فصل دوم

خط و صفحه

آنچه در این فصل می‌خوانیم

معادلات خط در فضا
وضعیت نسبی دو خط در فضا
فاصله، تصویر و قرینه یک نقطه نسبت به یک خط

معادلات صفحه در فضا
وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

وضعیت نسبی خط و صفحه
فاصله، تصویر و قرینه نقطه و خط نسبت به صفحه
عمود مشترک دو خط متنافر

معادلات خط در فضا

۱. معادله خطی که از نقطه $A(۰,۱,-۲)$ می‌گذرد و موازی بردار $\vec{u}=(۱,-۱,۲)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $x=۱-y=\frac{z-۲}{۲}$ ‌‌ ۲) $-x=۱-y=\frac{z-۲}{۲}$

۳) $x=۱-y=\frac{z+۲}{۲}$ ‌‌ ۴) $-x=y-۱=\frac{z+۲}{۳}$

۲. معادله خطی که از نقطه $A(۱,-۲,۱)$ می‌گذرد و موازی بردار $\overrightarrow{BC}$ با مختصات $B(۰,۱,۰)$, $C(-۱,۲,۱)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{-۲}=\frac{z-۱}{۲}$ ‌‌ ۲) $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{-۲}=\frac{z-۱}{-۲}$

۳) $\frac{x+۱}{۱}=\frac{y+۲}{-۱}=z+۱$ ‌‌ ۴) $۱-x=y+۲=z-۱$

۳. بردار هادی خط $L:\frac{۲x-۱}{۳}=\frac{۲-y}{۲}=\frac{۳z-۱}{۳}$ کدام است؟

۱) $(۳,۲,۳)$ ‌‌ ۲) $(۳,-۲,۳)$ ‌‌ ۳) $(\frac{۳}{۲},-۲,۱)$ ‌‌ ۴) $(\frac{۳}{۲},۲,-۱)$

۴. کدام‌یک از نقاط زیر روی خط $L:\frac{x-۱}{۲}=\frac{۲-y}{۳}=۱-z$ قرار دارد؟

۱) $(۱,۲,۱)$ ‌‌ ۲) $(-۱,۲,۱)$ ‌‌ ۳) $(۲,۱,۰)$ ‌‌ ۴) $(۳,-۱,۱)$

۵. کدام‌یک از نقاط زیر، یک نقطه روی خط $L:\frac{x-۱}{۲}=\frac{۲y-۲}{۳}=\frac{z+۱}{۲}$ می‌باشد؟

۱) $(۱,۱,۱)$ ‌‌ ۲) $(۱,۱,۰)$ ‌‌ ۳) $(-۵,۴,۳)$ ‌‌ ۴) $(۵,۴,۳)$

۶. معادله خطی که از دو نقطه $A(۰,۱,۲)$ و $B(-۱,۲,۱)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $x=y-۱=۲-z$ ‌‌ ۲) $-x=y-۱=۲-z$ ‌‌ ۳) $\frac{x}{۱}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۲}{۲}$ ‌‌ ۴) $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۲}{۳}=\frac{z}{۲}$

۷. معادله خطی که از نقطه $A(۲,-۲,۱)$ بگذرد و موازی خطی باشد که از دو نقطه $M(۰,۱,۱)$, $N(-۱,۲,۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $x-۲=y+۲=z-۱$ ‌‌ ۲) $\frac{z+۱}{۲}=\frac{x-۲}{۳}=\frac{y+۱}{-۱}$

۳) $۲-x=\frac{z-۱}{۲}=۲+y$ ‌‌ ۴) $x-۲=۲+y=\frac{z-۱}{-۳}$

۸. خط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{۲y}{۳}=\frac{z+۱}{۲}$ موازی بردار $\vec{a}=(۱,b,c)$ می‌باشد. اندازه تصویربردار $\vec{a}$ روی صفحه yz کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ‌‌ ۲) ۱ ‌‌ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ‌‌ ۴) ۲

۹. اگر نقطه $A(a,b,-۱)$ روی خط $\frac{۲y+۱}{۳}=\frac{x-۲}{۳}=\frac{z+۱}{۲}$ قرار داشته باشد، معادله خطی که از دو نقطه A و $B(-۱,۱,۰)$ می‌گذرد،کدام است؟

۱) $\frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z}{۳}$ ‌‌ ۲) $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z}{\frac{۳}{۲}}$ ‌‌ ۳) $\frac{x+۱}{۶}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z}{-۲}$ ‌‌ ۴) $\frac{x+۱}{-۶}=\frac{z}{۲}=\frac{y-۱}{۳}$

۱۰. خط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z-۲}{۴}$ چند محور از محورهای مختصات را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ‌‌ ۲) ۲ ‌‌ ۳) ۳ ‌‌ ۴) صفر

۱۱. نقطه $A(a,b,۴)$ بر روی خط‌گذرنده بر دو نقطه $(۰,۱,۲)$, $(۱,-۱,۰)$ واقع است. دوتایی (a,b) کدام است؟ (سراسری ـ ۸۳)

۱) $(-۱,۳)$ ‌‌ ۲) $(-۱,۲)$ ‌‌ ۳) $(۱,-۲)$ ‌‌ ۴) $(۱,۳)$

۱۲. خط گذرنده از دو نقطه $A(-۱,۲,۱)$ و $B(۲,۱,-۱)$ از کدام نقطه به مختصات زیر می‌گذرد؟ (سراسری ـ ۸۶)

۱) $(۵,۰,-۳)$ ‌‌ ۲) $(۵,۰,-۲)$ ‌‌ ۳) $(۴,۰,-۳)$ ‌‌ ۴) $(۴,۰,-۲)$

۱۳. خط گذرا بر دو نقطه $A(۲,-۱,۱)$ و $B(۲,۳,-۱)$ صفحه xoy را در نقطه P قطع می‌کند. فاصله P تا مبدأ مختصات کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ـ ۸۵)

۱) $\sqrt{۲}$ ‌‌ ۲) $\sqrt{۵}$ ‌‌ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ‌‌ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۱۴. خطی که از دو نقطه $A(۱,۲,-۲)$ و $B(۲,-۱,۱)$ می‌گذرد، صفحه xoz را در نقطه $(a,۰,c)$ قطع می‌کند. $a+b$ کدام است؟ (آزاد ـ ۹۰)

۱) ۳ ‌‌ ۲) -۳ ‌‌ ۳) $-\frac{۵}{۳}$ ‌‌ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۵. نقاط $A(a-۴,۱,۰)$ ، $B(a-۶,-۴,-۲)$ و $C(۷,b,۴)$ روی خط L قرار دارند. $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۶ ‌‌ ۲) ۱۸ ‌‌ ۳) ۱۵ ‌‌ ۴) ۱۴

۱۶. معادله پارامتری خطی که از نقطه $A(-۱,۱,۲)$ می‌گذرد و موازی بردار $(۱,۱,-۲)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=t-۱\\y=t+۱\\z=-۲t+۲\end{cases}$ ‌‌ ۲) $\begin{cases}x=-t+۱\\y=t-۱\\z=-۲t+۲\end{cases}$ ‌‌ ۳) $\begin{cases}x=۱\\y=t-۱\\z=-۲t+۲\end{cases}$ ‌‌ ۴) $\begin{cases}x=t+۱\\y=t-۱\\z=-۲t-۲\end{cases}$

۱۷. راستای خط $L:\begin{cases}۲x=t-۱\\ y=t+۱\\ ۳z=۳-۳t\end{cases}$ کدام بردار است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},-۱,۱)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},۱,-۱)$ ۳) $(۱,۱,-۳)$ ۴) $(۲,۱,۳)$

۱۸. کدام‌یک از نقاط زیر روی خط $L:\begin{cases}۲x=t+۱\\ y=t-۱\\ z=۲-t\end{cases}$ قرار دارد؟

۱) $(۰,-۲,۱)$ ۲) $(۰,۰,۱)$ ۳) $(۱,۰,۱)$ ۴) $(۳,۱,۰)$

۱۹. معادله پارامتری خط $L:\frac{۲-x}{۲}=y-۱=z$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=۲-۲t\\ y=t+۱\\ z=t\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=۲t-۲\\ y=t+۱\\ z=t\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=t+۲\\ y=t-۱\\ z=t\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=t-۲\\ y=t-۱\\ z=t\end{cases}$

۲۰. فرم استاندارد خط $L:\begin{cases}۲y=۲t+۱\\ x=۲t-۱\\ ۳z=۶t\end{cases}$ کدام خط زیر است؟

۱) $\frac{y-۱}{۲}=\frac{x-۱}{۳}=\frac{z}{۳}$ ۲) $۲y-۱=x+۱=\frac{z}{۶}$ ۳) $\frac{y-۱}{۲}=\frac{x+۱}{۲}=\frac{z}{۲}$ ۴) $y-\frac{۱}{۲}=\frac{x+۱}{۲}=\frac{z}{۲}$

۲۱. بر روی خط $L:\frac{۲-x}{۲}=y+۱=\frac{z-۱}{۳}$ چند نقطه وجود دارد که فاصله آن نقاط تا نقطه $A(۲,-۱,۱)$، برابر $\sqrt{۱۴}$ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۲. چند نقطه روی خط $L:\begin{cases}۲x=۲t+۲\\ y=t\\ z=t-۳\end{cases}$ وجود دارد که فاصله‌شان تا نقطه $A(۵,۳,-۳)$، برابر ۱ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۳. کدام نقطه بر روی خطی که از نقطه $M(۰,۲,-۱)$ می‌گذرد و موازی بردار $\vec{u}=(۲,-۱,۱)$ می‌باشد، قرار دارد که فاصله‌اش تا مبدأ برابر $\sqrt{۱۷}$ است؟

۱) $(۴,۱,-۱)$ ۲) $(۲,۳,-۲)$ ۳) $(۴,۰,۱)$ ۴) $(۲,۳,۲)$

۲۴. کدام نقطه خط $L:y=z+۲=x$ از نقطه $A(۰,۲,۲)$ کمترین فاصله را دارد؟

۱) $(۰,۰,۲)$ ۲) $(۲,۲,۰)$ ۳) $(۲,۰,۰)$ ۴) $(-۲,۲,۰)$

۲۵. معادله خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد و با خط $\begin{cases}x=a+۱\\ y=۱-a\\ z=۲-۲a\end{cases}$ موازی می‌باشد، کدام است؟

۱) $\begin{cases}۲x+y=۰\\ x+۲z=۰\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x+y=۰\\ ۲x+z=۰\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}y=۲\\ z=-۲\end{cases}$ ۴) $x+y=۲,z=۲$

۲۶. جمع مختصات نزدیک‌ترین نقطه خط $\frac{x-۱۴}{۲}=\frac{y}{۳}=z$ تا مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲ ۳) ۲۰- ۴) ۱۵-

۲۷. خط $(x=۲t+۱\ ,\ y=۴t+۲\ ,\ z=۳t)$ کدام محورها را قطع می‌کند؟

۱) y,x ۲) x,z ۳) z,y ۴) محور z

۲۸. معادله خطی که از نقطه $A(۱,۲,-۲)$ گذشته و موازی محور oy باشد، کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=۱\\ y=۲\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=۱\\ z=-۲\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}y=۲\\ z=-۲\end{cases}$ ۴) $x+y=۲,z=۲$

۲۹. معادله خطی که از نقطه $(۱,۳,۲)$ گذشته و بر صفحه yoz عمود باشد، کدام است؟

۱) $x=۱$ ۲) $y=۳,z=۲$ ۳) $۶x=۲y=۳z$ ۴) $x=۱,y=۲$

۳۰. خط $d:\begin{cases}y=۲\\ z=-۱\end{cases}$ چه وضعیتی دارد؟

۱) موازی با محور yoz ۲) موازی با محور oz ۳) عمود بر محور ox ۴) موازی با محور ox

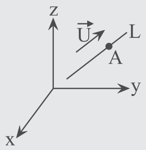
۳۱. خط $d:\begin{cases}x=y-۲\\ z=۳\end{cases}$ چه وضعیتی دارد؟

۱) موازی بر محور oz ۲) موازی صفحه xoy ۳) عمود بر صفحه xoy ۴) عمود بر محور ox

پاسخنامه

درسنامه ۱: معادله استاندارد خط

معادله استاندارد خط: معادله خطی که از نقطه $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{u}=(p,q,r)$ موازی باشد، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$\begin{cases} A(x_۰,y_۰,z_۰) \\ \vec{u}=(p,q,r) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_۰}{p}=\frac{y-y_۰}{q}=\frac{z-z_۰}{r}$$

در این معادله به بردار $\vec{u}$، بردار هادی، خط یا راستای خط می‌گویند. در معادله خط به‌جای بردار $\vec{u}$ هر بردار موازی با آن را نیز می‌توان در نظر گرفت.

نکته: در فرم استاندارد یا کانونیک خط برای به دست آوردن بردار هادی خط همواره ضریب x و y و z در معادله باید ۱+ باشد. در غیر این‌صورت، صورت و مخرج را به ضریب تقسیم می‌کنیم و سپس بردار هادی مشخص می‌شود.

به‌دست آوردن نقطه روی خط: برای به‌دست آوردن نقطه روی خط، در ساده‌ترین حالت می‌توان صورت هر سه کسر را برابر صفر قرار داد و نقطه‌ای روی خط به‌دست آورد ولی در حالت کلی می‌توان به جای x و y و z اعدادی در نظر گرفت که حاصل هر سه کسر، عدد یکسانی باشد.

۱. گزینه‌ی (۳)

معادله خطی که از نقطه $A(۰,۱,-۲)$ می‌گذرد و موازی بردار $\vec{u}=(۱,-۱,۲)$ می‌باشد برابر است با:

$$L:\frac{x-x_۰}{p}=\frac{y-y_۰}{q}=\frac{z-z_۰}{r}\Rightarrow L:\frac{x-۰}{۱}=\frac{y-۱}{-۱}=\frac{z-(-۲)}{۲}$$

$$\Rightarrow L: x=۱-y=\frac{z+۲}{۲}$$

۲. گزینه‌ی (۴)

برای نوشتن معادله خطی که موازی بردار $\overline{BC}$ باشد، ابتدا بردار $\overline{BC}$ یا $\overline{CB}$ به‌دست می‌آوریم و معادله خط را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} A(۱,-۲,۱) \\ B(۰,۱,۰) \\ C(-۱,۲,۱) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CB}=(-۱,۱,۱)\Rightarrow L:\frac{x-۱}{-۱}=\frac{y-(-۲)}{۱}=\frac{z-۱}{۱}$$

$$\Rightarrow L: ۱-x=y+۲=z-۱$$

۳. گزینه‌ی (۳)

در معادله استاندارد خط برای به‌دست آوردن بردار هادی خط ضریب x، y و z باید ۱+ باشد، پس ابتدا صورت و مخرج را بر ضرایب تقسیم کنیم تا ضرایب ۱+ به‌دست آید:

$$L:\frac{۲x-۱}{۳}=\frac{۲-y}{۲}=\frac{۳z-۱}{۳}\Rightarrow L:\frac{x-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{y-۲}{-۲}=\frac{z-\frac{۱}{۳}}{۱}\Rightarrow \vec{u}=(\frac{۳}{۲},-۲,۱)$$

نکته: در حالت کلی بردار هادی خط به معادله $\frac{ax-x_۰}{p}=\frac{by-y_۰}{q}=\frac{cz-z_۰}{r}$ برابر $\vec{u}=(\frac{p}{a},\frac{q}{b},\frac{r}{c})$ می‌باشد.

۴. گزینه‌ی (۱)

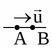
برای به‌دست آوردن نقطه روی خط، اگر هر سه کسر را برابر صفر قرار دهیم، نقطه $(۱,۲,۱)$ به‌دست می‌آید.

۵. گزینه‌ی (۴)

با جایگذاری گزینه‌ها، تنها گزینه ۴، نقطه $(۵,۴,۳)$ در معادله خط صدق می‌کند ؛ یعنی با جایگذاری این نقطه در معادله خط حاصل هر سه کسر یک عدد (عدد ۲) به‌دست می‌آید.

۶. گزینه‌ی (۲)

نکته: برای به‌دست آوردن معادله خطی که از نقاط $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ می‌گذرد، ابتدا باید بردار هادی خط را به‌دست آوریم و از آن‌جا که بردار هادی خط با خط موازی است، بردار $\overline{AB}$ یا $\overline{BA}$ را می‌توان بردار هادی خط در نظر گرفت و با داشتن یکی از نقاط A یا B معادله خط را به‌صورت زیر می‌نویسیم:



$$\begin{cases} A(x_۱,y_۱,z_۱) \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(x_۲-x_۱,y_۲-y_۱,z_۲-z_۱) \end{cases}$$

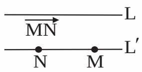
پس در این سؤال با داشتن دو نقطه از خط داریم:

$$\begin{cases} A(۰,۱,۲) \\ B(-۱,۲,۱) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-۱,۱,-۱)\Rightarrow L:\frac{x-۰}{-۱}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۲}{-۱}$$

$$\Rightarrow L: -x=y-۱=۲-z$$

۷. گزینه‌ی (۳)

خط L باید با خطی که از دو نقطه M و N می‌گذرد موازی باشد، پس بردار هادی دو خط موازیند؛ درنتیجه برای نوشتن معادله خط L می‌توان بردار هادی L' را در نظر گرفت.



$$\begin{cases} M(۰,۱,۱) \\ N(-۱,۲,۳) \\ A(۲,-۲,۱) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{MN}=(-۱,۱,۲)\Rightarrow L:\frac{x-۲}{-۱}=\frac{y-(-۲)}{۱}=\frac{z-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow L=۲-x=y+۲=\frac{z-۱}{۲}$$

۸. گزینه‌ی (۳)

چون خط L موازی بردار $\vec{a}$ است، پس بردار هادی خط نیز موازی $\vec{a}$ می‌باشد؛ در نتیجه ابتدا باید بردار هادی خط را به‌دست آوریم و سپس شرط موازی بودن دو بردار را چک کنیم:

$$\begin{cases} \frac{x-۱}{۲}=\frac{۲y}{۳}=\frac{z+۱}{۲}\Rightarrow \frac{x-۱}{۲}=\frac{y-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{z+۱}{۲}\Rightarrow \vec{u}=(۲,\frac{۳}{۲},۲) \\ \vec{a}=(۱,b,c) \end{cases}$$

$$\vec{a}\parallel\vec{u}\Rightarrow \frac{۲}{۱}=\frac{\frac{۳}{۲}}{b}=\frac{۲}{c}\Rightarrow \begin{cases} c=۱ \\ b=\frac{۳}{۴} \end{cases}\Rightarrow \vec{a}=(۱,\frac{۳}{۴},۱)$$

اندازه تصویر بردار $\vec{a}$ روی صفحه yz برابر است با:

$$\vec{a}'=(۰,\frac{۳}{۴},۱)\Rightarrow |\vec{a}'|=\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+۱}=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۵}{۴}$$

۹. گزینه‌ی (۴)

از آن‌جا که نقطه A روی خط قرار دارد، پس در معادله خط صدق می‌کند؛ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A(a,b,-1) \\ \dfrac{z+1}{2}=\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{2y+1}{3} \end{cases} \Rightarrow A \in \text{خط}$$

$$\Rightarrow \frac{a-2}{3}=\frac{2b+1}{3}=\frac{-1+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

حال باید معادله خطی را به‌دست آوریم که از نقاط $A(2,\frac{-1}{2},-1)$ و $B(-1,1,0)$ بگذرد:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3,\frac{3}{2},1)$$

ولی این بردار هادی، در هیچ یک از گزینه‌ها وجود ندارد. ولی با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر عدد ۲ را در این بردار ضرب کنیم، بردار هادی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{u}=(-6,3,2) \Rightarrow L: \frac{x+1}{-6}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$$

۱۰. گزینه‌ی (۱)

برای بررسی آن که این خط کدام محور مختصاتی را قطع می‌کند، در هر مرحله دو مؤلفه را برابر صفر قرار می‌دهیم و مؤلفه دیگر را به‌دست می‌آوریم. اگر برای مؤلفه سوم یک مقدار به‌دست آید، آن محور را قطع می‌کند، یعنی:

$x=y=0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow$ محور zها را قطع نمی‌کند.

$x=z=0 \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{-2}{4} \Rightarrow$ محور y ها را قطع می‌کند.

$y=z=0 \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{4} \Rightarrow$ محور xها را قطع نمی‌کند.

۱۱. گزینه‌ی (۱)

ابتدا معادله خطی را می‌نویسیم که از نقاط $(1,-1,0)$, $(0,1,2)$ بگذرد:

$$\vec{u}=(-1,2,2) \Rightarrow L: \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$$

حال از آن‌جا که نقطه $A(a,b,4)$ روی خط قرار دارد پس در معادله آن صدق می‌کند:

$$A \in L: \frac{a}{-1}=\frac{b-1}{2}=\frac{4-2}{2} \Rightarrow -a=\frac{b-1}{2}=1 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(-1,3)$$

۱۲. گزینه‌ی (۱)

باید معادله خط گذرنده از نقاط A و B را بنویسیم و سپس نقاط را در خط چک کنیم:

$$\begin{cases} \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,-1,-2) \\ A(-1,2,1) \\ B(2,1,-1) \end{cases} \Rightarrow L: \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-2}$$

در نهایت با امتحان کردن گزینه‌ها، تنها نقطه $(5,0,-3)$ در این خط صدق می‌کند.

۱۳. گزینه‌ی (۲)

$$\begin{cases} A(2,-1,1) \\ B(2,3,-1) \end{cases} \Rightarrow L: \frac{x-2}{2-2}=\frac{y+1}{3-(-1)}=\frac{z-1}{-1-1}$$

$$\Rightarrow L: \begin{cases} x=2 \\ \dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{-2} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع با صفحه xy } (z=0)} p(2,1,0)$$

$$\Rightarrow |po|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

۱۴. گزینه‌ی(۴)

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{3} \xrightarrow[(y=0)]{\text{تقاطع با صفحه xoz}} M(\frac{5}{3},0,0)$$

$$\Rightarrow a+b=\frac{5}{3}$$

۱۵. گزینه‌ی (۲)

چون سه نقطه روی خط قرار دارند، پس بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ موازی یکدیگرند.

$$\begin{cases} A(a-4,1,0) \\ B(a-6,-4,-2) \\ C(7,b,4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}(-2,-5,-2) \\ \overrightarrow{AC}(11-a,\ b-1,\ 4) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{-2}{11-a}=\frac{-5}{b-1}=\frac{-2}{4} \Rightarrow \begin{cases} 4=11-a \Rightarrow a=7 \\ 10=b-1 \Rightarrow b=11 \end{cases} \Rightarrow a+b=18$$

درسنامه ۲: معادله پارامتری خط

معادله پارامتری خط: برای به‌دست آوردن معادله پارامتری خطی که از نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و موازی بردار $\vec{u}=(p,q,r)$ می‌باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}=t \Rightarrow L: \begin{cases} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \\ z=rt+z_0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

در این معادله برای به‌دست آوردن راستای خط همواره باید ضرایب x، y و z برابر $+1$ باشد و ضرایب t در هر سه جمله، بردار هادی خط را نمایش می‌دهد.

نکته: برای تبدیل فرم استاندارد خط به فرم پارامتری فقط کافیست هر سه کسر را برابر با t قرار دهیم و از آن‌جا x و y و z را به‌دست آوریم و برای تبدیل فرم پارامتری به استاندارد، در هر سه جمله باید t را محاسبه کنیم و سه کسر را با یک‌دیگر مساوی قرار دهیم.

به‌دست آوردن نقطه روی خط در فرم پارامتری: بدین منظور فقط باید به‌جای t، یک عدد حقیقی دلخواه قرار دهیم و از آن‌جا x و y و z را به‌دست آوریم.

۱۶. گزینه‌ی (۱)

معادله پارامتری خطی که از نقطه $A(-1,1,2)$ می‌گذرد و موازی بردار $(1,1,-2)$ می‌باشد، برابر است با:

$$L: \begin{cases} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \\ z=rt+z_0 \end{cases} \Rightarrow L: \begin{cases} x=t-1 \\ y=t+1 \\ z=-2t+2 \end{cases}$$

۱۷. گزینه‌ی (۲)

توجه داشته باشید که در فرم استاندارد و پارامتری برای به‌دست آوردن بردار هادی خط همواره ضریب x و y و z باید $+1$ باشد. در نتیجه ابتدا ضرایب را $+1$ می‌کنیم و بردار هادی خط یا راستای خط را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x=t-1 \\ y=t+1 \\ 3z=3-3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2} \\ y=t+1 \\ z=1-t \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(\frac{1}{2},1,-1)$$

۱۸. گزینه‌ی (۳)

برای به‌دست آوردن نقطه روی خط باید به‌جای t یک عدد دلخواه قرار دهیم و x و y و z را محاسبه کنیم. هم‌چنین می‌توانیم تک تک گزینه‌ها را جایگذاری کنیم و گزینه‌ای که برای آن در هر سه جمله یک مقدار t به‌دست آید، جواب مسئله خواهد بود ولی این روش، کمی طولانی‌تر است و در این سوال چون ارتفاع ۳ نقطه یک است؛ پس $2-t=1$ می‌باشد در نتیجه $t=1$ به‌دست می‌آید و بنابراین $A(1,0,1)$ است.

$\begin{cases}2x=t+1\\ y=t-1\\ z=2-t\end{cases} \xrightarrow{t=1} \begin{cases}2x=2\\ y=0\\ z=1\end{cases} \Rightarrow A(1,0,1)$

۱۹. گزینه‌ی (۱)

برای تبدیل فرم کانونیک به فرم پارامتری باید هر سه کسر را برابر t قرار دهیم و از آن‌جا x و y و z را به‌دست آوریم:

$$L:\frac{2-x}{2}=y-1=z=t \Rightarrow \begin{cases}\frac{2-x}{2}=t\\ y-1=t\\ z=t\end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases}x=2-2t\\ y=t+1\\ z=t\end{cases}$$

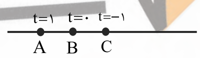
۲۰. گزینه‌ی (۴)

برای تبدیل فرم پارامتری به متقارن باید در هر عبارت، t را به دست آوریم و سه کسر را مساوی هم قرار دهیم.

$$L:\begin{cases}x=2t-1\\ 2y=2t+1\\ 3z=6t\end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases}\frac{x+1}{2}=t\\ \frac{2y-1}{2}=t\\ \frac{z}{2}=t\end{cases} \Rightarrow L:\frac{x+1}{2}=y-\frac{1}{2}=\frac{z}{2}$$

۲۱. گزینه‌ی (۲)

نکته: هر گاه خواستیم دسته نقاطی روی خط مفروضی به‌دست آوریم، حتماً معادله خط را به فرم پارامتری تبدیل می کنیم و معادله خط به‌فرم پارامتری، نماینده همه نقاط روی خط می‌باشند، زیرا به‌ازای هر عدد t دلخواه یک نقطه روی آن خط به‌دست می‌آید. در نتیجه فرم پارامتری خط نماینده همه نقاط روی خط خواهد بود.



در نتیجه در این سؤال برای پیدا کردن نقاط مورد نظر، ابتدا خط را به فرم پارامتری تبدیل می‌کنیم و فاصله آن نقاط را تا نقطه A به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}L:\frac{2-x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3}=t\Rightarrow L:\begin{cases}x=2-2t\\ y=t-1\\ x=3t+1\end{cases}\Rightarrow B(2-2t\,,\,t-1\,,\,3t+1)\\ A(2,-1,1)\end{cases}$$

$$|AB|=\sqrt{14}\Rightarrow\sqrt{(2-2t-2)^2+(t-1-(-1))^2+(3t+1-1)^2}=\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow\sqrt{4t^2+t^2+9t^2}=\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow 14t^2=14\Rightarrow t^2=1$$

$$\Rightarrow t=\pm1\begin{cases}t=1\Rightarrow B(0,0,4)\\ t=-1\Rightarrow B(4,-2,-2)\end{cases}$$

پس دو نقطه روی این خط وجود دارد که فاصله‌شان تا A برابر $\sqrt{14}$ است.

۲۲. گزینه‌ی (۴)

در این سؤال برای به‌دست آوردن نقطه روی خط کار ساده‌تر است. چون معادله داده شده، یک معادله پارامتری است و داریم:

$$\begin{cases}L:\begin{cases}2x=2t+2\\ y=t\\ z=t-3\end{cases}\Rightarrow B(t+1,t,t-3)\\ A(5,3,-3)\end{cases}\Rightarrow |AB|=1$$

$$\Rightarrow\sqrt{(t+1-5)^2+(t-3)^2+\left(t-3-(-3)\right)^2}=1$$

$$\Rightarrow\sqrt{(t-4)^2+(t-3)^2+t^2}=1\Rightarrow t^2-8t+t^2-6t+t^2+16+9=1$$

$$\Rightarrow 3t^2-14t+24=0$$

ولی در این معادله $\Delta=-92<0$ می‌باشد، پس ریشه حقیقی ندارد و در واقع هیچ نقطه‌ای روی خط وجود ندارد که فاصله‌اش تا A برابر ۱ باشد.

۲۳. گزینه‌ی (۳)

ابتدا معادله پارامتری خط گذرنده از $M(0,2,-1)$ و موازی بردار $\vec{u}=(2,-1,1)$ را می‌نویسیم:

$$L:\begin{cases}x=pt+x_0\\ y=qt+y_0\\ z=rt+z_0\end{cases}\Rightarrow L:\begin{cases}x=2t+0\\ y=-t+2\\ z=t-1\end{cases}\Rightarrow B(2t\,,-t+2,t-1)$$

حال فاصله این نقطه را تا مبدأ به‌دست می‌آوریم:

$$|BO|=\sqrt{(2t)^2+(-t+2)^2+(t-1)^2}\Rightarrow\sqrt{4t^2+t^2-4t+t^2-2t+4+1}=\sqrt{17}$$

$$6t^2-6t-12=0\Rightarrow t_1=-1, t_2=2$$

$$\begin{cases}t=-1\Rightarrow B(-2,3,-2)\\ t=2\Rightarrow B(4,0,1)\end{cases}$$

و تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب این سوال باشد.

۲۴. گزینه‌ی (۲)

ابتدا باید معادله کانونیک خط را به فرم پارامتری تبدیل کنیم پس:

$$\begin{cases}L:y=z+2=x=t\\ A(0,2,2)\end{cases}\Rightarrow L:\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t-2\end{cases}\Rightarrow B(t,t,t-2)$$

$$|AB|=\sqrt{(t-0)^2+(t-2)^2+(t-2-2)^2}=\sqrt{t^2+t^2-4t+4+t^2-8t+16}$$

$$=\sqrt{3t^2-12t+20}=\sqrt{3(t^2-4t+4)+8}=\sqrt{3(t-2)^2+8}$$

حال چون می‌خواهیم کمترین فاصله را به‌دست آوریم، پس حاصل $\sqrt{3(t-2)^2+8}$ باید کمترین مقدار خود را داشته باشد و زمانی این اتفاق رخ می‌دهد که $(t-2)^2=0$ باشد، پس $t=2$ می‌باشد.

$$t=2\Rightarrow B(2,2,2-2)=(2,2,0)$$

۲۵. گزینه‌ی (۲)

چون خط موردنظر موازی خط $L:\begin{cases}x=a+1\\ y=1-a\\ z=2-2a\end{cases}$ می‌باشد؛ در نتیجه بردار هادی خط L را می‌توان بردار هادی خط موردنظر در نظر گرفت، زیرا بردار هادی خط L موازی خط مورد نظر خواهد بود و داریم:

$$\vec{u}=(1,-1,-2)\Rightarrow L':\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-2}$$

و با طرفین و وسطین کردن این معادله داریم:

$$\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}\\ \frac{x}{1}=\frac{z}{-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+x=0\\ z+2x=0\end{cases}$$

۲۶. گزینه‌ی (۲)

برای به‌دست آوردن نقطه روی خط ابتدا معادله خط را به‌صورت پارامتری می‌نویسیم و فاصله نقطه به‌دست آمده را تا مبدأ مختصات محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{x-14}{2}=\frac{y}{3}=z=t\\ O(0,0,0)\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}x=2t+14\\ y=3t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow|OA|=\sqrt{(2t+14)^2+(3t)^2+t^2}$$

$$=\sqrt{14t^2+56t+196}$$

$$=\sqrt{14(t^2+4t+4)+140}=\sqrt{14(t+2)^2+140}$$

و برای آن‌که $|OA|$ کمترین مقدار باشد باید $t=-2$ باشد در نتیجه نقطه A برابر است با:

$A(10,-6,-2)\Rightarrow$ جمع مختصات $=10-6-2=2$

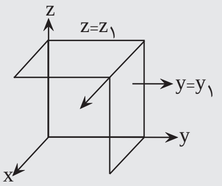
۲۷. گزینه‌ی (۴)

اگر $t=\frac{-1}{2}$ باشد در آن‌صورت $\begin{cases}x=y=0\\ z=\frac{-3}{2}\end{cases}$ یعنی فقط محور z را قطع می‌کند.

درسنامه ۳: معادله خطوط خاص

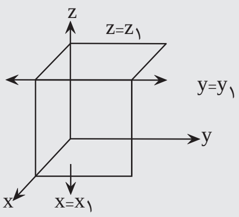
معادله خطوط موازی محورهای مختصاتی (عمود بر صفحات مختصات):

۱) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و موازی محور ox (عمود بر صفحه yz) به‌صورت $L:\begin{cases}y=y_1\\z=z_1\end{cases}$ و بردار هادی این خط برابر $\vec{u}=(p,0,0)$ یا به بیان ساده‌تر $\vec{u}=(1,0,0)$ می‌باشد و معادله پارامتری این خط به‌صورت زیر خواهد بود:



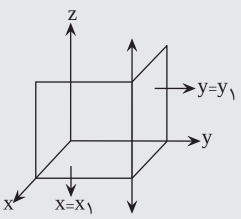
$$L:\begin{cases}x=pt+x_1\\y=y_1\\z=z_1\end{cases} \quad \text{یا} \quad L:\begin{cases}x=t\\y=y_1\\z=z_1\end{cases} \quad \text{یا} \quad L:\begin{cases}y=y_1\\z=z_1\end{cases}$$

۲) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و موازی محور oy (عمود بر صفحه xz) به صورت $L:\begin{cases}x=x_1\\z=z_1\end{cases}$ و بردار هادی این خط برابر $\vec{u}=(0,q,0)$ یا به بیان ساده‌تر $\vec{u}=(0,1,0)$ می‌باشد و معادله پارامتری این خط به‌صورت زیر می‌باشد:



$$L:\begin{cases}x=x_1\\y=qt+y_1\\z=z_1\end{cases} \quad \text{یا} \quad L:\begin{cases}x=x_1\\y=t\\z=z_1\end{cases} \quad \text{یا} \quad L:\begin{cases}x=x_1\\z=z_1\end{cases}$$

۳) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و موازی محور oz (عمود بر صفحه xy) به‌صورت $L:\begin{cases}x=x_1\\y=y_1\end{cases}$ می‌باشد و بردار هادی این خط برابر $\vec{u}=(0,0,r)$ یا به بیان ساده‌تر $\vec{u}=(0,0,1)$ می‌باشد و معادله پارامتری این خط برابر است با:



$$L:\begin{cases}x=x_1\\y=y_1\\z=rt+z_1\end{cases} \quad \text{یا} \quad L:\begin{cases}x=x_1\\y=y_1\\z=t\end{cases} \quad \text{یا} \quad L:\begin{cases}x=x_1\\y=y_1\end{cases}$$

نکته: حال اگر خطوط فوق از مبدأ مختصات بگذرد، معادله یکی از محورها به‌دست می‌آید:

۱) معادله محور ox $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$

۲) معادله محور oy $\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$ ۳) معادله محور oz $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

معادله خطوط عمود بر محورهای مختصاتی (موازی صفحات مختصاتی):

۱) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و عمود بر محور ox (موازی صفحه yz) به‌صورت $L:\begin{cases}x=x_1\\\dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{r}\end{cases}$ یا $L:\begin{cases}x=x_1\\y=qt+y_1\\z=rt+z_1\end{cases}$ می‌باشد و بردار هادی آن برابر $\vec{u}=(0,q,r)$ می‌باشد.

۲) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_1,y_1,z_1)$ و عمود بر محور oy (موازی صفحه xz) به‌صورت $\begin{cases}y=y_1\\\dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{z-z_1}{r}\end{cases}$ یا $L:\begin{cases}y=y_1\\x=pt+x_1\\z=rt+z_1\end{cases}$ و بردار هادی این خط $\vec{u}(p,0,r)$ می‌باشد.

۳) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و عمود بر محور oz (موازی صفحه xy) به صورت $L:\begin{cases}z=z_1\\\dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{y-y_1}{q}\end{cases}$ یا $L:\begin{cases}x=qt+x_1\\y=qt+y_1\\z=z_1\end{cases}$ و بردار هادی آن برابر $\vec{u}=(p,q,0)$ می‌باشد.

۲۸. گزینه‌ی (۲)

معادله خطی که از نقطه $A(1,2,-2)$ می‌گذرد و موازی محور oy می‌باشد به‌صورت $\begin{cases}x=1\\z=-2\end{cases}$ می‌باشد.

۲۹. گزینه‌ی (۲)

$$A(1,3,2),\ d\perp yoz \Rightarrow d:\begin{cases}y=y_1\\z=z_1\end{cases} \Rightarrow d:\begin{cases}y=3\\z=2\end{cases}$$

۳۰. گزینه‌ی (۴)

این خط بر صفحه yz$(x=0)$ عمود و با محور ox موازی است.

$$d:\begin{cases}y=2\\z=-1\end{cases} \perp yoz,\ \| ox$$

۳۱. گزینه‌ی (۲)

دراین خط چون مؤلفه z برابر یک عدداست پس خط بر oz عموداست.

$$d:\begin{cases}x=y-2\\z=3\end{cases} \perp oz,\ \| xoy$$

فصل چهارم

ماتریس و دترمینان

آنچه در این فصل می‌خوانیم

تعریف و ضرب ماتریس‌ها
توان‌رسانی ماتریس‌ها
ماتریس ترانهاده
ماتریس متقارن و پادمتقارن
ماتریس‌ها و تبدیلات هندسی در صفحه
دترمینان و ویژگی‌های آن

تعریف و ضرب ماتریس‌ها ـ توان رسانی ماتریس‌ها

۱. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1\\m&1\end{bmatrix}$ و $A^2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\-6&a_{22}\end{bmatrix}$ ، مقدار m کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۳ ۴) ۲

۲. اگر $A=\begin{bmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

۱) $3x$ ۲) $3y$ ۳) $2(x^2+y^2)$ ۴) $3(x^2+y^2)$

۳. اگر $a=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ، $b=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ ، $m=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ و $m=\alpha a+\beta b$ باشند، آن‌گاه α و β کدام است؟

۱) $\alpha=\beta=-1$ ۲) $\alpha=-\beta=1$ ۳) $\alpha=\beta=1$ ۴) $\alpha=-\beta=-1$

۴. اگر $A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}3&-1\\5&2\\7&1\end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix}-1&2&4\\5&2&1\end{bmatrix}$ و $C=A\times B=[C_{ij}]$ باشند، آن‌گاه حاصل C_{32} کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۵. جواب‌های معادله $[x\quad 1]\begin{bmatrix}-1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$ کدامند؟

۱) -3 و -1 ۲) -3 و ۱ ۳) ۳ و -1 ۴) ۳ و ۱

۶. گر درایه‌های سطر چهارم ماتریس A، $-1,2,5,0$ و درایه‌های ستون سوم ماتریس B، $1,-2,5,0$ باشند، درایه سطر چهارم و ستون سوم AB چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس $(A+I)(A-I)$ عضو 2×2 کدام است؟

۱) ۴ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) صفر

۸. اگر $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&-1\end{bmatrix}$ آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A^2 کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۷۲

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ ، کدام گزینه درست است؟

۱) $B^2A=A$ ۲) $BA=I$ ۳) $BA=AB$ ۴) $B^3A=I$

۱۱. در دستگاه $\begin{bmatrix}y\\2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x&3y\\1&2\end{bmatrix}$ حاصل $x+2y$ کدام است؟ *(آزاد تجربی ـ ۸۳)*

۱) ۸ ۲) صفر ۳) -8 ۴) -4

۱۲. اگر A یک ماتریس بالا مثلثی و B هم یک ماتریس بالا مثلثی باشد. آن‌گاه AB همواره ماتریسی:

۱) بالا مثلثی است. ۲) پایین مثلثی است.

۳) قطری است. ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد .

۱۳. اگر $D=[d_{ij}]_{3\times3}$ باشد به طوری‌که $d_{ij}=2i+3j$ ، جمع عناصر سطر دوم D کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۰

۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$ و $A^2=mA+nI$ ، آن‌گاه $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵. در ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&m+1\\1&5\\m-2&0\end{bmatrix}$ اگر درایه واقع در محل تلاقی سطر اول و ستون دوم، دو برابر درایه واقع در محل تلاقی سطر سوم با ستون اول باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۶. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&۱\\۲&b\end{bmatrix}$ در رابطه $A^۲-۵A+۴I=\bar{O}$ صدق کند، $|a-b|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷. اگر $C=\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&b\\a&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه a و b چه باشند تا حاصل یک ماتریس قطری شود؟

۱) $b=۲a=۲$ ۲) $a=b=-۱۰$ ۳) $a=-b=۱$ ۴) $۲a=b=-۲$

۱۸. اگر $\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه $x+y-۲xy$ کدام است؟

۱) ۵۸ ۲) ۵۹ ۳) -۶ ۴) ۵

۱۹. اگر A و B و C ماتریس‌های $n\times n$ و $\bar{O}$ ماتریس صفر $n\times n$ باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) اگر $AB=\bar{O}$ آن‌گاه $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$
۲) اگر $AB=AC$ آن‌گاه $B=C$
۳) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$
۴) اگر $A=B$ آن‌گاه $AC=BC$

۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&-۴\\۰&-۳&-۵\\۰&۰&۲\end{bmatrix}$ جمع عناصر قطر اصلی $A^۲$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) صفر ۴) -۱

۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۴&۵&۱\\-۱&۴&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۰\\۱&۴\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۳&۲&۱\\۲&۱&۴\end{bmatrix}$ مفروض باشند، درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس ABC کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۷ ۳) ۲۸ ۴) ۲۹

۲۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&-۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^۲+A$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۲&۲\\۰&۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۲&۲\\۱&۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۲&۱\\۲&۰\end{bmatrix}$

۲۳. اگر $[x\ \ ۲\ \ ۱]\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۰\\۵&۷\end{bmatrix}=[۱۱\ \ y]$، مقدار $x-y$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix}x&y\\۱&-۱\end{bmatrix}$ و $A^۲=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}$ باشد و $(\alpha I+\beta A)^۲=A$، آن‌گاه $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۴\\۱&۳\end{bmatrix}$ باشد و $f(x)=x^۲-۵x+۲$، آن‌گاه $f(A)$ کدام است؟

۱) A ۲) $A+I$ ۳) $A-I$ ۴) $\bar{O}$

۲۷. اگر $A=\begin{bmatrix}-۲&۱\\۵&۴\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I_۲$ باشند، دوتایی (α,β) کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)

۱) $(۲,۱۱)$ ۲) $(۲,۱۳)$ ۳) $(۲,۱۱)$ ۴) $(۴,۱۳)$

۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix}-۲&۵\\-۱&۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^۲-A$ کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۸۵)

۱) $\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱&-۱\\۰&۱\end{bmatrix}$

۲۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$، ماتریس $A^۵$ کدام است؟

۱) $۴۳۲A$ ۲) $۸۱A$ ۳) $۵A$ ۴) A

۳۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}$، حاصل $A^{۱۰۰}-A^{۹۹}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۱&۰&۱\\۰&۰&۰\\۱&۰&-۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۰&۰\\۱&۰&۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۰&۰&۰\\-۱&۰&۱\end{bmatrix}$ ۴) $\bar{O}$

پاسخنامه

درسنامه ۱: تعریف و ضرب ماتریس‌ها

تعریف ماتریس : یک آرایش مستطیلی از اعداد را یک ماتریس می‌گویند و به اعداد هر ماتریس درایه‌های ماتریس می‌گویند. درایه‌های روی خط افقی را سطر و درایه‌های روی خط قائم را ستون می‌گویند. اگر ماتریس دارای m سطر و n ستون باشد، آن‌گاه ماتریس M را از مرتبه $m\times n$ می‌گویند.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

انواع ماتریس:

۱) **ماتریس همانی یا واحد:** ماتریسی است مربعی که درایه‌های غیر قطر اصلی آن صفرند و درایه‌های روی قطر اصلی همگی یک‌اند.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & \bar{0} \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \bar{0} & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ماتریس همانی، ماتریس خنثی در ضرب ماتریس‌هاست.

۲) **ماتریس اسکالر:** ماتریسی مربعی است که درایه‌های غیر قطر اصلی آن صفرند و درایه‌های روی قطر اصلی آن برابرند.

$$\begin{bmatrix} k & & \bar{0} \\ & k & \\ & & \ddots & \\ \bar{0} & & & k \end{bmatrix}_{n\times n} = k\begin{bmatrix} 1 & & \bar{0} \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \bar{0} & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} = kI_n$$

۳) **ماتریس صفر:** ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشد. این ماتریس، ماتریس خنثی در جمع ماتریس‌هاست.

۴) **ماتریس قطری:** ماتریسی است مربعی که همه عناصر خارج قطر اصلی آن صفرند.

۵) **ماتریس بالامثلثی:** ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های پایین قطر اصلی صفر می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} \ddots & \text{عدد} \\ \bar{0} & \ddots \end{bmatrix}$$

۶) **ماتریس پایین‌مثلثی:** ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} \ddots & \bar{0} \\ \text{عدد} & \ddots \end{bmatrix}$$

۷) **ماتریس پوچ توان:** ماتریسی مربع $A_{n\times n}$ که $A\neq\bar{0}\ ,\ \exists n : A^k = \bar{0}$ می‌باشد. یعنی توانی از ماتریس وجود دارد که ماتریس صفر به دست می‌آید.

۸) **ماتریس خود توان:** ماتریسی مربع A که در آن $A^2 = A$ در نتیجه $A^n = A$ می‌باشد.

ضرب ماتریس‌ها:

دو ماتریس زمانی قابل ضرب در یکدیگرند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد و برای ضرب ماتریس‌ها، سطر را از ماتریس اول و ستون را از ماتریس دوم در نظر می‌گیریم و نظیر به نظیر در هم ضرب می‌کنیم و مؤلفه سطر i ام ستون j ام به دست می‌آید.

$$[A]_{m\times n}\times[B]_{n\times p} = [C]_{m\times p} \quad , \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

ویژگی‌ها:

۱) $AB\neq BA$

۲) $A=B \Rightarrow AC=BC$

۳) $A(B+C)=AB+AC$

۴) $A(BC)=(AB)C$

۵) $AC=BC \not\Rightarrow A=B$

۶) $AB=\bar{0} \not\Rightarrow A=\bar{0}$ یا $B=\bar{0}$

۷) $I_nA = AI_n = A$

۱. گزینه‌ی(۱)

(−۶) درایه سطر دوم ستون اول A^2 است، پس:

$$\text{(ستون اول A)} \times \text{(سطر دوم A)} = -6$$

$$\Rightarrow -6 = \begin{bmatrix} m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \Rightarrow -6 = 2m \Rightarrow m = -3$$

۲. گزینه‌ی(۱)

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 2y+x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{سطر دوم ستون سوم } A^2 = \text{(سطر دوم A)}\,\text{(ستون سوم } A^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2y+x^2 \\ 2x \\ 1 \end{bmatrix} = 3x$$

به طور کلی:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & nx & f(x,y) \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۳. گزینه‌ی(۴)

$$m = \alpha a + \beta b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta \\ 3\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

۴. گزینه‌ی(۳)

اگر $AB = C$ عنصر C_{ij} از ماتریس C برابر است با سطر i ام A در ستون j ام B بنابراین:

$$C_{23} = \text{(سطر دوم A)} \times \text{(ستون سوم B)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 22$$

۵. گزینه‌ی(۳)

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

۶. گزینه‌ی(۴)

دقت کنیم درایه سطر چهارم و ستون سوم AB برابر است با سطر چهارم A در ستون سوم B:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = [0+10+10+0] = 20$$

۷. گزینه‌ی(۴)

$$A+I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A-I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[عنصر m_{22} ماتریس $M = (A+I)(A-I)$]

$$= \text{(سطر دوم A+I)}\,\text{(ستون دوم A−I)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

۸. گزینه‌ی (۳)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x-y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=1 \Rightarrow x+y=3$$

۹. گزینه‌ی(۳)

نکته: اگر $A^2 = \lambda A$ آن گاه $A^n = \lambda^{n-1}A$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 12 & 12 & 12 \\ 18 & 18 & 18 \end{bmatrix} = 6A \Rightarrow A^3 = 6^2 A$$

پس جمع ستون دوم A^3 عبارتست از جمع عناصر ماتریس ستونی $36\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ یعنی ۲۱۶ جواب است.

تذکر: اگر همه سطرهای $A_{n\times n}$ مضربی از یک سطر باشند $A^2 = (TracA)A$. منظور از $(TracA)$ جمع عناصر قطر اصلی A است.

۱۰. گزینه‌ی(۱)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow B^2 A = IA = A$$

۱۱. گزینه‌ی(۲)

$$\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 9y = y \\ 2 + 6 = 2x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x + 2y = 0 \end{cases}$$

۱۲. گزینه‌ی(۱)

ضرب دو ماتریس بالا مثلثی یک ماتریس بالا مثلثی است.

ضرب دو ماتریس پایین مثلثی یک ماتریس پایین مثلثی است.

ازضرب یک ماتریس بالامثلثی در پایین مثلثی ماتریس خاصی به دست نمی‌آید.

۱۳. گزینه‌ی(۴)

$$\text{سطر دوم جمع عناصر} = \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 4+6 & 4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

سطر دوم $30 = 7 + 10 + 13$ است.

۱۴. گزینه‌ی(۱)

قضیه کیلی هامیلتون:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+d)A + |A|I = \bar{O}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه همواره $A^2 - 3A + 2I = \bar{O}$ یعنی $A^2 = 3A - 2I$، بامقایسه صورت مسئله‌که $A^2 = mA + nI$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم $\begin{cases} m=3 \\ n=-2 \end{cases}$ پس $m+n=1$.

۱۵. گزینه‌ی(۳)

$$a_{12} = 2a_{21} \Rightarrow m+1 = 2(m-2) \Rightarrow m = 5$$

۱۶. گزینه‌ی(۱)

در این جا چون $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{bmatrix}$ داریم $A^2 - (a+b)A + (ab-2)I = \bar{O}$.

پس $\begin{cases} a+b=5 \\ ab-2=4 \end{cases}$ بنابراین $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ یا $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ جواب است.

در نتیجه $|a-b| = 1$ خواهد بود.

۱۷. گزینه‌ی(۴)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & b \\ a & 1 \end{bmatrix} = \text{ماتریس قطری} \Rightarrow \begin{cases} c_{12} = b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \\ c_{21} = 4 + 4a = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

۱۸. گزینه‌ی(۲)

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=4\\3x+4y=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-6\\y=5\end{cases}\Rightarrow x+y-2xy=59$$

۱۹. گزینه‌ی (۴)

۲۰. گزینه‌ی(۲)

تذکر: اگر A یک ماتریس بالا مثلثی باشد، آن گاه A^n بالا مثلثی است و در A^n عناصر قطر اصلی A بتوان n می‌رسند.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-4\\0&-3&-5\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1^2&-&-\\0&(-3)^2&-\\0&0&(2)^2\end{bmatrix}$$

جمع عناصر قطر اصلی A^2 برابر $(1+9+4=14)$ می‌باشد.

۲۱. گزینه‌ی (۲)

$$A_{2\times3}\times B_{3\times2}\times C_{2\times3}=D_{23}$$

$$d_{23}=\begin{bmatrix}-1&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=27$$

۲۲. گزینه‌ی(۱)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^2+A=\begin{bmatrix}2&2\\0&0\end{bmatrix}$$

۲۳. گزینه‌ی(۱)

$$\begin{bmatrix}x&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&0\\5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+5&x+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2x+5&x+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=10\end{cases}\Rightarrow x-y=-7$$

۲۴. گزینه‌ی(۱)

$$A^2=\begin{bmatrix}x&y\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+y&xy-y\\x-1&y+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\\y+1=2\end{cases}\Rightarrow x+y=2$$

۲۵. گزینه‌ی(۱)

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\Rightarrow \alpha I+\beta A=\alpha\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow(\alpha I+\beta A)^2=\begin{bmatrix}\alpha^2-\beta^2&2\alpha\beta\\-2\alpha\beta&\alpha^2-\beta^2\end{bmatrix}=A$$

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=0\\2\alpha\beta=1\end{cases}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{1}{2}$$

۲۶. گزینه‌ی(۴)

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix},\ f(x)=x^2-5x+2$$

با توجه به قضیه کیلی هامیلتون :

$$A^2-5A+2I=\bar{O}\Rightarrow f(A)=\bar{O}$$

۲۷. گزینه‌ی(۲)

اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه $A^2-(a+d)A+|A|I_2=O$ است. پس:

$$A^2-2A-13I=O \text{ یا } A^2=2A+13I\Rightarrow\alpha=2,\beta=13$$

۲۸.گزینه‌ی(۱)

روش اول:

باتوجه به قضیه کیلی‌هامیلتون، چون $A=\begin{bmatrix}-2&5\\-1&3\end{bmatrix}$ است، بنابراین :

$$A^2-A+\begin{vmatrix}-2&5\\-1&3\end{vmatrix}I=\bar{O}\Rightarrow A^2-A=I$$

روش دوم:

$$A^2-A=\begin{bmatrix}-2&5\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&5\\-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&5\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

درسنامه ۲ : ماتریس‌های تعویض‌پذیر ـ توان رسانی ماتریس‌ها

ماتریس‌های تعویض‌پذیر: اگر A و B دو ماتریس باشند به طوری که $AB=BA$، آن گاه A و B تعویض‌پذیرند. در این صورت الزاماً A , B مربعی هم مرتبه‌اند.

ویژگی‌ها:

۱) اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، آن گاه:

الف) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

در حالت کلی اتحادهای جبری زمانی برای ماتریس‌ها برقرارند که A و B تعویض پذیر باشند.

ب) $AB^n=B^nA$

ج) $(AB)^n=A^nB^n$ $\quad$ A و B دو ماتریس مربعی‌اند

۲) دو ماتریس مربعی و هم مرتبه که یکی از آن‌ها اسکالر باشد، تعویض‌پذیرند.

۳) دو ماتریس هم مرتبه و قطری تعویض‌پذیرند.

توان‌رسانی ماتریس‌ها: برای توان رساندن ماتریس‌ها از روش‌های زیر می‌توان استفاده کرد:

روش اول: با توان ۲ یا ۳ رساندن یک ماتریس به یک روند کلی می‌رسیم و می‌توان توان مورد نظر ماتریس را حدس بزنیم.

روش دوم: اگر بعد از به دست آوردن توان ۲ یا ۳ به ماتریس همانی یا ماتریس صفر رسیدیم، با به توان رساندن آن و ساختن توان مورد نظر، مسأله را حل می‌کنیم.