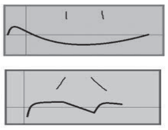
Insert your Try

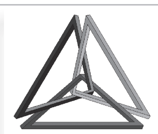
فهرست مطالب

بخش ۵

بخش ۶

بخش ۷





receive your result

ریاضیات تجـــــربی

فصل هشتم

لگاریتم

آنچه در این فصل میخوانیم:

مبنای لگاریتم

تابع نمایی

فرمول های لگاریتم

درسنامه

تعریف لگاریتم:

$$\log_a^x = y \Leftrightarrow x = a^y \quad \begin{cases} x > ۰ \\ a > ۰ \ , \ a \neq ۱ \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

مانند:

$$\log_۲^۸ = ۳ \Leftrightarrow ۸ = ۲^۳ \quad \text{و} \quad \log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = -۳ \Leftrightarrow ۰/۰۰۱ = ۱۰^{-۳} \quad \text{و} \quad \log_n^{n^۲} = ۲$$

توجه در تعریف لگاریتم برای این‌که $\log_a^x$ همواره دارای جواب باشد، x یعنی ورودی لگاریتم را مثبت فرض می‌کنند. هم‌چنین باید $a > ۰$ (مبنا یا پایه) و $a \neq ۱$ باشد.

زیرا $\log_۱^۲$ ، $\log_۱^{۰/۵}$ و $\log_{-۲}^۸$ جواب ندارند.

با این‌که ورودی لگاریتم مثبت است اما خروجی (جواب) یعنی y می‌تواند منفی نیز باشد: $\log_۲^{\frac{۱}{۸}} = -۳$

مبنای لگاریتم آن را به دو دسته تقسیم می‌کنیم

۱) مبنای بزرگتر از واحد: $a > ۱$

۲) مبنای کوچکتر از واحد: $۰ < a < ۱$

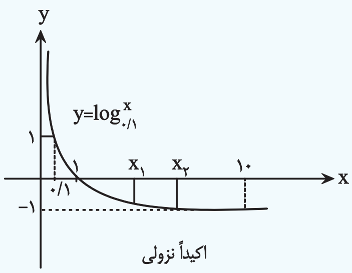
خصوصیات این دو مبنا متفاوت است.

تابع لگاریتم وقتی $a > ۱$ است، اکیداً صعودی است یعنی با افزایش x ، مقدار y نیز افزایش می‌یابد.

تابع لگاریتم وقتی $۰ < a < ۱$ است، اکیداً نزولی است یعنی با افزایش x ، مقدار y کاهش می‌یابد.

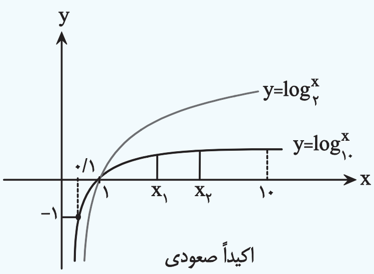
$\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱}$	$\log_{۱۰}^{۰/۰۱}$	$\log_{۱۰}^{۰/۱}$	$\log_{۱۰}^{۱}$	$\log_{۱۰}^{۱۰}$	$\log_{۱۰}^{۱۰۰}$	$\log_{۱۰}^{۱۰۰۰}$
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$\log_{۰/۱}^{۰/۰۰۱}$	$\log_{۰/۱}^{۰/۰۱}$	$\log_{۰/۱}^{۰/۱}$	$\log_{۰/۱}^{۱}$	$\log_{۰/۱}^{۱۰}$	$\log_{۰/۱}^{۱۰۰}$	$\log_{۰/۱}^{۱۰۰۰}$
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳

نمودار لگاریتم: نمودار $y = \log_{۱۰}^x$ و $y = \log_{۰/۱}^x$ را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:



$$x_۲ > x_۱ \xleftrightarrow{۰ < a < ۱} \log_a^{x_۲} < \log_a^{x_۱}$$

$$\log_a^x > y \xleftrightarrow{۰ < a < ۱} x < a^y$$



$$x_۲ > x_۱ \xleftrightarrow{a > ۱} \log_a^{x_۲} > \log_a^{x_۱}$$

$$\log_a^x > y \xleftrightarrow{a > ۱} x > a^y$$

اگر بخواهیم $\log_۲^x$ و $\log_{۱۰}^x$ را مقایسه کنیم، سرعت رشد $\log_۲^x$ بیشتر از سرعت رشد $\log_{۱۰}^x$ است.

ماشین حساب‌ها (calculator) دو دگمه برای لگاریتم دارند $\log x = \log_{۱۰}^x$ که مبنای ۱۰ را نمی‌نویسند و $\operatorname{Ln} x = \log_e^x$ که $e = ۲/۷۱۸ ...$ عدد اویلر که این نوع لگاریتم به لگاریتم نِپری یا لگاریتم طبیعی معروف است.

e^x	۱۰^x
lnx	log x

توجه $\log_a^۱ = ۰ \Leftrightarrow ۱ = a^۰$ لگاریتم عدد ۱ در همه مبناها برابر صفر است.

$\log_a^a = ۱ \Leftrightarrow a = a^۱$ بنابراین $\log ۱۰ = ۱$ و $\operatorname{Ln} e = ۱$

در مبنای بزرگتر از واحد لگاریتم اعداد بزرگ‌تر از ۱، مثبت و لگاریتم اعداد کوچکتر از ۱، منفی است در مبنای کوچکتر از واحد لگاریتم اعداد بزرگ‌تر از ۱، منفی و لگاریتم اعداد کوچکتر از ۱، مثبت است.

در معادلات لگاریتمی اگر $\log_a^u = \log_a^v$ (دو طرف معادله ضریب ۱ و مبنای مساوی داشته باشند)، آن‌گاه $u = v$ زیرا لگاریتم تابعی یک به یک است. توجه کنید که اگر $\sin u = \sin v$ باشد، نمی‌توان گفت فقط $u = v$ زیرا تابع $\sin x$ یک به یک نیست.

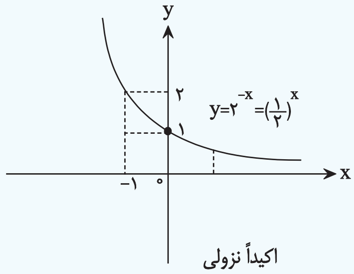
در نامعادلات لگاریتمی اگر $\log_a^u > \log_a^v$ چنان‌چه $a > ۱$ نتیجه می‌شود؛ $u > v$

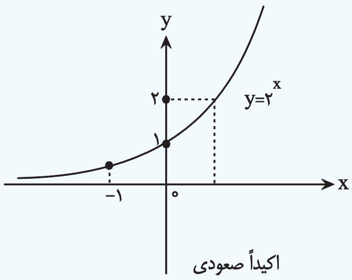
در نامعادلات لگاریتمی اگر $\log_a^u > \log_a^v$ چنان‌چه $۰ < a < ۱$ نتیجه می‌شود: $u < v$

تابع‌نمایی

تابع $y=a^x$ معکوس تابع $y=\log_a^x$ است.

$$f: y=\log_{۱۰}^x \Leftrightarrow f^{-۱}: y=۱۰^x$$
$$f: y=\log_{۰/۱}^x \Leftrightarrow f^{-۱}: y=(۰/۱)^x$$
$$f: y=\ln x \Leftrightarrow f^{-۱}: y=e^x$$





تابع نمایی اگر $a>۱$ (پایه) اکیداً صعودی است و اگر $۰<a<۱$ اکیداً نزولی است.

$$a^{x_۱}>a^{x_۲} \xleftrightarrow{a>۱} x_۱>x_۲$$
$$a^{x_۱}>a^{x_۲} \xleftrightarrow{۰<a<۱} x_۱<x_۲$$

مانند:

$(\sqrt{۲}-۱)^{x+۳}>(\sqrt{۲}-۱)^۴ \Rightarrow x+۳<۴ \Rightarrow x<۱$ زیرا $\sqrt{۲}-۱\approx ۰/۴$.

۱ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_{\frac{۱}{۲}}^{(x-۲)} \geq -۳$ را پیدا کنید.

پاسخ

دامنه متغیر $x-۲>۰ \Rightarrow x>۲$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{(x-۲)} \geq -۳ \Rightarrow x-۲ \leq (\frac{۱}{۲})^{-۳} \Rightarrow x-۲\leq ۸ \Rightarrow x\leq ۱۰$$

با توجه به دامنه متغیر: $۲<x\leq ۱۰$

فرمول‌های لگاریتم

سه فرمول اصلی لگاریتم عبارتند از:

۱) $\log_a^{x\cdot y}=\log_a^x+\log_a^y$ **۲)** $\log_a^{\frac{x}{y}}=\log_a^x-\log_a^y$ **۳)** $\log_a^{x^m}=m\log_a^x$

فرمول‌های لگاریتم برای همه مبناها (مبنای ۱۰، مبنای e، مبنای ۰/۱ و ...) صادق است.

فرمول **۱** به شکل کامل‌تر: $\log_a^{x\cdot y\cdot z}=\log_a^x+\log_a^y+\log_a^z$

توجه کنید $\log_a^{x\cdot y}$ و $\log_a^{\frac{x}{y}}$ فرمول دارند امّا $\log(x+y)$ و $\log(x-y)$ فرمول ندارند.

نوع کامل‌تر فرمول **۳** به شکل کامل‌تر مقابل، از مفیدترین فرمول‌های لگاریتم است. $\log_{a^n}^{x^m}=\frac{m}{n}\log_a^x$

۱ اگر $\log ۲=۰/۳۰۱$ ، $\log ۳=۰/۴۷۸$ ، مطلوبست $\log ۲\sqrt{۳}$ و $\log ۵$:

پاسخ

$$\log ۲\sqrt{۳}=\log ۲+\log\sqrt{۳}=\log ۲+\frac{۱}{۲}\log ۳=۰/۳۰۱+۰/۲۳۹=۰/۵۴۰$$

$$\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-۰/۳۰۱=۰/۶۹۹$$

۲ حاصل عددی $\log_۸^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}$ را پیدا کنید.

پاسخ

روش اول: (از تعریف لگاریتم)

$$\log_۸^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}=m \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۴}=۸^m \Rightarrow \frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^۲}=(۲^۳)^m \Rightarrow ۲^{-\frac{۳}{۲}}=۲^{۳m} \Rightarrow ۳m=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

روش دوم: (از فرمول ۳)

$$\log_۸^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}=\log_{۲^۳}^{۲^{-\frac{۳}{۲}}}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{۳}\log_۲^۲=-\frac{۱}{۲}$$

۳ عبارت $\log_{\sqrt{b}}^{\sqrt[۳]{a}}$ با کدام‌یک از عبارت‌های زیر مساوی است؟

۱) $\log_{b^۳}^{a^۲}$ ۲) $\log_b^{\sqrt[۳]{a^۲}}$ ۳) $\log_{b\sqrt{b}}^a$ ۴) هر سه مورد

پاسخ (۴)

$$\log_{\sqrt{b}}^{\sqrt[۳]{a}}=\log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{a^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}}\log_b^a=\frac{۲}{۳}\log_b^a$$

$$\log_{b^۳}^{a^۲}=\frac{۲}{۳}\log_b^a$$

$$\log_b^{\sqrt[۳]{a^۲}}=\log_b^{a^{\frac{۲}{۳}}}=\frac{۲}{۳}\log_b^a$$

$$\log_{b\sqrt{b}}^a=\log_{b^{\frac{۳}{۲}}}^a=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}\log_b^a=\frac{۲}{۳}\log_b^a$$

۴ جواب معادله $\log_{۹}^{(x-۴)} = \log_{۳}^{\frac{۳}{۲}}$ را پیدا کنید.

پاسخ

باید دو طرف معادله هم مبنا شوند.

راه ساده‌تر این است که مبنای ۳ را به مبنای ۹ تبدیل کنیم: $\log_{۳}^{\frac{۳}{۲}} = \log_{۳^۲}^{(\frac{۳}{۲})^۲}$

$$\log_{۹}^{(x-۴)} = \log_{۹}^{\frac{۹}{۴}} \Rightarrow x-۴ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow x = ۶/۲۵$$

فرمول‌های جانبی لگاریتم

۴) $\log_{b}^{a} \cdot \log_{a}^{b} = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\log_{a}^{b}} = \log_{b}^{a}$

۵) $\log_{b}^{a} \cdot \log_{c}^{b} = \log_{c}^{a}$

۶) $\log_{b}^{a} = \frac{\log_{k}^{a}}{\log_{k}^{b}} = \frac{\log a}{\log b} = \frac{\ln a}{\ln b}$

۷) $x^{\log_{a}^{y}} = y^{\log_{a}^{x}} \quad : \quad a^{\log_{a}^{x}} = x$

تمرین‌ها

۱ حاصل $\log_{\frac{۱}{۴}}^{\sqrt{۳}} \ \log_{۹}^{\sqrt{۵}} \ \log_{۲۵}^{۲\sqrt{۲}}$ چقدراست؟

پاسخ

$$\log_{۵^۲}^{۲^{\frac{۳}{۲}}} \ \log_{۳^۲}^{۵^{\frac{۱}{۲}}} \ \log_{۲^{-۲}}^{۳^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times -\frac{۱}{۴} \underbrace{\log_{۵}^{۲} \ \log_{۳}^{۵} \ \log_{۲}^{۳}}_{۱} = -\frac{۳}{۶۴}$$

۲ معادله‌ی $\log (x-۵) + \log (x-۲) = ۱$ چند جواب دارد؟

پاسخ

دامنه متغیر معادله با در نظر گرفتن دو شرط $x-۵>۰$ و $x-۲>۰$ به صورت توأم: $x>۵$ است.

$$\log_{۱۰} (x-۵)(x-۲) = ۱ \Rightarrow (x-۵)(x-۲) = ۱۰ \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۰ = ۱۰$$

$$x^۲ - ۷x = ۰ \Rightarrow x(x-۷) = ۰ \Rightarrow x = ۷ \ , \ x = ۰$$

اما $x=۰$ غیر قابل قبول است.

اگر ابتدا دامنه متغیر را پیدا نمی‌کنید پس از تعیین جواب‌های معادله باید جواب‌ها را در معادله چک کنید.

۳ از معادله‌ی $\log_{۳}(x^۲-۱) = ۱ + \log_{۳}(x+۳)$، مقدار لگاریتم $(x-۳)$ در مبنای ۴ چقدر است؟

پاسخ

$$\log_{۳}(x^۲-۱) = \log_{۳}^{۳} + \log_{۳}(x+۳) \Rightarrow \log_{۳}(x^۲-۱) = \log_{۳}^{۳(x+۳)} \Rightarrow x^۲-۱ = ۳x+۹$$

$$x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) = ۰ \Rightarrow x = ۵ \ , \ x = -۲ \ \text{غ ق ق}$$

$$\log_{۴}(x-۳) = \log_{۴}(۵-۳) = \log_{۴}^{۲} = \log_{۲^۲}^{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۴ اگر لگاریتم عدد $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(\frac{۱}{A}-۱)$ در پایه ۴ چقدر است؟

پاسخ

$$\log_{۸} ۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} = A \Rightarrow \log_{۸} \sqrt[۳]{\frac{۸}{۴}} = A \Rightarrow \log_{۲^۳}^{۲^{\frac{۱}{۳}}} = A \Rightarrow \frac{۱}{۹}\log_{۲}^{۲} = A \Rightarrow A = \frac{۱}{۹}$$

$$\log_{۴}(\frac{۱}{A}-۱) = \log_{۴}(۹-۱) = \log_{۴}^{۸} = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$$

۵ اگر $\log_{۲}^{\sqrt[۵]{e^۲}} = A$، حاصل $\log_{\sqrt{e}}^{۳۲}$ را بیابید.

۱) $\frac{A}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{A}$ ۳) $\frac{A}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{A}$

پاسخ

$$\log_{۲}^{e^{\frac{۲}{۵}}} = A \Rightarrow \frac{۲}{۵}\log_{۲}^{e} = A \Rightarrow \log_{۲}^{e} = \frac{۵A}{۲}$$

$$\log_{\sqrt{e}}^{۳۲} = \log_{e^{\frac{۱}{۲}}}^{۲^۵} = ۱۰\log_{e}^{۲} = ۱۰ \times \frac{۲}{۵A} = \frac{۴}{A}$$

۶ اگر $\log_{۵۰}^{۵} = A$ باشد، آن‌گاه $\log_{\sqrt{۵}}^{۸}$ برحسب A چقدر است؟

پاسخ

$$\log_{۵۰}^{۵} = A \Rightarrow \log_{۵}^{۵۰} = \frac{۱}{A} \Rightarrow \log_{۵}^{۲۵\times۲} = \frac{۱}{A} \Rightarrow \log_{۵}^{۲۵} + \log_{۵}^{۲} = \frac{۱}{A}$$

$$\log_{۵}^{۲} = \frac{۱}{A} - ۲ \qquad \log_{\sqrt{۵}}^{۸} = \log_{۵^{\frac{۱}{۲}}}^{۲^۳} = ۶\log_{۵}^{۲} = ۶(\frac{۱}{A}-۲)$$

۷ اگر $\log_{a}^{x}=۲$ و $\log_{b}^{x}=۳$ باشد، مطلوبست $\log_{ab}^{x}$

-پاسخ-

ابتدا $\log_{x}^{ab}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\log_{x}^{ab}=\log_{x}^{a}+\log_{x}^{b}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow \log_{ab}^{x}=\frac{۶}{۵}$$

۸ اگر $\log ۲=۰/۳۰۱$ و $\log ۳=۰/۴۷۷$، مقدار تقریبی $\log_{\sqrt{۵}}^{۶}$ را پیدا کنید.

-پاسخ-

$$\log_{\sqrt{۵}}^{۶}=\frac{\log_{۱۰}^{۶}}{\log_{۱۰}^{\sqrt{۵}}}=\frac{\log ۳+\log ۲}{\frac{۱}{۲}\log ۵}=\frac{\log ۳+\log ۲}{\frac{۱}{۲}(\log ۱۰-\log ۲)}=\frac{۲(۰/۴۷۷+۰/۳۰۱)}{۱-۰/۳۰۱}$$

$$=\frac{۲\times ۰/۷۷۸}{۰/۶۹۹}=\frac{۱۵۵۶}{۶۹۹}$$

۹ حاصل $[\log ۱۳۹۲]+[\log ۰/۰۲]$ چقدر است؟

-پاسخ-

$$۱۰^{۳}<۱۳۹۲<۱۰^{۴}\qquad ۱۰^{-۲}<۰/۰۲<۱۰^{-۱}$$

$$۳<\log ۱۳۹۲<۴\qquad -۲<\log ۰/۰۲<-۱\qquad [\log ۱۳۹۲]+[\log ۰/۰۲]=۱$$

$$[\log ۱۳۹۲]=۳\qquad [\log ۰/۰۲]=-۲$$

۱۰ اگر $\log ۲=۰/۳۰۱۰۳$، تعیین کنید عدد $۲^{۶۴}$ چند رقم دارد؟

-پاسخ-

از روی لگاریتم یک عدد، می‌توان حدود آن عدد و تعداد ارقام آن را پیدا کرد.

مثلاً اگر $\log A=۵$ باشد، $A=۱۰^{۵}$ اولین عدد شش رقمی است و اگر $\log A=۵/۷$ باشد $۱۰^{۵}<A<۱۰^{۶}$ باز هم A عدد شش رقمی است.

$$\log ۲^{۶۴}=۶۴\log ۲=۶۴\times ۰/۳۰۱۰۳=۱۹/۲\Rightarrow ۲^{۶۴}=۱۰^{۱۹/۲}$$

بنابراین عدد $۲^{۶۴}$ دارای ۲۰ رقم است.

۱۱ حاصل $۳^{\log_{\sqrt{۳}}^{۵}}$ چقدر است؟

-پاسخ-

از فرمول ۷ لگاریتم استفاده می‌کنیم:

$$۳^{\log_{\sqrt{۳}}^{۵}}=۵^{\log_{\sqrt{۳}}^{۳}}=۵^{\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{۳}}=۵^{۲\log_{۳}^{۳}}=۲۵$$

۱۲ حاصل $(۰/۲)^{-۲+\log_{\sqrt{۵}}^{۱۰}}$ چقدر است؟

-پاسخ-

$$(\frac{۱}{۵})^{-۲}(\frac{۱}{۵})^{\log_{\sqrt{۵}}^{۱۰}}=۲۵\times ۱۰^{\log_{\sqrt{۵}}^{\frac{۱}{۵}}}=۲۵\times ۱۰^{\log_{۵^{\frac{۱}{۲}}}^{۵^{-۱}}}=۲۵\times ۱۰^{-۲}=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}$$

۱۳ لگاریتم عددی از لگاریتم عکس مجذور آن عدد در پایه ۹ به اندازه‌ی ۴/۵ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

-پاسخ-

معادله را فرمول‌بندی ریاضی می‌کنیم. پایه ۹ به هر دو لگاریتم بر می‌گردد:

$$\log_{۹}^{x}=\log_{۹}^{\frac{۱}{x^{۲}}}+۴/۵\Rightarrow \log_{۹}^{x}=\log_{۹}^{x^{-۲}}+۴/۵\Rightarrow ۳\log_{۹}^{x}=۴/۵\Rightarrow \log_{۹}^{x}=۱/۵\Rightarrow x=۹^{۱/۵}$$

$$\Rightarrow x=(۳^{۲})^{۱/۵}=۳^{۳}=۲۷$$

معادلات نمایی

معادلات نمایی به سه نوع تقسیم می‌شوند.

نوع اوّل: در دو طرف معادله پایه‌ها مساوی می‌شوند.

۱ از معادله $۸^{x}=(\frac{۱}{۲\sqrt{۲}})^{x-۱}$، مقدار x را پیدا کنید.

-پاسخ-

$$(۲^{-\frac{۳}{۲}})^{x-۱}=(۲^{۳})^{x}\Rightarrow ۲^{-\frac{۳}{۲}(x-۱)}=۲^{۳x}\Rightarrow -\frac{۳}{۲}(x-۱)=۳x$$

$$-۳x+۳=۶x\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

نوع دوم: معادلاتی که با مجهول معاون حل می‌شوند.

۲ از معادله‌ی $۹^{x}=۲\times ۳^{x+۲}-۴۵$، مقدار x را پیدا کنید.

-پاسخ-

$$۳^{۲x}=۲\times ۳^{x}\times ۳^{۲}-۴۵\Rightarrow ۳^{۲x}-۱۸\times ۳^{x}+۴۵=۰$$

$$۳^{x}=t:\quad t^{۲}-۱۸t+۴۵=۰\Rightarrow (t-۳)(t-۱۵)=۰$$

$$t=۳\Rightarrow ۳^{x}=۳\Rightarrow x=۱\quad ,\quad t=۱۵\Rightarrow ۳^{x}=۱۵\Rightarrow x=\log_{۳}^{۱۵}$$

نوع سوم: معادلات نمایی که به کمک لگاریتم حل می‌شوند.

۴ از معادله‌ی $۳^x = ۲^{۱-x}$، مقدار x را پیدا کنید.

پاسخ

$$۳^x = \frac{۲}{۲^x} \Rightarrow ۶^x = ۲ \xrightarrow[\text{لگاریتم می‌گیریم}]{\text{از طرفین در مبنای ۶}} x = \log_۶^۲$$

۵ معادله‌ی $x^{\log_۵^x} = ۶۲۵$ چند جواب دارد؟

پاسخ

از طرفین در مبنای ۵ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_۵^{x^{\log_۵^x}} = \log_۵^{۶۲۵}$$

$$\log_۵^x \log_۵^x = \log_۵^{۵^۴} \Rightarrow (\log_۵^x)^۲ = ۴ \Rightarrow \log_۵^x = \pm ۲ \Rightarrow x = ۲۵ \;, x = \frac{۱}{۲۵}$$

هر ۲ جواب در دامنه‌ی متغیر قابل قبول‌اند.

توجه به تفاوت بین $\log ۲^۳$ و $(\log ۲)^۳$ توجه کنید:

$$\log ۲^۳ = ۳\log ۲ = ۳ \times ۰/۳۰۱ = ۰/۹۰۳ \qquad \text{و} \qquad (\log ۲)^۳ = (۰/۳۰۱)^۳ \approx ۰/۰۲۷$$

تست‌های لگاریتم

۱. $\log_{۸} \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲. مقدار عددی $\log_{۲\sqrt{۲}}^{۶۴}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۳. $\log_{\frac{۱}{b}} a$ برابر کدام است؟

۱) $\log_{b}^{\frac{۱}{a}}$ ۲) $-\log_{b}^{\frac{۱}{a}}$ ۳) $\log_a b$ ۴) $(\log_b a)^{-۱}$

۴. اگر $A = ۳^a$ باشد، آن‌گاه $\log_{۳}^{۹A^{۲}}$ برحسب a کدام است؟

۱) $۲+۲a$ ۲) $۳+۲a$ ۳) $۲+a^{۲}$ ۴) $۳+a^{۲}$

۵. اگر $\log_a ۳\sqrt{۳} = \frac{۳}{۴}$، آن‌گاه $\log_{۴}(a-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۶. اگر $\log_{y}^{x} = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\log_{x\sqrt{x}}^{y^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۱۲ ۴) ۴

۷. اگر $\log_{۲}^{\sqrt[۵]{e^{۲}}} = A$، آن‌گاه حاصل $\log_{\sqrt{e}}^{۳۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{A}{۲}$ ۲) $\frac{A}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{A}$ ۴) $\frac{۴}{A}$

۸. اگر $\log_{۱۲}^{۳} = a$ باشد، $\log_{\sqrt{۳}}^{۱۶}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{a}-۴$ ۲) $۴-\frac{۱}{a}$ ۳) $۴(\frac{۱}{a}+۱)$ ۴) $۴(\frac{۱}{a}-۱)$

۹. حاصل $\frac{۱}{\log_{۳}^{۲}} - \frac{۱}{\log_{۱۲}^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\log ۲$ ۲) $۲\log ۲$ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰. اگر $\log ۲ = a$، آن‌گاه $\log ۱/۲۵$ برحسب a کدام است؟

۱) $۱-۲a$ ۲) $۱-۳a$ ۳) $۲a-۱$ ۴) $۳a-۱$

۱۱. اگر $\log ۳ = ۰/۴۷۷$، آن‌گاه حاصل $\log ۰/۰۳ + \log ۳۰ + \log ۳۰۰$ کدام است؟

۱) ۱/۴۷۷ ۲) ۱/۴۳۱ ۳) ۲/۴۳۱ ۴) ۲/۴۷۷

۱۲. اگر $\log ۴ = ۰/۶۰۲$، مقدار $\log ۱۲/۵$ کدام است؟

۱) ۰/۶۹۹ ۲) ۱/۰۹۷ ۳) ۱/۶۰۲ ۴) ۱/۶۹۹

۱۳. اگر $\log ۱۳۸ = ۲/۱۳۹۸$، آن‌گاه $\log ۰/۱۳۸$ کدام است؟

۱) ۰/۱۳۹۸ ۲) $-۰/۱۳۹۸$ ۳) $-۰/۸۶۰۲$ ۴) ۰/۲۱۳۹۸

۱۴. اگر $\log_{۳}^{۲۷!} = m$، آن‌گاه $\log_{۳}^{۲۶!}$ برحسب m کدام است؟

۱) $۳-m$ ۲) $m-۳$ ۳) $m+۳$ ۴) $\frac{m}{۳}$

۱۵. اگر لگاریتم $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(۱-\frac{۱}{A})$ در پایه ۴ کدام است؟

۱) -۳ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۶. اگر $f(x) = \log \frac{۴x+۱}{۴x}$، حاصل $f(\frac{۷}{۴}) + f(\frac{۶}{۴}) + f(\frac{۵}{۴}) + f(\frac{۴}{۴})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\log ۲$ ۳) $-\log ۲$ ۴) $\frac{۱}{۲}\log^{۲}$

۱۷. اگر $a^{۴} = b^{۳}$ آن‌گاه $\log_{b}^{a}$ برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخنامه

(۳) .۱

$$\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a \Rightarrow \log_{۸}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \log_{۲^۳}^{۲^{-\frac{۱}{۲}}} = -\frac{۱}{۶}(\log_۲^۲)$$

اما $\log_۲^۲ = ۱$ پس حاصل عبارت برابر $(-\frac{۱}{۶})$ است.

(۳) .۲

$$\log_{۲\sqrt{۲}}^{۶۴} = \log_{۲^{\frac{۳}{۲}}}^{۲^۶} = \frac{۶}{\frac{۳}{۲}}(\log_۲^۲) = ۴\log_۲^۲ = ۴$$

(۱) .۳

$$\log_{\frac{۱}{b}}^a = \log_{b^{-۱}}^a = -\log_b^a = \log_b^{a^{-۱}} = \log_b^{\frac{۱}{a}}$$

(۱) .۴

$$\log_۳^{۹A^۲} = \log_۳^۹ + \log_۳^{A^۲} = ۲ + ۲\log_۳^A = ۲ + ۲a$$

بنا به فرض $\log_۳^A = a$

(۳) .۵

$$\log_a^{۳\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \log_a^{۳^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_a^۳ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \log_a^۳ = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \log_۳^a = ۲ \Rightarrow a = ۹$$

$$\log_۴^{(a-۱)} = \log_۴^۸ = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}\log_۲^۲ = \frac{۳}{۲}$$

(۴) .۶

$$\log_y^x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \log_x^y = ۳$$

$$\log_{x\sqrt{x}}^{y^۲} = \log_{x^{\frac{۳}{۲}}}^{y^۲} = \frac{۲}{\frac{۳}{۲}}\log_x^y = \frac{۴}{۳}\times ۳ = ۴$$

(۴) .۷

$$\log_۲^{\sqrt[۵]{e^۲}} = A \Rightarrow \frac{۲}{۵}\log_۲^e = A \Rightarrow \log_۲^e = \frac{۵A}{۲}$$

$$\log_{\sqrt{e}}^{۳۲} = \log_{e^{\frac{۱}{۲}}}^{۲^۵} = ۱۰\log_e^۲ = ۱۰\times\frac{۲}{۵A} = \frac{۴}{A}$$

(۴) .۸

$$\log_{۱۲}^۳ = a \Rightarrow \log_۳^{۱۲} = \frac{۱}{a}$$

$$\Rightarrow \log_۳^{(۴\times۳)} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_۳^۴ + \log_۳^۳ = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_۳^۴ + ۱ = \frac{۱}{a}$$

$$\log_۳^۴ = \frac{۱}{a} - ۱$$

از طرفی: $\log_{\sqrt{۳}}^{۱۶} = \log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{۴^۲} = ۴\log_۳^۴ = ۴(\frac{۱}{a} - ۱)$

(۳) .۹

$$\frac{۱}{\log_{۱۲}^۲} - \frac{۱}{\log_۳^۲} = \log_۲^{۱۲} - \log_۲^۳ = \log_۲^۴ = \log_۲^{۲^۲} = ۲\log_۲^۲ = ۲$$

(۲) .۱۰

$$\log ۱/۲۵ = \log\frac{۵}{۴} = \log ۵ - \log ۴ = \log\frac{۱۰}{۲} - \log ۲^۲$$

$$= \log ۱۰ - \log ۲ - ۲\log ۲ = ۱ - ۳a$$

(۳) .۱۱

روش اول:

$$\log ۰/۰۳ = \log\frac{۳}{۱۰۰} = \log ۳ - \log ۱۰۰ = \log ۳ - ۲ \qquad (۱)$$

$$\log ۳۰ = \log(۳\times۱۰) = \log ۳ + \log ۱۰ = \log ۳ + ۱ \qquad (۲)$$

$$\log ۳۰۰ = \log(۳\times۱۰۰) = \log ۳ + \log ۱۰۰ = \log ۳ + ۲ \qquad (۳)$$

از جمع (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$۳\log ۳ + ۱ = ۳(۰/۴۷۷) + ۱ = ۱/۴۳۱ + ۱ = ۲/۴۳۱$$

روش دوم:

$$\log ۰/۰۳ + \log ۳۰ + \log ۳۰۰ = \log(\frac{۳}{۱۰۰}\times۳۰\times۳۰۰)$$

$$= ۳(۰/۴۷۷) + ۱ = ۲/۴۳۱$$

$$= \log ۲۷۰ = \log(۳^۳\times۱۰) = ۳\log ۳ + \log ۱۰$$

(۲).۱۲

$$\log ۴ = ۰/۶۰۲ \Rightarrow ۲\log ۲ = ۰/۶۰۲ \Rightarrow \log ۲ = ۰/۳۰۱$$

$$\log ۱۲/۵ = \log\frac{۲۵}{۲} = \log\frac{۱۰۰}{۸} = \log ۱۰۰ - \log ۸$$

$$= ۲ - ۳\log ۲ = ۲ - ۳(۰/۳۰۱)$$

$$= ۲ - ۰/۹۰۳ = ۱/۰۹۷$$

(۳).۱۳

$$\log ۰/۱۳۸ = \log\frac{۱۳۸}{۱۰۰۰} = \log ۱۳۸ - \log ۱۰۰۰$$

$$= ۲/۱۳۹۸ - ۳ = -۰/۸۶۰۲$$

(۲).۱۴

$$\log_۳^{۲۷!} = \log_۳^{(۲۷\times۲۶!)} = m$$

$$\Rightarrow \log_۳^{۲۷} + \log_۳^{(۲۶)!} = m \Rightarrow ۳ + \log_۳^{(۲۶)!} = m \Rightarrow \log_۳^{۲۶!} = m - ۳$$

(۴).۱۵

$$\log_۸ ۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} = A \Rightarrow \log_۸ \sqrt[۳]{\frac{۸}{۴}} = A \Rightarrow \frac{۱}{۳}\log_۸^۲ = A \Rightarrow \log_۸^۲ = ۳A$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}\log_۲^۲ = ۳A \Rightarrow A = \frac{۱}{۹} : \frac{۱}{A} - ۱ = ۸ \Rightarrow \log_۴^۸ = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$$

(۲).۱۶

$$f(\frac{۴}{۴}) = \log\frac{۵}{۴}$$

$$f(\frac{۵}{۴}) = \log\frac{۶}{۵} \quad \text{جمع} = \log\frac{۵}{۴} + \log\frac{۶}{۵} + \log\frac{۷}{۶} + \log\frac{۸}{۷}$$

$$f(\frac{۶}{۴}) = \log\frac{۷}{۶} \qquad = \log\frac{۵}{۴}\times\frac{۶}{۵}\times\frac{۷}{۶}\times\frac{۸}{۷} = \log ۲$$

$$f(\frac{۷}{۴}) = \log\frac{۸}{۷}$$

(۴).۱۷

$$\log_a^b = \log_{a^۳}^{b^۳} = \log_{a^۳}^{a^۴} = \frac{۴}{۳}$$

توجه: در $\log_b^a$ می‌توان a و b را به یک توان مشترک رساند. $\log_b^a = \log_{b^n}^{a^n}$

زیرا این توان‌ها با هم حذف می‌شوند. $\frac{n}{n}\log_b^a$

(۳).۱۸

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \log_۲^{\frac{۱}{x}} = \log_۲^{x^{-۱}} = -\log_۲^x \\ g(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}^x = \log_{۲^{-۱}}^x = -\log_۲^x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

(۱).۱۹

$$\log_۶^۵ = \frac{\log ۵}{\log ۶}$$ (فرمول تغییر مبنا)

$$\log_۶^۵ = \frac{۱ - \log ۲}{\log ۲ + \log ۳} = \frac{۱ - a}{a + b}$$

(۲).۲۰

$$\frac{\log_a^z}{\log_{ab}^z} = \log_z^{ab}.\log_a^z = \log_a^{ab} = \log_a^a + \log_a^b = ۱ + \log_a^b$$

فصل چهاردهم

انتگرال

آنچه در این فصل میخوانیم:

تابع اولیه یا انتگرال نامعین

قوانین و فرمول های انتگرال

انتگرال معین

محاسبه سطح محصور

تابع اولیه یا انتگرال نامعین

در فصل مشتق، تابع را داشتیم، مشتق آن را پیدا می‌کردیم. در این فصل مشتق را داریم، می‌خواهیم تابع را پیدا کنیم.

تعبیر هندسی مشتق، در یک نقطه از تابع، شیب خط، مماس بر نمودار تابع در آن نقطه است، تعبیر هندسی انتگرال، در یک فاصله سطح بین نمودار تابع با محور x ها در این فاصله است البته چنان‌چه تابع f زیر محور x ها باشد، باید قدر مطلق عدد به دست آمده را در نظر بگیریم.

$x^5 \xrightarrow{\text{مشتق}} 5x^4 \qquad 5x^4 \xrightarrow[\text{پاد مشتق}]{\text{تابع اوّلیه}} x^5 + c$

تابع اوّلیه $5x^4$ را با نماد $\int 5x^4\,dx = x^5 + c$ نشان می‌دهند.

$5x^4$ را تابع تحت انتگرال گوییم و dx نشان می‌دهد متغیر انتگرال، x است.

توجه هر تابع دارای بی‌شمار تابع اوّلیه است که اختلاف آن‌ها در یک عدد ثابت است.

مثلاً x^5 ، $x^5 - \frac{1}{2}$ ، $x^5 + \sqrt{2}$ و ... همگی تابع اوّلیه‌های $5x^4$ هستند.

تعریف:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

در این‌جا $f(x)$ مشتق تابع است و $F(x)$ تابع اصلی (اوّلیه) است.

نکته

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \quad , \quad \int g'(x)\,dx = g(x) + c$$

قوانین انتگرال

اگر k عدد ثابت باشد:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

به بیان دیگر:

$$\int (u' \pm v')\,dx = u \pm v$$

همچنین داریم:

$$\int u'v'dx \neq uv \quad , \quad \int \frac{u'}{v'}dx \neq \frac{u}{v}$$

۱ اگر $x^3 - 6x^2 + 12x + 5$ یکی از تابع‌های اوّلیه $f(x)$ باشد. کدام‌یک از توابع زیر نیز یک تابع اوّلیه $f(x)$ است؟

۱) $-x^3 + 6x^2 - 12x$ ۲) $(x-2)^3 - 10$ ۳) $(x+2)^3 - 5$ ۴) $2x^3 - 12x^2 + 24x$

پاسخ

گزینه‌ی (۲)

باید پاسخی را انتخاب کنیم که به شکل $x^3 - 6x^2 + 12x + c$ باشد، یعنی فقط عدد ۵ تغییر کند.

در گزینه‌ی ۲: $(x-2)^3 - 10 = x^3 - 6x^2 + 12x - 18$ جملات اصلی همان است فقط به جای ۵ ، عدد ۱۸− آمده است.

۲ اگر $f(x) = \int \ln x\,dx$ باشد، $f''(\frac{1}{4})$ چقدر است؟

پاسخ

از طرفین رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم: $f'(x) = \ln x$ دوباره از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم: $f''(x) = \frac{1}{x}$ بنابراین: $f''(\frac{1}{4}) = 4$

۳ اگر $\int f(x)\,dx = \sin^2 3x + c$ باشد، آن‌گاه $f'(0)$ کدام است؟

پاسخ

از طرفین نسبت به x ، مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = 2\sin 3x\,(3\cos 3x) = 3\sin 6x$$

$$f'(x) = 18\cos 6x \Rightarrow f'(0) = 18$$

فرمول‌های انتگرال‌گیری

۱) $\int k\,dx = kx + c$ زیرا: $(kx + c)' = k$

۲) $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad , \quad r \neq -1$ زیرا: $(\frac{1}{r+1}x^{r+1})' = x^r$

برای حل انتگرال همه توان‌های x (به جزء ۱−) به توان x یک واحد اضافه کرده و بر همان عدد به دست آمده تقسیم می‌کنیم: $\int \sqrt{x}\,dx$ ، $\int \frac{1}{x^2}dx$ و $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ همه با فرمول فوق حل می‌شوند.

۳) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$ زیرا: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

فقط $\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \ln|x| + c$ فرمول جداگانه دارد. بقیه توان‌های x با فرمول ۲ حل می‌شوند.

۴) $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c \qquad (\frac{1}{a}e^{ax})' = e^{ax} \qquad \int e^{x}dx = e^{x} + c$

۵) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c \quad , \quad \int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

۶) $\int \cos x\, dx = \sin x + c \quad , \quad \int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

تمرین‌های انتگرال‌گیری

۱) $\int 2dx = 2x + c \qquad \int dx = x + c \qquad \int \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}t + c$

۲) $\int (5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - \frac{\sqrt{2}}{2})\, dx = 5\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x + c$

از جملات ، تک تک، انتگرال می‌گوییم:

۳) $\int \frac{3dx}{x^4} = 3\int x^{-4}dx = 3\frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{x^3} + c$

۴) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{4}{\sqrt{x}})\, dx = \int (x^{\frac{1}{3}} - 4x^{-\frac{1}{2}})\, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - 8\sqrt{x} + c$

کسرها و رادیکال‌ها را به صورت توانی نشان داده و با همان فرمول ۲ انتگرال می‌گیریم:

۵) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2}dx = \int (1 - \frac{1}{x^2})\, dx = \int (1 - x^{-2})\, dx = x - \frac{x^{-1}}{-1} + c = x + \frac{1}{x} + c$

۶) $\int \frac{(2x+1)^2}{x}dx = \int \frac{4x^2 + 4x + 1}{x}dx = \int (4x + 4 + \frac{1}{x})\, dx = 4\frac{x^2}{2} + 4x + \ln|x| + c$

کسرها را تفکیک می‌کنیم و از فرمول ۲ انتگرال، استفاده می‌کنیم:

۷) $\int \frac{3x - 2}{\sqrt{x}}dx = \int (\frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}})\, dx = \int (3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}})\, dx = 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + c$

۸) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - 2 + x^{-\frac{1}{2}})\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 2\sqrt{x} + c$

۹) $\int (e^{2x} - e^{-3x})\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + c$

۱۰) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{x}}dx = \int (e^{x} - e^{-x})\, dx = e^{x} + e^{-x} + c$

۱۱) $\int (\cos x - \sin 2x)\, dx = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$

۱۲) $\int (\sin x + \cos x)^2\, dx = \int (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x \cos x)\, dx = \int (1 + \sin 2x)\, dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

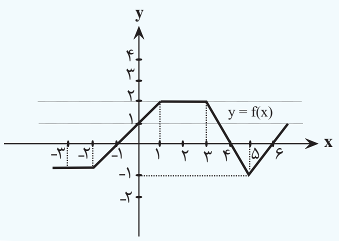
۱۳) $\int \sin x\,(1 - \cos x)\, dx = \int (\sin x - \sin x \cos x)\, dx = \int (\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x)\, dx = -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

۱۴) $\int (\sin \frac{2x}{3} + \cos \frac{x}{4})\, dx = -\frac{3}{2}\cos \frac{2x}{3} + 4\sin \frac{x}{4} + c$

۱۵) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}dx = \int (\cos x - \sin x)\, dx = \sin x + \cos x + c$

انتگرال معیّن

فرض کنید نمودار تابع $y = f(x)$ شکل مقابل است. در بازه‌هایی که $f \geq 0$ ، (یعنی نمودار f بالای محور xهاست) تعبیر هندسی $\int_a^b f(x)\,dx$ سطح بین نمودار $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ است.



۴۷. $\int_{۱}^{۴}\left[\frac{۲x}{۳}\right]dx$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۴۸. حاصل $\int_{-۱}^{۱}(x+\frac{|x|}{x})\,dx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۹. حاصل $\int_{۱}^{n}[x]\,dx$ کدام است؟

۱) n ۲) $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۳) $\frac{n(n-۱)}{۲}$ ۴) $n(n+۱)$

۵۰. حاصل $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}(\cos^۲ x-\sin^۲ x)\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۵۱. حاصل $\int_{۱}^{۲}(۱-\frac{۱}{x})^۲\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}-\ln ۲$ ۲) $\frac{۳}{۲}-\ln ۴$ ۳) $-\frac{۱}{۲}-\ln ۲$ ۴) $-\frac{۱}{۲}-\ln ۴$

۵۲. $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}[x]\cos x dx$ کدام است؟

۱) $۱-\frac{۱}{۲}\sin ۱$ ۲) $۱-\sin ۱$ ۳) $۱+\frac{۱}{۲}\sin ۱$ ۴) $۱+\sin ۱$

۵۳. حاصل $\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}}[x]\cos x dx$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۵۴. حاصل $\int_{۰}^{\pi}\sqrt{\frac{۱+\cos ۲x}{۲}}\,dx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۵. $\int_{۰}^{۱}\frac{(\sqrt{x}+۱)^۲}{\sqrt{x}}\,dx$ کدام است؟

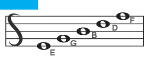
۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

۵۶. اگر $u(x)=\int_{۱}^{x}\sqrt{t^۲+۱}\,dt$، آن‌گاه $u'(x)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x^۲+۱}$ ۲) $\sqrt{x^۲+۱}-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$ ۴) $\sqrt{x^۲+۱}-۱$

۵۷. اگر $A(x)=\int_{۱}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$، آن‌گاه $A'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{\pi}$ ۴) $\frac{۴}{\pi^۲}$



۵۸. اگر $G(x)=\int_{۲}^{x}\frac{t}{\sqrt{۱+t^۳}}\,dt$ آن‌گاه مشتق راست تابع $y=xG(x)$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

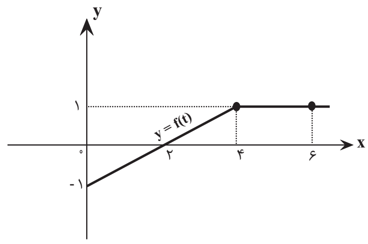
۵۹. اگر $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)\,dt=\frac{۱}{x^۲}$ آن‌گاه $\int_{۱}^{۲}f(x)\,dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۶۰. اگر $F(x)=\int_{۰}^{x}\frac{۳dt}{۱+t^۳}$، مقدار مشتق $F(\frac{۱}{x})$ به ازای $x=۲$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۶۱. نمودار $y=f(t)$ شکل مقابل اس.ت اگر $A(x)=\int_{۰}^{x} f(t)dt$ ، حاصل $A(۶)+A'(۶)$ کدام است ؟



۱) ۵
۲) ۹
۳) ۷
۴) ۳

۶۲. اگر $\varphi(x)=\int_{۱}^{x}\frac{dt}{۳+t}$ باشد، آن‌گاه معادله خط قائم بر نمودار $y=\varphi(x)$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y=-۴x$
۲) $y=-۴x+۴$
۳) $y=-۴x-۴$
۴) $y=\frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴}$

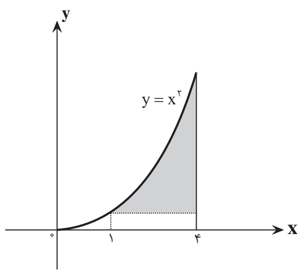
۶۳. اگر $f(x)=\int_{۱}^{x}\frac{dt}{۱+t^{۳}}$ ،معادله مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y=۲x-۲$
۲) $y=۲x-۱$
۳) $۲y=x-۲$
۴) $۲y=x-۱$

۶۴. اگر $f(x)=\int_{۲}^{۲x}\frac{t+۱}{t}$ ، معادله خط قائم بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه $x=۱$ واقع بر آن کدام است؟

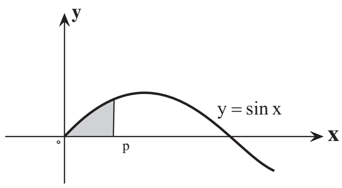
۱) $x-۲y=۱$
۲) $x+۲y=۱$
۳) $x+۳y=۱$
۴) $x-۳y=۱$

۶۵. سطح هاشورزده شکل مقابل چند واحد سطح است؟



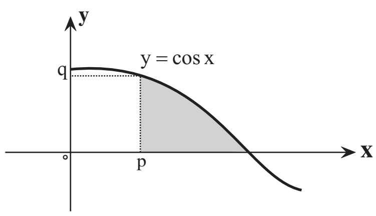
۱) ۲۱
۲) ۱۹
۳) ۱۸
۴) ۱۷

۶۶. اگر سطح هاشورزده شکل زیر $\frac{۴}{۵}$ واحد سطح باشد، cosp کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۶۷. اگر سطح هاشورزده شکل زیر $\frac{۱}{۲}$ واحد سطح باشد، q کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۶۸. سطح بین منحنی $y=x|x|-x$ و محور x ها برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۶۹. سطح بین دو سهمی $y=x^{۲}$ و $y^{۲}=x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

(۳).۴۴

$$\int_{-1}^{2}(|x|-[x])\,dx=\int_{-1}^{0}(-x+1)dx+\int_{0}^{1}(x-0)dx+\int_{1}^{2}(x-1)dx=\frac{-x^2}{2}+x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}+\frac{x^2}{2}-x\Big|_{1}^{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

(۲).۴۵

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{2}|x|+|x+1|\,dx=\int_{-1}^{0}(-x-x-1)dx+\int_{0}^{2}(x+x+1)dx$$

$$=-x^2-x\Big|_{-1}^{0}+x^2+x\Big|_{0}^{2}=0+(6-0)=6$$

به کمک نمودار گلدانی نیز می‌توان حاصل انتگرال را پیدا کرد.

(۲).۴۶

$$\int_{0}^{1}|1-2x|[2x]dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-2x)\,(0)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)(1)dx$$

$$=x^2-x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=0-(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$$

(۲).۴۷

نقاط ناپیوستگی جهشی $\frac{2x}{3}=k\Rightarrow x=\frac{3k}{2}$: $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2}$

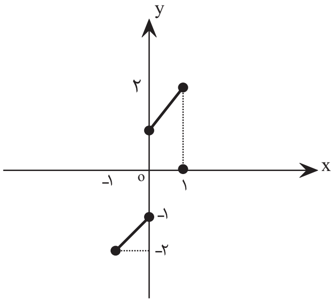
$$\int_{1}^{4}\left[\frac{2x}{3}\right]dx=\int_{1}^{\frac{3}{2}}0\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}dx+\int_{3}^{4}2dx$$

حال با استفاده از ویژگی $\int_{a}^{b}k\,dx=k(b-a)$ حاصل انتگرال‌های فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{3}1dx=1(3-\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\ ,\ \int_{3}^{4}2dx=2(4-3)=2\ ,\ \int_{1}^{\frac{3}{2}}0dx=0$$

پس حاصل انتگرال فوق می‌شود: $\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$

(۱).۴۸



$$\int_{-1}^{1}(x+\frac{|x|}{x})dx=\int_{-1}^{0}(x-1)dx+\int_{0}^{1}(x+1)dx$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$$

(۳).۴۹

$$\int_{1}^{n}[x]dx=\int_{1}^{2}1dx+\int_{2}^{3}2dx+\dots\dots\dots+\int_{n-1}^{n}(n-1)dx$$

$$=1(2-1)+2(3-2)+\dots+(n-1)(1)$$

$$=1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

(۱).۵۰

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2x-\sin^2x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(۲).۵۱

$$\int_{1}^{2}(1-\frac{1}{x})^2dx=\int_{1}^{2}(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})dx$$

$$=x\Big|_{1}^{2}-2\ln|x|\Big|_{1}^{2}-\frac{1}{x}\Big|_{1}^{2}$$

$$=1-(2\ln 2)-(\frac{1}{2}-1)=\frac{3}{2}-2\ln 2=\frac{3}{2}-\mathrm{Ln}\,4$$

(۲).۵۲

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[x]\cos x\,dx=\int_{0}^{1}0\times\cos x\,dx+\int_{1}^{\frac{\pi}{2}}1\times\cos x\,dx$$

$$=\sin x\Big|_{1}^{\frac{\pi}{2}}=1-\sin 1$$

(۲).۵۳

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}[x]\cos x\,dx\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(-1)\cos x\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}0\,dx$$

$$=-\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=0-(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

(۳).۵۴

$$\int_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{2\cos^2x}{2}}\,dx=\int_{0}^{\pi}|\cos x|\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x\,dx=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=1-(0-1)=2$$

(۳).۵۵

$$\int_{0}^{1}\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int_{0}^{1}\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_{0}^{1}(x^{\frac{1}{2}}+2+x^{-\frac{1}{2}})dx$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_{0}^{1}+2x\Big|_{0}^{1}+2\sqrt{x}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}+2+2=\frac{14}{3}$$

(۱).۵۶

$$u(x)=\int_{1}^{x}\sqrt{t^2+1}\,dt\xrightarrow{\text{طبق قضیه بنیادی اول}}u'(x)=\sqrt{x^2+1}$$

(۳).۵۷

$$A(x)=\int_{1}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\to A'(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$A'(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

(۳).۵۸

$$y'=G(x)+xG'(x)\xrightarrow{x=2}G(2)+2G'(2)$$

$$G(2)=\int_{2}^{2}\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}=0$$

$$G'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\Rightarrow G'(2)=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}\Rightarrow y'=0+\frac{4}{3}$$

(۳).۵۹

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{1}{x^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{1}^{2}=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

(۱).۶۰

$F(x)=\int_۰^x \frac{۳dt}{۱+t^۳}dt \Rightarrow F'(x)=\frac{۳}{۱+x^۳}$

$(F(\frac{۱}{x}))'=-\frac{۱}{x^۲}F'(\frac{۱}{x}) \xlongequal{x=۲} -\frac{۱}{۴}F'(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۱+\frac{۱}{۸}}=-\frac{۲}{۳}$

(۴).۶۱

$A(x)=\int_۰^x f(t)\,dt \Rightarrow A(۶)=\int_۰^۶ f(t)dt=-۱+۱+۲=۲$

از طرفی بنا به قضیه‌ی بنیادی اول $A'(x)=f(x)$ پس:

$A'(۶)=f(۶)=۱ \Rightarrow A(۶)+A'(۶)=۲+۱=۳$

(۲).۶۲

$\varphi(x)=\int_۱^x \frac{dt}{۳+t} \Rightarrow \varphi(۱)=۰ \Rightarrow \Big|_۰^۱ \in$ منحنی

$\varphi'(x)=\frac{۱}{۳+x}\to\varphi'(۱)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow$ شیب خط قائم: -۴

$y=-۴(x-۱)\Rightarrow y=-۴x+۴$

(۴).۶۳

$f(x)=\int_۱^x \frac{dt}{۱+t^۳}dt\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۱+x^۳}=f'(۱)=\frac{۱}{۲}$ شیب‌خط‌مماس‌بر‌منحنی

$x=۱\Rightarrow f(۱)=\int_۱^۱\frac{dt}{۱+t^۳}=۰\Rightarrow A(۱,۰)$

$y=\frac{۱}{۲}(x-۱)\Rightarrow ۲y=x-۱$

(۳).۶۴

$f(x)=\int_۲^{۲x}\frac{t+۱}{t}dt\Rightarrow f'(x)=۲(\frac{۲x+۱}{۲x})$

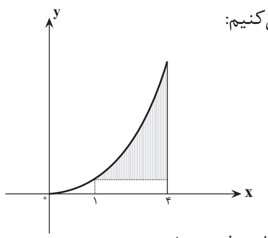
$f'(۱)=۳$ شیب خط قائم $=-\frac{۱}{۳}$

$f(۱)=\int_۲^۲\frac{t+۱}{t}dt=۰\Rightarrow A(۱,۰)$

$y=-\frac{۱}{۳}(x-۱)\Rightarrow ۳y=-x+۱$

(۳).۶۵

برای محاسبه‌ی سطح هاشورزده‌ی شکل زیر ابتدا سطح محدود به منحنی و محور x ها را از $x=۱$ تا $x=۴$ محاسبه می‌کنیم و سپس مساحت مستطیل به طول ۳ و به عرض ۱ را از آن کم می‌کنیم:



$\int_۱^۴ x^۲dx=\frac{x^۳}{۳}\Big|_۱^۴=\frac{۶۴-۱}{۳}=۲۱$

مساحت مستطیل $=۳\times۱=۳$

$\Rightarrow$ مساحت هاشور خورده $=۲۱-۳=۱۸$ واحد سطح

(۱).۶۶

سطح هاشور خورده شکل داده شده عبارت است از سطح محدود به منحنی $y=\sin x$ ومحور x ها از $x=۰$ تا $x=p$ پس:

$s=\int_۰^p \sin x\,dx=-\cos x\Big|_۰^p$

$=-\cos p+۱=\frac{۴}{۵} \Rightarrow \cos p=\frac{۱}{۵}$

(۳).۶۷

منحنی $y=\cos x$ محور x ها را در $x=\frac{\pi}{۲}$ (سمت راست مبدأ) قطع می‌کند و مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده عبارت است از:

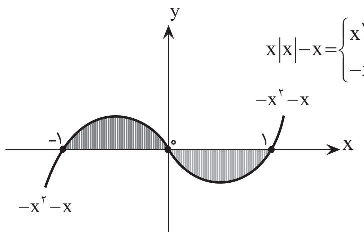
$S=\int_p^{\frac{\pi}{۲}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_p^{\frac{\pi}{۲}}=۱-\sin p=\frac{۱}{۲}$

$\sin p=\frac{۱}{۲}\Rightarrow p=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow q=\cos\frac{\pi}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(۱).۶۸

برای تعیین سطح محصور بین $y=f(x)$ و محور x ها باید منحنی را با محور x ها قطع دهیم:

$x|x|-x=\begin{cases}x^۲-x & x\ge۰\\ -x^۲-x & x<۰\end{cases}$



چون دو قسمت سطح با هم برابرند پس:

$S=۲\left|\int_۰^۱(x^۲-x)dx\right|=۲\left|\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}\Big|_۰^۱\right|=۲\left|-\frac{۱}{۶}\right|=\frac{۱}{۳}$

(۱).۶۹

دو منحنی $y=x^۲$ و $y=\sqrt{x}$ را قطع می‌دهیم:

$x^۲=\sqrt{x}\Rightarrow x=۰, x=۱$

$S=\int_۰^۱(\sqrt{x}-x^۲)dx=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}-\frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^۱$

$=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$ واحد سطح

تذکر: درحالت کلی سطح محصور بین سهمی‌های $y^۲=Ax$ و $x^۲=By$ عبارت است از: $\frac{|AB|}{۳}$ در این تست $A=B=۱$ پس: $S=\frac{۱}{۳}$

(۳).۷۰

ابتدا سطح محدود به منحنی و محورxها و خطوط $x=۰$ و $x=-۱$ را حساب می‌کنیم (ناحیه سفید) وسپس از مساحت مستطیلی به طول ۳ و به عرض ۱ کم می‌کنیم:

سفید $S=\int_{-۱}^۰(x^۲-۲x)dx=\frac{x^۳}{۳}-x^۲\Big|_{-۱}^۰$

$=۰-(-\frac{۱}{۳}-۱)=\frac{۴}{۳}$

مستطیل $S=$ طول $\times$ عرض $=۳\times۱$

هاشورخورده $S=۳-\frac{۴}{۳}=\frac{۵}{۳}$ واحد سطح

(۲).۷۱

$S_۲$ یعنی سطح محدود به منحنی $y=\frac{۲}{x}$ و محور x ها از $x=a$ تا $x=b$ ، $S_۱$ یعنی سطح محصور بین دو تابع $y_۱=\frac{۵}{x}$ و $y_۲=\frac{۲}{x}$

$S_۲=\int_a^b\frac{۲}{x}dx=۲\int_a^b\frac{dx}{x}$

$S_۱=\int_a^b(\frac{۵}{x}-\frac{۲}{x})dx=\int_a^b\frac{۳}{x}dx=۳\int_a^b\frac{dx}{x}$

$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۳}{۲}$