱ + S_۲ \xrightarrow{(۱),(۲)}$$

$$\frac{S_{ABC}}{۲۴} + \frac{S_{ABC}}{۶} = \frac{۵S_{ABC}}{۲۴} = ۵$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = ۲۴$$

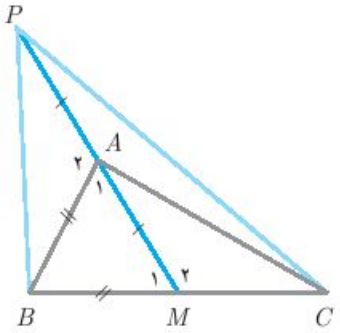
اگر همه‌ی ۳ میانه‌ی مثلث را رسم کنید ۶ مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود پس:

$$S_۲ = \frac{S_{ABC}}{۶}$$



$PB = PM$ $AC = PB$ $\hat{C} = A\hat{B}C$ $A\hat{B}C = \hat{C}$

حل: ۱ ۲ ✓۳ ۴



$$AB = \frac{BC}{۲} = BM \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{M}_۱ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} \hat{A}_۲ = \hat{M}_۱ + \hat{B} \\ \hat{M}_۲ = \hat{A}_۱ + \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{(۱)} \hat{A}_۲ = \hat{M}_۲$$

$$\begin{cases} AP = AM \\ AB = BM = CM \\ \hat{A}_۲ = \hat{M}_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABP} = \overset{\Delta}{MAC} \Rightarrow \begin{cases} AC = BP \\ C\hat{A}M = A\hat{P}B \\ M\hat{C}A = A\hat{B}P \end{cases}$$

تست ۱۸. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی B بر میانه‌ی ضلع BC عمود است. کدام رابطه بین اضلاع این مثلث برقرار است؟

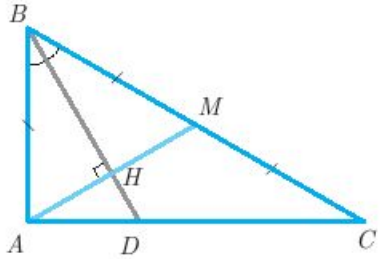
۱) $AC = ۲AB$

۲) $BC = ۲AB$

۳) $AC + BC = ۲AB$

۴) $AB + AC = ۲BC$

حل: ۱ ✓۲ ۳ ۴



در مثلث ABM، BH هم نیمساز و هم ارتفاع می‌باشد پس ABM مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد در نتیجه $AB = BM$

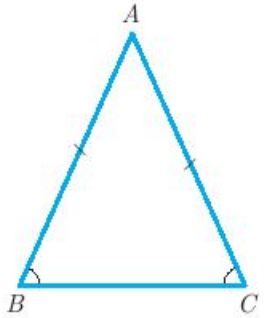
$$AB = \frac{BC}{۲} \Rightarrow BC = ۲AB$$

۱-۲-۳ انواع مثلث

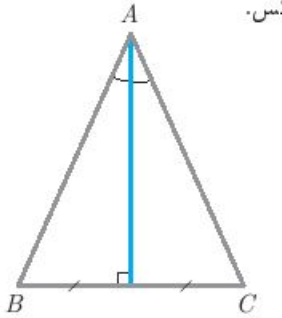
۱-۲-۳-۱ متساوی‌الساقین

مثلثی است که دارای دو ضلع برابر باشد.

۳۶. زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم مساوی‌اند.

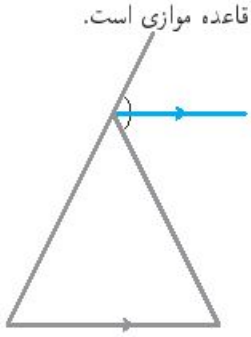


۳۷. میانه، نیمساز و ارتفاع نظیر قاعده بر هم منطبق‌اند و برعکس.

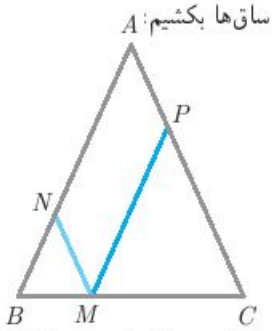


۳۸. ارتفاع‌های نظیر دو ساق مساوی‌اند و برعکس. همچنین میانه‌ها و نیمسازهای نظیر دو ساق مساوی‌اند و برعکس.

۳۹. نیمساز خارجی زاویه‌ی روبه‌رو به قاعده (رأس مثلث) با قاعده موازی است.

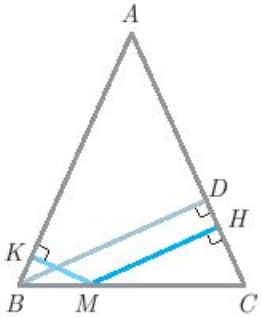


۴۰. اگر از یک نقطه‌ی دلخواه روی قاعده، دو خط به موازات ساق‌ها بکشیم:



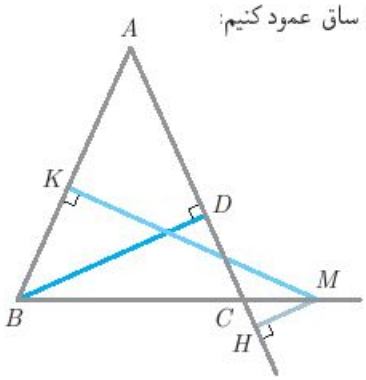
$MN + MP =$ مقدار ثابت $= AB = AC$

۴۱. اگر از یک نقطه‌ی دلخواه روی قاعده، عمود کنیم به دو ساق:



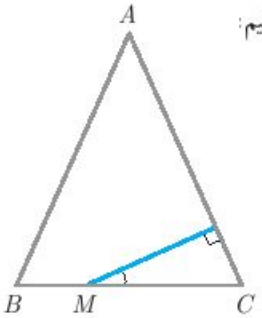
$MH + MK = BD =$ مقدار ثابت

۴۲. اگر از یک نقطه‌ی دلخواه روی امتداد قاعده به دو ساق عمود کنیم:



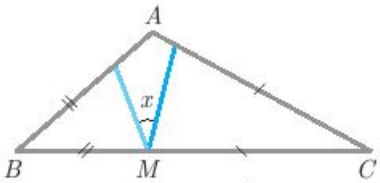
$|MH - MK| = BD =$ مقدار ثابت

۴۳. اگر از یک نقطه‌ی دلخواه روی قاعده به یک ساق عمود کنیم:



مقدار ثابت $= \frac{\hat{A}}{۲} = \hat{M}$

۴۴. در شکل روبه‌رو مقدار زاویه x برابر است با:

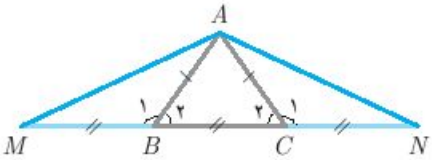


$\hat{x} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$

تست ۱۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC قاعده BC را از هر دو طرف با اندازه‌های برابر تا M و N امتداد می‌دهیم. اگر در مثلث $\overset{\Delta}{AMN}$ کوچکترین زاویه ۲۵ درجه باشد بزرگترین زاویه آن چند درجه است؟

۱) ۱۱۰° ۲) ۱۲۵° ۳) ۱۳۰° ۴) ۱۲۰°

حل: ۱ ۲ ✓ ۴



$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = C_۱ \\ AB = AC \\ BM = CN \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{ACN}$$

$$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \hat{N} = \hat{M} = ۲۵^\circ$$

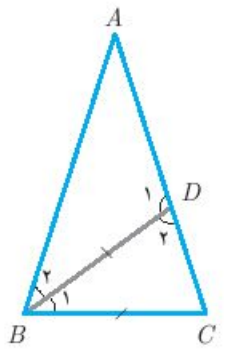
$$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - (M + N) = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۳۰^\circ$$

$$\begin{matrix} \hat{B}_۱ = \hat{A} + \hat{C}_۲ \\ \hat{C}_۱ = \hat{A} + \hat{B}_۲ \end{matrix} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱$$

تست ۲۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC اگر طول نیمساز داخلی B برابر طول قاعده BC باشد، زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟

۱) ۲۴° ۲) ۳۰° ۳) ۴۰° ۴) ۳۶°

حل: ۱ ۲ ۳ ✓



BD نیمساز $\Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$

$AB = AC \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = \hat{C}$

$\Rightarrow ۲\hat{B}_۱ = \hat{C} = ۲\hat{B}_۲ \qquad (۱)$

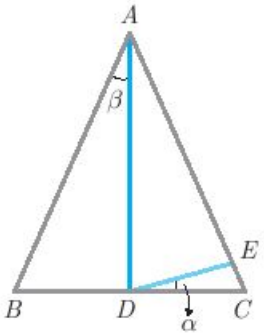
$BD = BC \Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{C}$

$\Rightarrow A + B_۲ = C \Rightarrow A = C - B_۲$

$\xrightarrow{(۱)} \hat{A} = ۲\hat{B}_۲ - \hat{B}_۲ = \hat{B}_۲$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B}_۲ + ۲\hat{B}_۲ + ۲\hat{B}_۲ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B}_۲ = ۳۶ \Rightarrow \hat{A} = ۳۶$

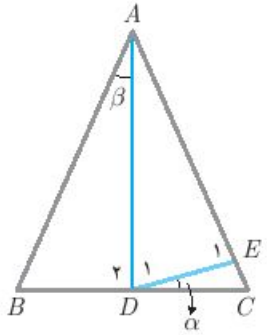
تست ۲۱. در مثلث شکل مقابل $AB = AC$ و $AD = AE$ است. اگر $B\hat{A}D = \beta$ و $E\hat{D}C = \alpha$ باشد کدام گزینه درست است؟



۱) $\alpha = \beta$ ۲) $\alpha < \beta$

۳) $\alpha > \beta$ ۴) $\frac{\alpha}{۲} = \beta$

حل: ۱ ✓ ۳ ۴



$AB = AC \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} \qquad (۱)$

$AD = AE \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{E}_۱ \qquad (۲)$

$$\begin{cases} \hat{D}_۱ + \alpha = \beta + \hat{B} \\ \hat{E}_۱ = \alpha + \hat{C} \end{cases}$$

$\xrightarrow{(۱),(۲)} \hat{E}_۱ + \alpha = \beta + \hat{C}$

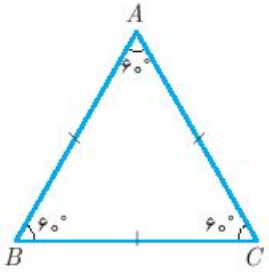
$\Rightarrow \alpha + \hat{C} + \alpha = \beta + \hat{C}$

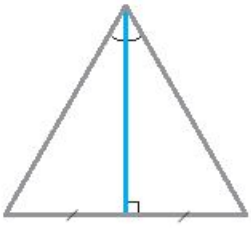
$\Rightarrow \beta = ۲\alpha$

۱-۲-۳-۲ مثلث متساوی‌الاضلاع

مثلثی است که همه‌ی اضلاعش با هم برابر باشند.

۴۵. برای هر ضلع نیمساز، میانه و ارتفاع برهم منطبق‌اند. **۴۶.** تمامی میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌ها با هم برابرند.

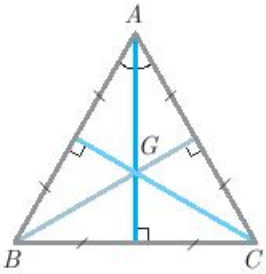




۴۷. محل همرسی میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌ها همگی یکی و درست وسط مثلث است. (مرکز ثقل)

۴۸. اگر طول ضلع مثلث a باشد آنگاه:

- محیط $= ۳a$
- میانه = ارتفاع = نیمساز $= \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$
- مساحت $= \frac{\sqrt{۳}a^۲}{۴}$



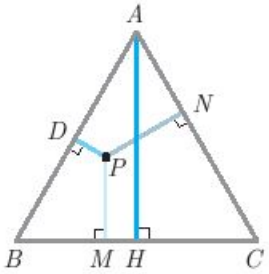
۴۹. فاصله‌ی G (مرکز ثقل) تا هر رأس: $\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$

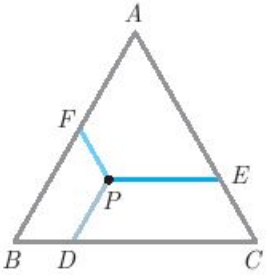
۵۰. فاصله‌ی G تا هر ضلع: $\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$

۵۱. فاصله‌ی وسط هر ضلع از ضلع دیگر: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a$

۵۲. مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه درون مثلث از سه ضلع مقدار ثابتی است:

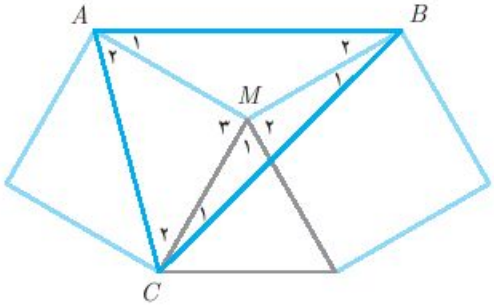
۵۳. اگر از نقطه‌ی دلخواهی درون مثلث سه خط موازی اضلاع رسم کنیم تا ضلع‌ها را قطع کند. مجموع این سه پاره‌خط مساوی ضلع مثلث است.





$PD + \ldots$

تست ۲۲. در شکل زیر، دو مربع روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. زاویه‌ی $B\hat{A}C$ کدام است؟



۱) ۶۰° ۲) ۷۵°

۳) ۴۵° ۴) ۹۰°

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

$$\begin{cases} MB = MC \\ M_۱ = ۶۰^\circ \\ M_۳ = M_۲ = ۹۰^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow M_۱ + M_۲ = ۱۵۰ \Rightarrow B_۱ = C_۱ = ۱۵^\circ$ قطر مربع $AC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲ = ۴۵^\circ$

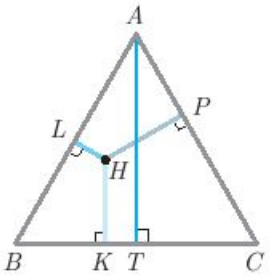
$\hat{M}_۴ = ۳۶۰^\circ - (۶۰^\circ + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ) = ۱۲۰^\circ$

$BM = AM \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{A}_۱ = \dfrac{۱۸۰ - \hat{M}_۴}{۲}$

$\Rightarrow \hat{A}_۱ = ۳۰$

$B\hat{A}C = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۳۰^\circ + ۴۵^\circ = ۷۵^\circ$

تست ۲۳. نقطه H درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۳\sqrt{۳}$ می‌باشد. اگر $HP = ۱$ و $HK = ۲$ مقدار HL کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

حل: ۱ ۲ ۳ ✓

$HP + HK + HL = AT = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}AB$

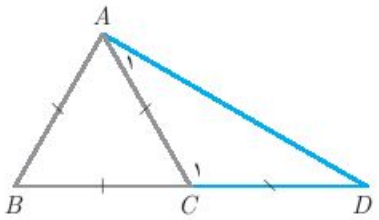
$\Rightarrow ۱ + ۲ + HL = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}(۳\sqrt{۳})$

$\Rightarrow HL = \dfrac{۹}{۲} - ۳ = \dfrac{۳}{۲}$

تست ۲۴. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ضلع BC را از طرف C به اندازه خود تا D امتداد می‌دهیم در مثلث ABD نسبت زاویه‌ها کدام است؟

۱) ۱،۲،۳ ۲) ۱،۲،۴ ۳) ۱،۳،۴ ۴) ۲،۳،۵

حل: ۱ ✓ ۲ ۳ ۴



$$\hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

$$CA = CD$$

$$\Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

در مثلث ABD: $\begin{cases} A = ۹۰^\circ \\ B = ۶۰^\circ \\ D = ۳۰^\circ \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{ب.م.م} = ۳۵}$ نسبت‌ها: ۳, ۲, ۱

تست ۲۵. محیط مثلث متساوی‌الاضلاع $۶\sqrt{۳}$ است، مساحت آن چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

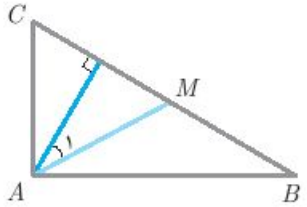
حل: ۱ ۲ ✓ ۴

$$۳a = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳}$$

$$S = \frac{\sqrt{۳}a^۲}{۴} = \frac{\sqrt{۳}(۲\sqrt{۳})^۲}{۴} = \frac{۴ \times ۳ \times \sqrt{۳}}{۴} = ۳\sqrt{۳}$$

۱-۲-۳-۳ مثلث قائم‌الزاویه

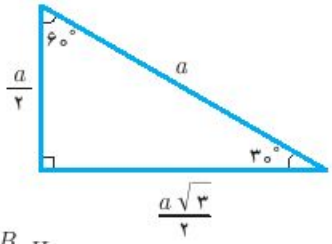
به مثلثی که دارای زاویه‌ی قائمه است، مثلث قائم‌الزاویه گفته می‌شود.



۵۴. میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

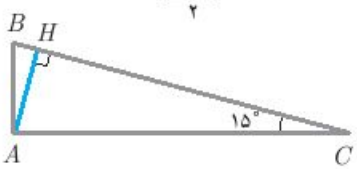
۵۵. زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر:

$$\hat{A}_۱ = |\hat{B} - \hat{C}|$$



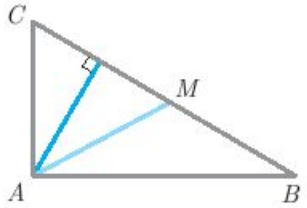
۵۶. ضلع مقابل به زاویه‌ی °۳۰، نصف وتر است.

۵۷. ضلع مقابل به زاویه‌ی °۶۰، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.



۵۸. مثلثی که زاویه‌ی °۱۵ داشته باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

$$AH = \frac{BH}{۴}$$



۵۹. ارتفاع، واسطه هندسی است بین قطعاتی که روی وتر ایجاد می‌شود.

$$AH^۲ = BH.CH$$

$$AB^۲ = BC.BH$$

$$AC^۲ = BC.CH$$

تست ۲۶. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} = ۴\hat{C}$ زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر چند درجه است؟

۱) °۳۶ ۲) °۷۲ ۳) °۵۴ ۴) °۱۸

حل: ۱ ۲ ✓ ۴

$$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}=۴\hat{C}} ۵\hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۱۸^\circ$$

$$\text{زاویه بین ارتفاع و میانه} = |\hat{B} - \hat{C}| = ۴\hat{C} - \hat{C} = ۳\hat{C} = ۳ \times ۱۸^\circ = ۵۴^\circ$$

تست ۲۷. اگر در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $\hat{A} = ۹۰^\circ$ می‌باشد، AH ارتفاع نظیر رأس قائمه و AD نیمساز مثلث ABH باشد، کدام‌یک صحیح است؟

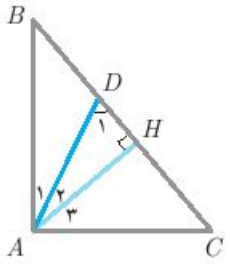
۱) AD میانه ABH است.

۲) مثلث ADC متساوی‌الساقین است.

۳) مساحت ADH، $\frac{۱}{۴}$ مساحت ABC است.

۴) مساحت مثلث ADH، $\frac{۳}{۸}$ مساحت مثلث ABC است.

حل: ۱ ✓ ۳ ۴



$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\\ \hat{B}+\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\end{cases} \xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲} \hat{C}=۲\hat{A}_۱$$

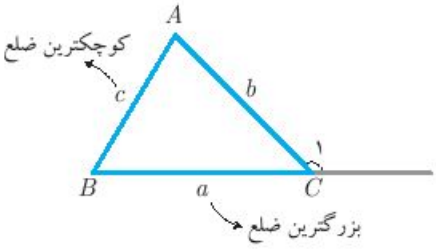
$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\\ \hat{C}+\hat{A}_۳=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۳ \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_۱=\hat{B}+\hat{A}_۱\\ \hat{A}_۲+\hat{A}_۳\overset{(۱)}{=}\hat{A}_۲+\hat{B}\end{array}\right\} \xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲} \hat{D}_۱=\hat{A}_۲+\hat{A}_۳$$

$\Rightarrow DC=AC \Rightarrow$ ADC مثلث متساوی‌الساقین است.

۱-۲-۴ نامساوی‌ها

۶. در مثلث ABC نامساوی‌های زیر برقرار است:



الف) $|b-c|<a<b+c$

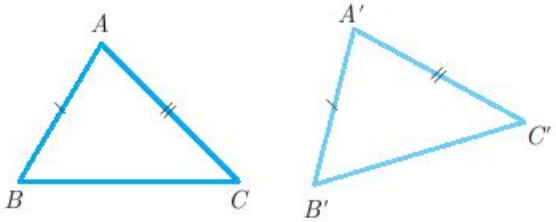
ب) $a>b \Leftrightarrow \hat{A}>\hat{B}$

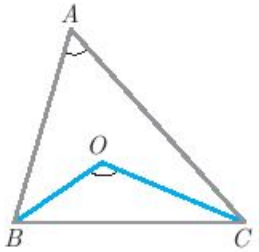
ج) $\hat{C}_۱>\hat{A},\ \hat{C}_۱>\hat{B}$

د) $۰<c<\dfrac{a+b+c}{۳}$

هـ) $\dfrac{a+b+c}{۳}<a<\dfrac{a+b+c}{۲}$

.....کس.





۶۳. اگر O نقطه‌ی دلخواه درون مثلث باشد:

الف. $\hat{O} > \hat{A}$

ب. $BC < OB + OC < AB + AC$

ج. $P < OA + OB + OC < ۲P$

(نصف محیط $= P$)

۶۴. اگر AM میانه‌ی مثلث ABC باشد، داریم: $\frac{|AB - AC|}{۲} < AM < \frac{AB + AC}{۲}$

۶۵. سه میانه‌ی هر مثلث خود تشکیل مثلثی می‌دهند یعنی: $|BM' - CM''| < AM < BM' + CM''$

۶۶. برای مجموع میانه‌ها داریم:

$$\frac{۳p}{۲} < AM + BM' + CM'' < ۲p$$

۶۷. رابطه‌ی میانه‌ی AM با اندازه‌ی زاویه‌ی A :

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow AM = \frac{BC}{۲}$$

$$\hat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow AM < \frac{BC}{۲}$$

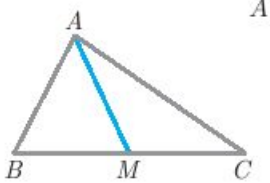
$$\hat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow AM > \frac{BC}{۲}$$

۶۸. قضیه کسینوس‌ها: $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

$$\hat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$$

$$\hat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$$



۶۹. اگر AM میانه باشد آن‌گاه:

$$AB < AC \Leftrightarrow B\hat{A}M > C\hat{A}M$$

۷۰. هر ارتفاع از نصف مجموع دو ضلع دیگر مثلث کوچکتر است.

$$h_a < \frac{b + c}{۲}$$

۷۱. معکوس اندازه‌های سه ارتفاع، خود مثلثی جدید می‌سازد یعنی:

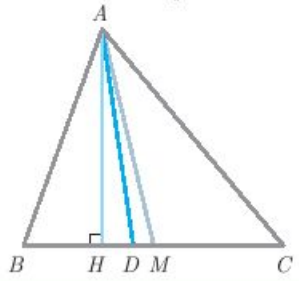
$$\left|\frac{۱}{h_b} - \frac{۱}{h_c}\right| < \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$$

و در حالت کلی هر عبارت جبری که برای اضلاع صادق باشد برای عکس ارتفاع‌ها نیز صادق است.

۷۲. برای مجموع ارتفاع‌ها داریم: $p < h_a + h_b + h_c < ۲p$

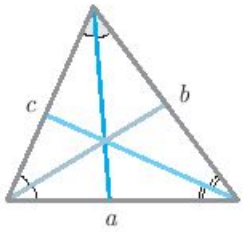
۷۳. برای یک رأس در مثلث، میانه از نیمساز و نیمساز از ارتفاع بزرگ‌تر است.

$$AH \le AD \le AM \quad \text{یا} \quad h_a \le d_a \le m_a$$

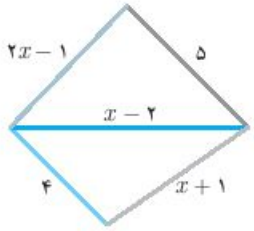


۷۴. برای مجموع نیمسازها داریم:

$$p < d_a + d_b + d_c < ۲p$$



تست ۲۸. با توجه به اندازه‌ی پاره‌خط‌های شکل زیر، حدود تغییرات x کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۲} < x < ۴$ ۲) $\frac{۸}{۳} < x < ۴$

۳) $\frac{۵}{۲} < x < ۵$ ۴) $۲ < x < ۵$

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l} ۲x - ۱ - (x - ۲) < ۵ < ۲x - ۱ + x - ۲ \\ \Rightarrow x + ۱ < ۵ < ۳x - ۳ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۸}{۳} < x \\ x < ۴ \end{cases} \\ x - ۲ - (x + ۱) < ۴ < x - ۲ + x + ۱ \\ \Rightarrow -۳ < ۴ < ۲x - ۱ \Rightarrow \frac{۵}{۲} < x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۸}{۳} < x < ۴$$

تست ۲۹. طول اضلاع مثلثی به ترتیب a و ۹ و ۵ می‌باشد، اندازه میانه نظیر ضلع a درکدام بازه قرار دارد؟

۱) $(۱, ۶)$ ۲) $(۵, ۹)$ ۳) $(۲, ۷)$ ۴) $(۳, ۸)$

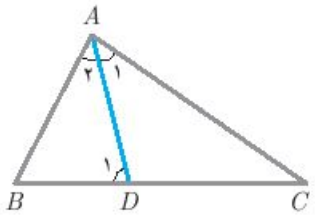
حل: ۱ ۲ ✓ ۴

$$\frac{|b - c|}{۲} < ma < \frac{b + c}{۲} \Rightarrow \frac{۹ - ۵}{۲} < ma < \frac{۵ + ۹}{۲} \Rightarrow ۲ < m_a < ۷$$

تست ۳۰. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه A ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره درست است؟

۱) $AB > AD$ ۲) $BA > BD$

۳) $DB > DA$ ۴) $DA > DB$



حل: ۱ ✓ ۳ ۴

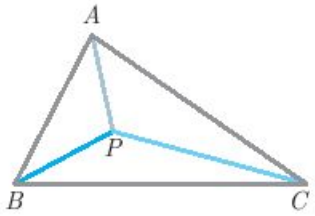
$$\hat{D}_1 > \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \Rightarrow AB > BD$$

تست ۳۱. نقطه‌ی p داخل مثلث ABC با محیط ۱۲ است. تغییر $PA + PB + PC$ بین کدام دو عدد است؟

۱) ۶، ۸ ۲) ۶، ۱۲

۳) ۴، ۱۲ ۴) ۷، ۱۳



حل: ۱ ✓ ۳ ۴

$$P = ۶ < PA + PB + PC < ۱۲ = ۲P$$

تست ۳۲. سه پاره‌خط به طول‌های $۶x$ و $x + ۷$ و $۴x - ۴$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۲) $۳ < x < ۴$ ۳) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$

حل: ۱ ۲ ✓ ۴

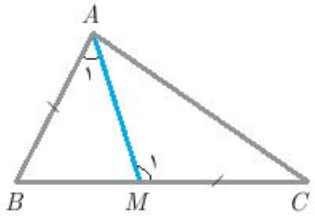
$$\underbrace{\underbrace{۲x - ۴ < x + ۷}_{x<۱۱} < ۱۰x - ۴}_{\frac{۱۱}{۹}<x}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱۱ - ۳x < ۶x < ۵x + ۳ \Rightarrow x < ۳ \\ ۱۱ < ۹x \Rightarrow \frac{۱۱}{۹} < x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱۱}{۹} < x < ۳$$

تست ۳۳. در شکل زیر نقطه‌ی M روی ضلع BC طوری قرار دارد که $AB = MC$ است. کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست است؟

۱) $AC > BM$ ۲) $AM < AC$

۳) $AM > AB$ ۴) $AC > MC$



حل: ✓ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l} AB = MC \\ AM = AM \\ M_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض}} \quad .$$

مکان هندسی و رسم

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

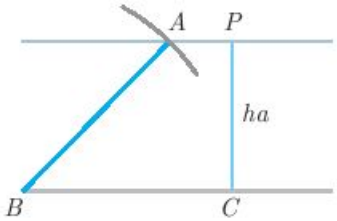
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . a . . . . . .

. . . . . a . . . . . .

. . . . . .



. a $\Rightarrow$.

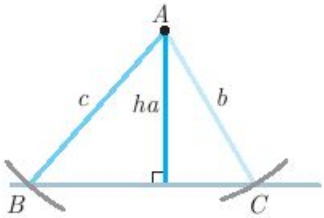
. a $\Rightarrow$ . . . . .

. a $\rightarrow$ . . . .

. . a . . . . . a . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

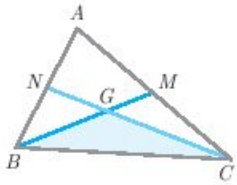


$$\begin{cases} h_a < b \\ h_a < c \\ b \neq c \end{cases} \Rightarrow \text{۲ جواب}$$

$$\begin{cases} h_a < b = c \Rightarrow \text{۱ جواب متساوی‌الساقین} \\ h_a = b < c \Rightarrow \text{۱ جواب قائم‌الزاویه} \end{cases}$$

$h_a > b$ یا $h_a > c \Rightarrow$ جواب ندارد

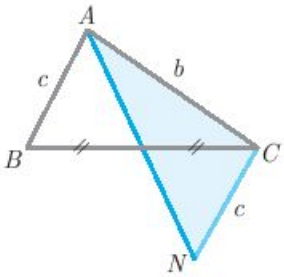
– یک ضلع و میانه‌های نظیر دو ضلع دیگر (a, m_b, m_c) : در این حالت مثلث BGC با معلوم بودن سه ضلعش قابل رسم است: $BC = a$ و $BG = \frac{۲}{۳}m_b$ و $CG = \frac{۲}{۳}m_c$. این مثلث را می‌کشیم و بعد BG و CG را به اندازه‌ی نصف خودشان امتداد می‌دهیم تا M و N بدست آیند، امتداد BN و CM نقطه‌ی A خواهد بود.



$$m_b + m_c > \frac{۳}{۲}a \Rightarrow \text{۱ جواب}$$

$$m_b + m_c \leq \frac{۳}{۲}a \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

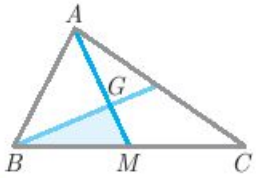
– دو ضلع و میانه‌ی نظیر ضلع سوم (b, c, m_a) : اگر میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش امتداد دهیم تا به نقطه‌ی N برسیم. مثلث ANC به حالت سه ضلع قابل رسم است و پس از C به وسط AN وصل کرده و به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی B بدست آید.



$$|b - c| < ۲m_a < b + c \Rightarrow \text{۱ جواب}$$

در غیر این‌صورت جواب ندارد.

– دو میانه و یک ضلع نظیر با یکی از میانه‌ها (a, m_a, m_b) : مثلث GBM به حالت معلوم بودن سه ضلعش قابل رسم است. $BM = \frac{a}{۲}$ و $GM = \frac{۱}{۳}m_b$ و $BG = \frac{۲}{۳}m_b$ بعد از کشیدن آن BG را نصف خودش امتداد می‌دهیم تا N بدست آید، BM را به اندازه‌ی خودش ادامه می‌دهیم تا C بدست آید و GM را به اندازه‌ی دو برابر خودش امتداد می‌دهیم تا A بدست آید.



$$\left|\frac{۲}{۳}m_b - \frac{۱}{۳}m_a\right| < \frac{a}{۲} < \frac{۲}{۳}m_b + \frac{۱}{۳}m_a$$

$\Rightarrow$ ۱ جواب دارد

– کمان درخور: مکان هندسی نقاطی است که از آن‌ها پاره‌خط BC (یا a) با زاویه‌ی α دیده می‌شود، این مکان، دو کمان مساوی و قرینه نسبت به BC است.

– شعاع هریک از این دو کمان $R = \frac{BC}{۲\sin\alpha}$ و فاصله‌ی مرکز هریک از این دو کمان (دایره) تا پاره‌خط BC از رابطه‌ی $OH = R|\cos\alpha| = \frac{a}{۲|\tan\alpha|}$ بدست می‌آید.

– زاویه‌ی مرکزی مقابل به پاره‌خط BC یا همان $\hat{O}$ برابر ۲α است.

۷۹. هر موقع طول یک پاره‌خط و زاویه‌ی مقابل آن در مثلثی داده شده باشد به کمک کمان درخور سوال حل می‌شود.

۸۰. اگر $BC = a$ و $\hat{A} = \alpha$ داده شده باشند، مثلث‌های بی‌شمار با این فرض‌ها قابل رسم است که البته در همه‌ی آن‌ها A روی کمان درخور α حرکت می‌کند اما در بین همه‌ی آن‌ها بیشترین ارتفاع یا بیشترین مساحت مربوط به مثلث متساوی‌الساقین است:

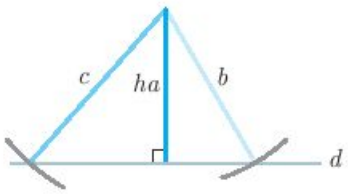
$$\text{ماکسیمم } AH = \frac{a}{۲}\left(\frac{۱}{\sin\alpha} + \frac{۱}{\tan\alpha}\right) = \frac{a}{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}$$

$$\text{ماکسیمم } S = \frac{۱}{۴}a^۲\left|\cot\frac{\alpha}{۲}\right|$$

تست ۳٤. در مثلث ABC و $AB = ۶$ و $AC = ۱۲ - ۲m$ و همچنین طول ارتفاع وارد بر ضلع BC، برابر ۴ است. به ازای چند مقدار صحیح m، فقط یک مثلث یکتا با خصوصیات داده شده می‌توان رسم کرد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) هیچ

حل: ۱ ✓ ۳ ۴



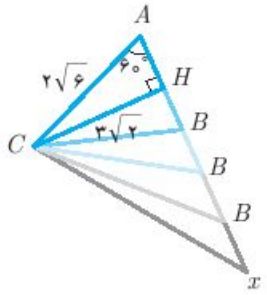
$$\begin{cases} h_a < b = c \Rightarrow \text{۱ جواب متساوی‌الساقین} \\ h_a = b < c \Rightarrow \text{۱ جواب قائم‌الزاویه} \end{cases}$$

$$۴ < ۱۲ - ۲m = ۶ \Rightarrow ۶ = ۲m \Rightarrow m = ۳$$

$$h_a = ۴ = ۱۲ - ۲m < ۶ \Rightarrow ۲m = ۸ \Rightarrow m = ۴$$

تست ۳۵. چند مثلث متمایز ABC با مشخصات $a = ۲\sqrt{۶}$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $h_c = ۳\sqrt{۲}$ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار



حل: ۱ ۲ ۳ ✓

مثلث $\overset{\triangle}{ACH}$ با داشتن وتر و یک ضلع و یک زاویه قابل رسم می‌باشد و با امتداد AH تمام نقاط روی نیم‌خط Hx می‌توانند رأس B باشند بنابراین بیشمار مثلث ABC قابل رسم است.

تست ۳۶. چند مثلث غیرهمنهشت ABC با مشخصات $AB = ۶$ و $AC = ۴$ و $B = ۴۵^\circ$ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

حل: ✓ ۲ ۳ ۴

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{۴}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۶}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{\sqrt{۲}} = \frac{۶}{\sin C} \rightarrow \frac{۳\sqrt{۲}}{۴} = \sin C$$

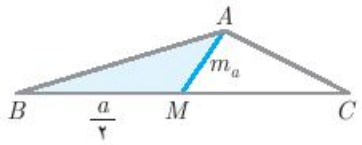
$$\Rightarrow \sin C > ۱ \Rightarrow$$ جواب ندارد

تست ۳۷. مثلثی با معلوم بودن میانه $m_a = ۵$ و $a = ۲۴$ قابل رسم است. یک ضلع دیگر این مثلث کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۰

حل: ✓ ۲ ۳ ۴

مثلث ABC در صورتی قابل رسم است که مثلث ABM قابل رسم باشد، لذا:



$$|m_a - \frac{a}{۲}| < c < m_a + \frac{a}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۲ - ۵ < c < ۱۲ + ۵$$

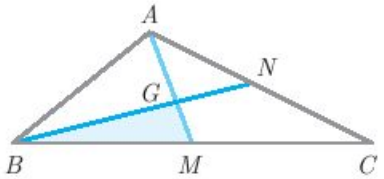
$$\Rightarrow ۷ < c < ۱۷ \Rightarrow c = ۱۰$$

تست ۳۸. مثلثی با معلوم بودن دو میانه $m_a = ۶$ و $m_b = ۱۵$ و ضلع a قابل رسم است. اندازه ضلع a کدام عدد می‌تواند باشد؟

حل: ۱ ۲ ✓۳ ۴

مثلث ABC در صورتی قابل رسم است که مثلث GBM قابل رسم باشد، لذا:

$$\left|\frac{۲}{۳}m_b - \frac{۱}{۳}m_a\right| < \frac{a}{۲} < \frac{۲}{۳}m_b + -$$



۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

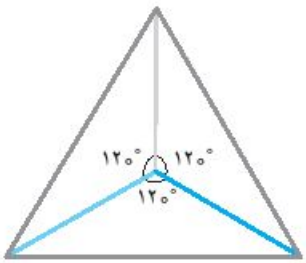
۱ ۲ ۳ ✓۴

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱) بی‌شمار ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۱ ۲ ۳ ✓۴



تست ۴۱. در مثلث ABC طول $BC = ۴$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ است. ماکزیمم مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۸ ۴) $۴\sqrt{۳}$

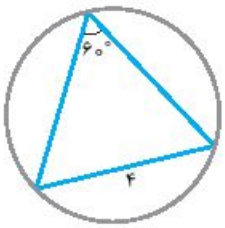
حل: ۱ ۲ ۳ ✓

$$\max(s) = \frac{۱}{۴}a^۲|\cot\frac{\alpha}{۲}| \to \max(s) = \frac{۱}{۴} \times ۱۶ \times \cot ۳۰ = ۴\sqrt{۳}$$

تست ۴۲. با معلومات $BC = ۴$ و $A = ۶۰^\circ$ و $AH = h_a = ۳\sqrt{۲}$ چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳



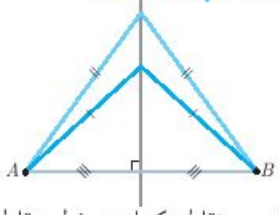
حل: ۱ ۲ ۳ ۴ ✓

$\hat{A} = ۶۰^\circ < ۹۰^\circ$

$AH = ۳\sqrt{۲} > \frac{a}{۲} = ۲ \Rightarrow$ جواب ندارد

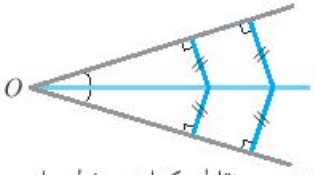
۸۱. مکان هندسی نقاطی که از دو سر پاره‌خط معلوم AB به یک فاصله‌اند:

عمود منصف پاره‌خط AB



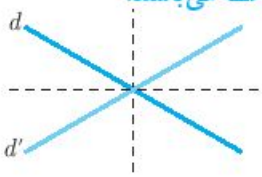
۸۲. مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند:

نیمساز زاویه



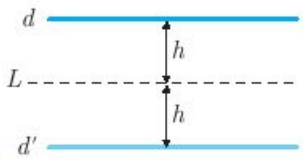
۸۳. مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند:

دو خط عمود بر هم که نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط می‌باشند.



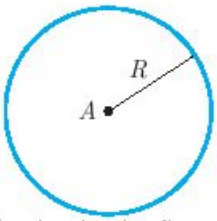
۸۴. مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی، به یک فاصله‌اند:

خطی است موازی آن دو و وسط آن‌ها



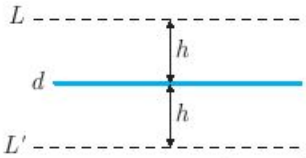
۸۵. مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی معلوم A به فاصله‌ی R هستند:

دایره‌ای است به مرکز A و به شعاع R



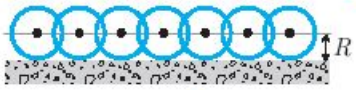
۸۶. مکان هندسی نقاطی که از خط معلوم d به فاصله‌ی h هستند:

دو خط موازی d که در طرفین d واقع‌اند و هر کدام به فاصله‌ی h از d هستند.



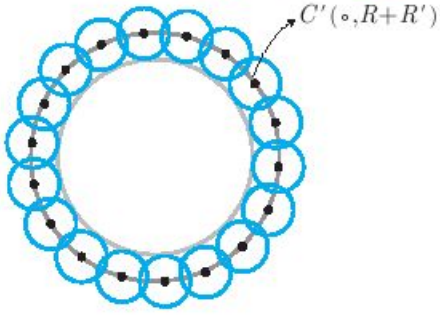
۸۷. مکان هندسی مراکز دایره‌هایی با شعاع R که روی یک خط صاف می‌غلتند:

خطی است به موازات سطح که از مرکز دایره گذشته و به فاصله‌ی R از سطح است.



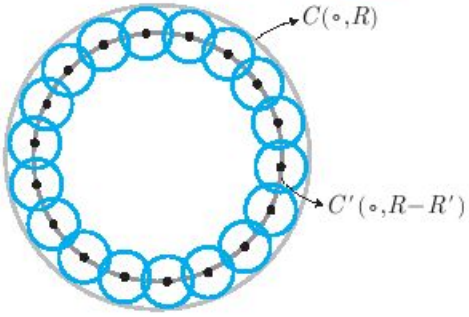
۸۸. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ی C به شعاع R و در خارج آن می‌غلتند:

دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R+R'$



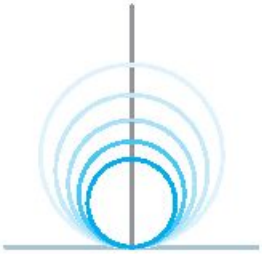
۸۹. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ی C به شعاع R و در داخل آن می‌غلتند:

دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R-R'$



۹۰. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطه‌ی مشخص مثل A بر خط d مماس باشند:

خطی است که در نقطه‌ی A بر d عمود است

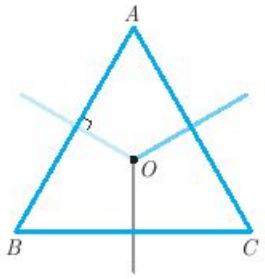


تست ۴۳. مکان هندسی نقاطی که از سه نقطه مفروض A و B و C مشخص کننده یک صفحه به یک فاصله باشند، کدام است؟

۱) خط ۲) دوخط ۳) صفحه ۴) نقطه

حل: ۱ ۲ ۳ ✓

از آنجایی که سه نقطه مفروض A، B و C تشکیل صفحه می‌دهند، رئوس یک مثلث می‌باشند و مکان هندسی مطلوب محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AB، BC و AC می‌باشد که مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.



تست ٤٤. مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه موازی به یک فاصله و از نقطه مفروض دیگری به فاصله مشخص باشد کدام می‌تواند باشد؟

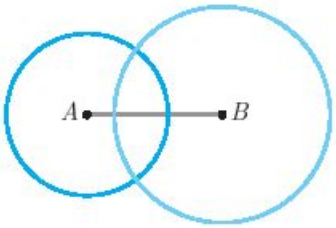
۱) دایره ۲) نیم‌خط ۳) خط راست ۴) صفحه

حل: ✓ ۲ ۳ ۴

مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشند صفحه‌ای است موازی با آن دو صفحه و در وسط آن‌ها و مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه به فاصله مشخص باشد کره‌ای است به مرکز آن نقطه و اگر کره صفحه مورد نظر را قطع کند، فصل مشترک آن‌ها یک دایره می‌باشد.

تست ٤٥. دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۵ را در فضا در نظر گرفته‌ایم. چند نقطه در فضا وجود دارد که فاصله‌ی آن از A برابر ۳ و از B برابر ۴ باشد؟

۱) یک ۲) دو ۳) بیشمار ۴) هیچ



حل: ۱ ۲ ✓ ۴

خم و چندضلعی

خم مسطح:

خم غیر مسطح:

خم ساده:

خم بسته:

۹۵. ناحیه‌ی محدب: ناحیه‌ای است که اگر هر دو نقطه‌ی دلخواه از داخل آن را به هم وصل کنیم. پاره‌خط حاصل کاملاً درون ناحیه می‌افتد.

۹۶. تمام زاویه‌های داخلی چند ضلعی محدب از ۱۸۰° کمترند.

۹۷. از هر رأس n ضلعی محدب تعداد $n - ۳$ قطر می‌گذرد.

۹۸. هر n ضلعی محدب دارای $\frac{n(n-۳)}{۲}$ قطر است.

۹۹. اگر قطرهای مرسوم از یک رأس n ضلعی محدب را رسم کنید، n ضلعی به $n - ۲$ مثلث تقسیم می‌شود.

۱۰۰. مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر با $(n - ۲) \times ۱۸۰$ درجه است.

۱۰۱. مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی برابر ۳۶۰ درجه است.

۱۰۲. اندازه‌ی یک زاویه‌ی خارجی هر n ضلعی منتظم برابر $\frac{۳۶۰}{n}$ درجه است.

۱۰۳. اندازه‌ی یک زاویه‌ی داخلی هر n ضلعی منتظم برابر $۱۸۰ - \frac{۳۶۰}{n}$ درجه است.

۱۰۴. اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو قطر متوالی مرسوم از یک رأس n ضلعی منتظم برابر با $\frac{۱۸۰}{n}$ است.

۱۰۵. اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی، یک ضلع اضافه کنیم آن‌گاه به تعداد اقطار $n - ۱$ قطر اضافه می‌شود.

۱۰۶. هر n ضلعی محدب، حداکثر ۳ زاویه‌ی منفرجه‌ی خارجی می‌تواند داشته باشد. بنابراین حداکثر ۳ زاویه‌ی داخلی حاده می‌تواند داشته باشد.

تست ۴۶. چند قطر یک ۲۰ ضلعی محدب از رأس مشخص از آن نمی‌گذرد؟

۱) ۱۵۲ ۲) ۱۵۳ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۵۵

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

$$\frac{n(n-۳)}{۲} - (n-۳) = \frac{۲۰ \times ۱۷}{۲} - ۱۷ = ۱۵۳$$

تست ۴۷. در یک n ضلعی منتظم، تعداد اقطار ۲۵ تا از تعداد اضلاع بیشتر است. زاویه‌ی بین دو قطر متوالی گذرنده از هر رأس این n ضلعی کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

حل: ۱ ۲ ✓ ۴

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = n + ۲۵ \Rightarrow n^۲ - ۳n = ۲n + ۵۰$$

$$\Rightarrow n^۲ - ۵n - ۵۰ = ۰ \Rightarrow (n - ۱۰)(n + ۵) = ۰$$

$$n = ۱۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰}{n} = ۱۸$$

تست ۴۸. مجموع تعداد اضلاع و اقطار یک $n+1$ ضلعی محدب نصف تعداد اقطار یک $2n$ ضلعی محدب است. n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۵

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

$$\frac{(n+1)(n-2)}{2}+(n+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{2n(2n-3)}{2}\right)$$

$$n^2-n-2+2n+2=2n^2-3n \Rightarrow n^2-4n=0 \Rightarrow n(n-4)=0 \Rightarrow n=4$$

تست ۴۹. تعداد قطرهای یک n ضلعی منتظم دو برابر تعداد قطرهای یک $n-3$ ضلعی منتظم است. اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی این n ضلعی منتظم چند درجه است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۵۶ ۴) ۱۶۰

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

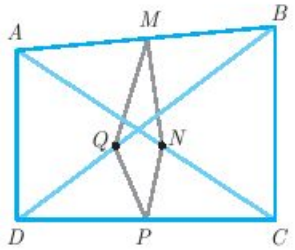
$$\frac{n\cancel{(n-3)}}{\cancel{2}}=2\times\frac{\cancel{(n-3)}(n-6)}{\cancel{2}}$$

$$n=2n-12 \Rightarrow n=12 \Rightarrow \alpha=\frac{180\,\overset{10}{\cancel{(12-2)}}}{12}=150$$

۱-۲-۷ چهارضلعی‌های محدب

۱۰۷. از برخورد نیمسازهای داخلی و یا خارجی هر چهارضلعی محدب، چندضلعی‌ای به وجود می‌آید که زاویه‌های مقابلش مکمل‌اند.

۱۰۸. اگر از چهار رأس چهار ضلعی، خط هایی موازی قطرها رسم کنیم، متوازی‌الاضلاعی به وجود می‌آید که مساحتش دو برابر مساحت چهارضلعی اول و محیطش دو برابر مجموع اقطار آن چهار ضلعی است.

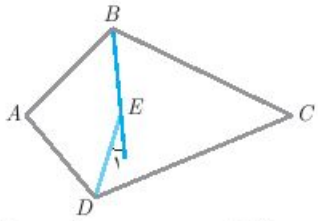


۱۰۹. وسط‌های دو ضلع مقابل و وسط‌های دو قطر هر چهارضلعی دلخواه چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

$MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است و محیطش $= AD+BC$

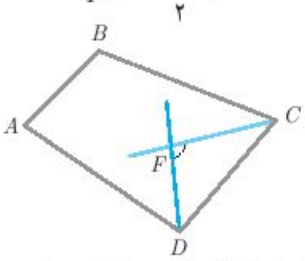
۱۱۰. در هر چهارضلعی زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی مقابل برابر است با:

$$\hat{E}_1 = \frac{|\hat{A} - \hat{C}|}{2}$$



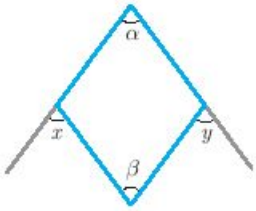
۱۱۱. در هر چهارضلعی زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی مجاور برابر است با:

$$\hat{F} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$



۱۱۲. در هر چهارضلعی، مجموع دو زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی دیگر

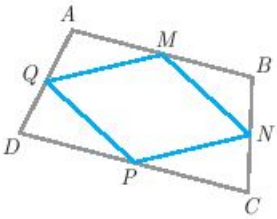
$$x + y = \alpha + \beta$$



۱۱۳. اگر وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.

$$\text{محیط } MNPQ = AC + BD$$

$$\text{مساحت } MNPQ = \frac{1}{2}\left(\text{مساحت } ABCD\right)$$



۱۱۴. در مورد نوع متوازی‌الاضلاع کافی است در مورد قطرهای $ABCD$ بحث کنیم.

$MNPQ \Leftarrow ABCD$	$ABCD \Leftarrow MNPQ$
دلخواه ⇐ متوازی‌الاضلاع	متوازی‌الاضلاع ⇐ دلخواه
متوازی‌الاضلاع ⇐ متوازی‌الاضلاع	مستطیل ⇐ دارای قطرهای عمود برهم
مستطیل ⇐ لوزی	لوزی ⇐ دارای قطرهای برابر
لوزی ⇐ مستطیل	مربع ⇐ دارای قطرهای عمود بر هم و برابر
مربع ⇐ مربع	دلخواه ⇐ وجود ندارد.

۱-۷-۲-۱ متوازی‌الاضلاع

۱۱۵. در متوازی‌الاضلاع دو ضلع روبرو موازی و مساوی‌اند و برعکس.

۱۱۶. در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه روبه‌رو مساوی و هر دو زاویه مجاور مکمل‌اند و برعکس.