به نام خدا

# فارآزمون

# ریاضی تجربی یازدهم

مهندس آرش عمید

انتشارات علمی فار
phare
www.pharepub.com

# مقدمه

تقدیم به همسرم

## مقدمه‌ی مؤلف

اهمیت درس ریاضی و تأثیر زیاد آن در قبولی داوطلبان رشتهٔ تجربی در رشته‌های خاص برکسی پوشیده نیست. در این راستا کتابی که بتواند بدون اضافه‌گویی، با سؤالات استاندارد و داشتن ایده‌های نو داوطلبان را در این مسیر همراهی کند، بسیار راهگشا است. کتابی که پیش روی شماست منطبق بر کتاب ریاضی یازدهم تجربی به همین منظور نوشته شده است. در این کتاب به بهانهٔ طرح سؤالات سخت از آوردن مطالب خارج از کتاب پرهیز شده است. سؤالات بسیار نو و در حد کنکور تجربی، پاسخ‌های واقعا تشریحی و درس‌نامهٔ مفید و منطبق بر کتاب درسی از ویژگی‌های بارز این کتاب است. در مسیر سخت تألیف این کتاب همکاران عزیزم در انتشارات فاخر فار زحمات زیادی را متحمل شدند و بدون کمک آن‌ها این کتاب به سرانجام نمی‌رسید، قدردان زحمات تک‌تک این عزیزان هستم. در ادامه با ساختار کتاب و نحوهٔ مطالعهٔ درس ریاضی آشنا می‌شوید.

## راهنمای استفاده از کتاب

۱ـ **آزمون‌های مویرگی:** ابتدای هر فصل، با آزمون‌های مویرگی شروع می‌شود. این آزمون‌ها مبحث به محث طراحی شده‌اند تا هر یک از مباحث یک فصل را گام به گام پوشش دهند. برای پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها لازم است ابتدا مبحث مورد نظر را به طور دقیق از روی جزوهٔ دبیر یا درسنامهٔ کتاب که در انتهای این کتاب قرار گرفته است، (که در عین کوتاه بودن کامل و دقیق است) مطالعه کنید و سپس به سراغ این آزمون‌ها بروید. حتماً در پایان هر آزمون پاسخ‌نامهٔ کامل و تشریحی آن را به طور دقیق مطالعه کنید. حتی پاسخ تست‌هایی که درست پاسخ داده‌اید را دوباره بررسی کنید، این کار سبب می‌شود راه‌های ساده‌تر و نکات مربوط به هر تست را فرا بگیرید. از آن جایی که آزمون‌های مویرگی برای تکمیل آموزش ریزبخش‌های هر فصل طراحی شده است لذا رعایت وقت پیشنهادی ضرورتی ندارد بنابراین بدون نگرانی از زمان و به قصد یادگیری از این آزمون‌ها استفاده کنید.

۲ـ **آزمون‌های جامع هر فصل:** در پایان هر فصل آزمون‌هایی از مباحث کل فصل طراحی شده است. که به مرور مطالب و نکات آن فصل می‌پردازد. این آزمون‌ها را وقتی پاسخ دهید که مطالعهٔ فصل را به طول کامل انجام داده و مطالب را کاملاً فرار گرفته‌اید. باز هم در پایان هر آزمون پاسخ‌نامه را دقیق مورد بررسی قرار دهید. در این آزمون‌ها سعی کنید کم‌کم بحث زمان‌بندی را هم تمرین کنید.

۳ـ **آزمون‌ها دوره‌ای و مروری:** در پایان بعضی از فصول کتاب آزمون‌هایی قرار دارد که ۲ یا ۳ فصل قبلی را مورد ارزیابی قرار می‌دهد؛ این آزمون‌ها برای مرور فصل‌های قبلی در نظر گرفته شده است و باعث می‌شود تا با سؤالات ترکیبی از آن چند فصل روبه‌رو شوید و هم‌چنین دوره‌ای از آن فصل و فصل‌های گذشته داشته باشید. در این آزمون‌ها حتماً وقت پیشنهادی را برای پاسخ‌گویی در نظر بگیرید.

۴ـ **آزمون‌های جامع پایان کتاب:** این آزمون‌ها برای دورهٔ کامل مطالب کتاب طراحی شده است. معمولاً زمان پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها حوالی اردیبهشت‌ماه است (البته دانش‌آموزان پایهٔ دهم و داوطلبان کنکور می‌توانند هر زمان که مطالب کتاب ریاضی دهم را به طور کامل آموختند سراغ این آزمون‌ها بروند). این آزمون‌ها محک خوبی برای آموخته‌های شما از کتاب ریاضی دهم است. باز هم توصیه می‌کنم پاسخ‌نامهٔ هر یک از آزمون‌ها که به طور جامع و تشریحی نوشته شده است را در پایان هر آزمون به دقت بررسی کنید.

در انتها توصیه می‌کنیم هر آزمون را در چند نوبت و با فاصلهٔ زمانی مناسب، از خودتان امتحان بگیرید و نتیجه را در هر نوبت یادداشت کنید تا نقاط ضعف خود را به طور کامل پوشش داده باشید. همچنین به‌یاد د اشته باشید با توجه به این‌که ضریب ریاضی گروه تجربی در کنکور سراسری ۶ می‌باشد تمرین مداوم و استفاده از آزمون‌های این کتاب می‌تواند تأثیر بسیاری برای آمادگی شما در امتحانات سال یازدهم و کنکور سراسری داشته باشد..

موفق باشید

## «روش مطالعهٔ درس ریاضی»

ولفگانگ کُهلر یکی از دانشمندان علم روانشناسی (متولد ۱۸۸۷) آزمایشی را روی یک میمون به نام سلطان انجام داد. او یک موز را با فاصلهٔ زیاد خارج از قفس سلطان قرار می‌دهد و سه تکه چوب کوچک، متوسط و بزرگ را در داخل قفس می‌گذارد و با دوربین حرکات سلطان را زیر نظر می‌گیرد سلطان که بسیار گرسنه بود سعی می‌کند با دست و پا آن موز را بردارد اما به دلیل فاصلهٔ زیاد موفق نمی‌شود. از چوب متوسط و بعد از آن بقیهٔ چوب‌ها استفاده می‌کند ولی باز موفق نمی‌شود. دقایق زیادی این تلاش ادامه می‌یابد و در آخر سلطان بسیار خسته و نا امید در گوشه‌ای از قفس می‌افتد و با چشمانی خسته نظاره‌گر موز، قفس و چوب‌ها می‌شود. بعد از چند دقیقه مکث از جای خودش بلند می‌شود و انتهای چوب‌ها که دارای نری و مادگی بوده را به درون هم چفت کرده و آن چوب را کامل کرده و به بیرون قفس می‌اندازد و موفق می‌شود تا موز را به سمت خود بکشد و در نهایت با حس رضایت آن موز را نوش جان می‌کند. فردای همان روز آقای کُهلر آزمایش دیگری ترتیب می‌دهد و برای دومین بار یک موز از بالای قفس آویزان می‌کند و چند جعبهٔ چوبی در قفس می‌اندازد. در این آزمایش سلطان بدون فکر کردن بلافاصله جعبه‌ها را روی هم می‌گذارد و به موز دست پیدا می‌کند و سریع آن را می‌بلعد. این آزمایش‌ها ثابت کرد که تا قبل از توجه کافی به مسأله، سلطان نتوانست نکته را بیابد. یعنی سلطان می‌خواست موز را به داخل قفس بکشاند ولی توجه کافی به وسایل دور و برش مثل چوب‌ها نداشت اما بعد از توجه عمیق روی مسأله متوجه شده که نری و مادگی (نکتهٔ اصلی مسأله) در سر و ته چوب‌ها است که می‌تواند آن‌ها را به هم وصل کند و چوب بزرگ‌تری که احیاناً به موز می‌رسد را بسازد؛ که بعد از این عمل موفق به خوردن موز شد.

کُهلر نتیجه می‌گیرد: ۱ـ تا زمانی که سلطان به عمق مسأله پی نبرد نتوانست موفق عمل کند. ۲ـ وقتی سلطان به همهٔ ابزارهای داخل قفس به خوبی نگاه کرد و در ذهنش راه حل را به طور کامل چید (یک‌پارچگی راه حل) و آن وقت توانست بلافاصله بدون هیچ اشتباهی مسأله را حل کند. ۳ـ وقتی که سلطان با مسأله‌ای مواجه شد و با تلاش زیاد و تفکر عمیق و یک‌پارچه آن را حل کرد این موضوع باعث شد تا بتواند مسایل مشابه را راحت‌تر و با صرف وقت کم‌تر حل نماید (مثل آزمایش دوم که سلطان باید موز آویزان شده از قفس را بدست می‌آورد).

در سال‌های بعدی دانشمندان دیگری روی موضوع حل مسأله کار کردند و نتیجه گرفتند کسانی که به دنبال حل مسأله هستند را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد:

### تازه‌کاران و کهنه‌کاران

۱ـ کهنه‌کاران به دلیل حل مسائل زیاد و تمرین‌های پی در پی، الگوی حل مسائل مختلف را در ذهن می‌پرورانند و از اینکه با مسائل سخت روبه‌رو شوند نمی‌ترسند و ساعت‌ها با آن کلنجار می‌روند ولی تازه‌کاران حوصلهٔ بررسی مسأله را ندارند و با چند یا حتی یک خطا سریع به پاسخ آن در پاسخ‌نامه رجوع می‌کنند بنابراین الگوها در ذهنشان تثبیت نمی‌شود.

۲ـ کهنه‌کاران تا به یک‌پارچگی در حل سوال نرسند شروع به حل نمی‌کنند و صرفاً با کشیدن شکل و برانداز کردن سوال سعی در پیدا کردن نکته سوال می‌کنند و بعد از اینکه توانستند به خوبی سوال را کالبدشکافی کنند به صورت یک‌پارچه شروع به پاسخ می‌کنند. ولی تازه‌کاران از همان ابتدا با دیدن سوال شروع به حل می‌کنند و به طور پراکنده هر چه به ذهنشان می‌رسد را می‌نویسند و در آخر نه تنها حل آن را نیافته‌اند بلکه سردرگم‌تر شده‌اند.

۳ـ کهنه‌کاران بر روی سوال تمرکز می‌کنند تا بتوانند ابتدا محتوا و خواست اصلی سوال را دقیق و درست بفهمند، پس از آن است که جواب از دل سوال بیرون می‌آید ولی تازه‌کاران حل مسأله به صورت سوال توجه کافی ندارند و معمولاً شتاب‌زده از روی سوال می‌گذراند و تمرکزشان بر روی جواب است، غافل از این که جواب سوال را نباید ابداع کرد. بلکه جواب را باید در درون سوال کشف کرد.

این دانشمندان بعد از چنین آزمایش‌هایی توصیه می‌کنند که:

۱ـ برای حل مسأله از دیگران کمک نگیرید و سعی کنید خودتان با گذاشتن وقت و بدون خستگی سوال را موشکافی کنید تا نکته‌های آن را درک نمایید.

۲ـ از کشیدن شکل و توضیح موضوع برای خودتان غافل نشوید تا درک بصری از مسأله پیدا کنید.

۳ـ وقتی مسأله‌ای را حل کردید چند مسأله مشابه آن را مجدد حل کنید.

۴ـ بعد از حل مسأله‌هایی که نکته‌دار هستند خودتان پارامترهای آن مسأله را تغییر دهید و یک مسأله شبیه آن طرح کنید این کار باعث می‌شود خودتان را جای طراح سوال حس نمائید.

۵ـ برای جا افتادن الگوهای متعددی که در مسأله‌های مربوط به یک فصل حل کرده‌ای بعد از چند روز دوباره آن‌ها را تکرار کنید تا آن الگوها در ذهنتان نقش ببندد.

**حال با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت:**

۱ـ سعی کنید به طور مستمر در هفته روی درس ریاضی وقت بگذارید مثلاً ۳ روز از هفته به تمرین ریاضی بپردازید.

۲ـ بلافاصله بعد از تدریس بخشی از درس توسط دبیر خود، یک بار دیگر به جزوه، کتاب و نکته‌های خود در منزل نگاهی بیندازید و مثال‌های حل شده توسط دبیر را مجدد خودتان بدون نگاه کردن به جواب حل کنید.

۳ـ در روزهای بعدی تمرین‌های کتاب درسی و کمک آموزشی خود را بدون نگاه کردن به پاسخ‌نامه حل کنید حتی اگر سوال وقت‌گیر بود نگران نشوید و بدون توجه به زمان مشغول حل آن شوید. فراموش نکنید آنالیز سوال است که، شما را توانمند خواهد کرد و به مرور توان حل مسأله را در شما افزایش خواهد داد. مطمئن باشید که پاسخ همیشه در محتوای سوال مستتر و پنهان است و اگر با دقت سوال را آنالیز کنید حتماً پاسخ را خواهید یافت.

به سوال زیر دقت کنید شاید کمی پیچیده به نظر برسد ولی با اندکی دقت و بررسی شکل و محتوای سوال متوجه خواهید شد که سوال کاملاً برایتان آشنا است.

**مثال . منحنی به معادلهٔ** $y=(۲x+۱)(x+۸)$ ، **خطوط** $y=mx$ **نقطهٔ مشترک ندارد. مجموعهٔ مقادیر $m$ کدام است؟**

۱) $۹<m<۲۵$ ۲) $۱۵<m<۲۳$ ۳) $۷<m<۱۵$ ۴) $۵<m<۱۳$

**پاسخ :** اگر قرار باشد نقطهٔ مشترک نداشته باشد یعنی معادلهٔ $mx-(۲x+۱)(x+۸)$ جواب نداشته باشد. این معادله تشکیل معادلهٔ درجه ۲ می‌دهد، در صورتی جواب ندارد که $\Delta<۰$ باشد.

حالا به یک تعیین علامت می‌رسیم. باید یک عبارت درجه ۲ را تعیین علامت کنیم. عبارت درجه ۲ را باید به صورت زیر تعیین علامت کنیم:

| $x$ | $-\infty$ | $x_۱$ | $x_۲$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $ax^۲+bx+c$ | موافق a | مخالف a | موافق a | |

پس مفهوم جواب نداشتن معادله این است که عبارت درجه ۲ فاقد ریشه بوده و $\Delta$ این معادله منفی باشد.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که سوال‌هایی به ظاهر، پیچیده مثل سوال بالا با اندکی دقت، ابتکار و پردازش به سوالی ساده تبدیل شده و قابل حل می‌شود.

۴ـ حتماً بعد از انجام تمرین در بخش مورد نظر به کتاب فارآزمون مراجعه کنید و از همان بخش، از خودتان آزمون بگیرید. آزمون‌های اولیهٔ این کتاب مویرگی هستند و به شما کمک می‌کنند تا آن درس در ذهنتان جا بیفتد. از آن‌جایی که سوالات در آزمون‌ها پراکندگی دارند و باعث تمرکز بیش‌تر روی مبحث می‌شوند و ضمناً هنر آزمون دادن را نیز از همین ابتدا به شما آموزش می‌دهند. به علاوه آزمون دادن باعث جمع‌بندی مطالب خوانده شده می‌شود.

۵ـ ضمناً سوالاتی را که از کتاب درسی، کمک آموزشی و فارآزمون نتوانسته‌اید جواب بدهید یا نکته‌دار بوده‌اند را در روزهای بعدی دوباره حل کنید؛ حتی این کار می‌تواند بیش از دو بار اتفاق بیفتد. یادتان باشد با حل مجدد سوالات، ویژگی‌های مطالب یاد گرفته شده و نکته‌های حل مسأله در ذهنتان تثبیت شده و الگوهای لازم (کلید حل مسأله) در حافظه‌تان شکل می‌گیرد؛ یعنی شما را از یک تازه‌کار به یک کهنه‌کار حل مسأله تبدیل می‌کند.

در انتها توصیه می‌کنیم که هرگز از ماشین حساب برای بدست آوردن جواب استفاده نکنید. چنانچه یک روز در میان به مقدار یک ساعت و نیم تا دو ساعت مطالعه و تمرین داشته باشید و سعی کنید که خودتان بدون کمک پاسخ‌نامه و یا دیگران پاسخ را بیابید حتماً در ۴ ماه آینده از پیشرفتتان تعجب خواهید کرد.

خدایا می‌دانم نگاه مهربان تو همیشه حامی من است

موفق و پیروز باشید

آرش عمید

پاییز ۹۶

# فهرست

## بخش اول آزمون‌ها

بخش دوم

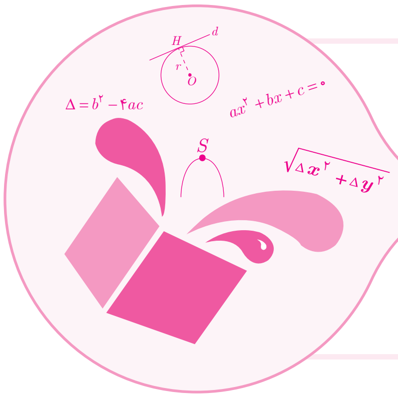
# پاسخ‌نامه تشریحی

بخش سوم

# درس‌نامه

# بخش اول

## آزمون‌ها




# آزمون‌های فصل اول

## هندسه تحلیلی و جبر

### آزمون ۱ هندسه تحلیلی — ۱۵ دقیقه

۱. به ازای کدام مقدار $m$ سه نقطهٔ $A(۳,۵)$، $B(۴,۲)$ و $C(۲,m)$ بر روی یک خط قرار دارند؟

۱) ۵  ۲) ۶  ۳) ۷  ۴) ۸

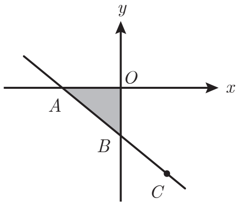
۲. قرینهٔ نقطهٔ $A(۴,۲)$ نسبت به خط $y - ۲x + ۱ = ۰$ نقطهٔ $A'$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $A'$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۳  ۲) $\sqrt{۵}$  ۳) ۴  ۴) ۲

۳. فاصلهٔ بین دو خط به معادلات $y = x\sqrt{۳} + ۲$ و $\sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰$ کدام است؟ *تجربی خارج ۸۸*

۱) $۲ - \sqrt{۳}$  ۲) $\sqrt{۳} - ۱$  ۳) $\sqrt{۳} + ۱$  ۴) $۲ + \sqrt{۳}$

۴. در شکل مقابل، $OA = OB$ و $C(۳,-۴)$ است. طول ارتفاع وارد بر ضلع $AB$ در مثلث رنگی کدام است؟

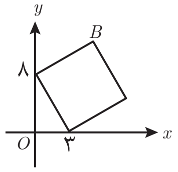



۱) $\sqrt{۲}$  ۲) $۲\sqrt{۲}$  ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$  ۴) $۲ - \sqrt{۲}$

۵. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟ *تجربی خارج ۹۲*

۱) ۶  ۲) ۶/۵  ۳) ۷  ۴) ۷/۵

۶. در شکل مقابل، چهارضلعی مربع است. مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ $B$ کدام است؟




۱) ۱۹  ۲) ۱۸  ۳) ۱۷  ۴) ۱۶

۷. نقاط $A(-۱,۷)$، $B(۳,۵)$ و $M(۲,۲)$ در صفحه مفروض‌اند. اگر قرینهٔ نقطهٔ $B$ نسبت به نقطهٔ $M$ را $C$ بنامیم، میانهٔ نظیر رأس $B$ در مثلث $ABC$ از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟

۱) $(۲,۱)$  ۲) $(۱,-۳)$  ۳) $(-۳,۱)$  ۴) $(-۱,-۱)$

۸. خط گذرنده از نقاط $A(a-۱,a+۱)$ و $B(a+۲,۲a)$ بر خط $\frac{x}{۳} + \frac{y}{۴} = ۱$ عمود است. مقدار $a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴}$  ۲) $\frac{۷}{۴}$  ۳) $\frac{۹}{۴}$  ۴) $\frac{۱۱}{۴}$

۹. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ *تجربی خارج ۹۰*

۱) ۷/۲  ۲) ۹/۶  ۳) ۱۱/۴  ۴) ۱۲/۸

۱۰. خط گذرنده بر نقطهٔ $(۴,-۲)$ و موازی خط به معادلهٔ $۲y - x = ۴$ از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۲,-۴)$  ۲) $(۶,-۱)$  ۳) $(۸,-۱)$  ۴) $(۱۰,۲)$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ① ② ③ ④ | ۳ | ① ② ③ ④ | ۵ | ① ② ③ ④ | ۷ | ① ② ③ ④ | ۹ | ① ② ③ ④ |
| ۲ | ① ② ③ ④ | ۴ | ① ② ③ ④ | ۶ | ① ② ③ ④ | ۸ | ① ② ③ ④ | ۱۰ | ① ② ③ ④ |

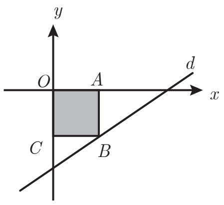
پاسخ آزمون ۱ در صفحهٔ ۷۲

## آزمون ۲ هندسه تحلیلی — ۱۵ دقیقه

۱. خط $L: ۳x-۴y+۹=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,۵)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

۱) $\pi$ ۲) $۲\pi$
۳) $۳\pi$ ۴) $۴\pi$

۲. در شکل مقابل، معادلهٔ خط $d$ به صورت $y=۲x-۶$ است. مساحت مربع رنگی کدام است؟




۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۹

۳. نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ *تجربی ۹۰*

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$
۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

۴. نقاط $A$ و $B$ روی خط $y+۲x=۵$ به‌گونه‌ای قرار دارند که فاصلهٔ آن‌ها از خط $۳x+۴y=۱۰$ برابر ۲ است. طول پاره‌خط $AB$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۵. عرض از مبدأ خط گذرا بر دو نقطهٔ $(۳,-۲)$ و $(۱,۲)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

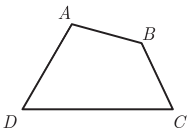
۶. نقاط $A(۳t-۳,t+۳)$ و $B(t+۱,-۳t+۵)$ به ازای مقادیر مختلف $t$ در صفحه حرکت می‌کنند. نقطهٔ وسط پاره‌خط $AB$ روی کدام خط حرکت خواهد کرد؟

۱) $x+۲y-۷=۰$ ۲) $۲x-y+۷=۰$
۳) $x+۲y+۷=۰$ ۴) $x-۲y-۷=۰$

۷. سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: ۲y-x=۳$ ، $AC: y-۲x=۵$ و $BC: ۲y+۳x=۶$ هستند. معادلهٔ ارتفاع $AH$ از مثلث مفروض کدام است؟ *تجربی خارج ۸۹*

۱) $۶y-۴x=۱۵$ ۲) $۹y-۶x=۱۷$
۳) $۳y-۲x=۷$ ۴) $۳y+۲x=۹$

۸. در شکل مقابل $A(۱,۴)$ ، $B(۶,۱)$ ، $C(۸,-۵)$ و $D(-۴,-۳)$ است. مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟




۱) ۴۲ ۲) ۴۸
۳) ۵۰ ۴) ۵۹

۹. یک خط از دسته خطوط به معادلهٔ $(k+۱)y+۲kx-k+۱=۰$ که بر خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(۲,-۱)$ و $(۸,۳)$ عمود است، از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟

۱) $(۳,۲)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(۴,۰)$ ۴) $(۲,۵)$

۱۰. دو خط $۳x-۲y+m=۰$ و $۲y+۳x-۶=۰$ روی محور $OX$ متقاطع‌اند. مقدار $m$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۶- ۳) ۴- ۴) ۲-

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۳ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۵ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۷ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۹ (۱)(۲)(۳)(۴) |
| ۲ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۴ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۶ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۸ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۱۰ (۱)(۲)(۳)(۴) |

پاسخ آزمون ۲ در صفحهٔ ۷۴

۱. برای رسیدن از نقطهٔ $A$ به نقطهٔ $B$، ابتدا ۴ واحد به چپ و سپس ۳ واحد به طرف پایین حرکت می‌کنیم. اگر خط گذرا از نقاط $A$ و $B$ محور $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع کند، عرض از مبدأ آن کدام است؟

۱) $-۲/۵$   ۲) $-۳/۵$   ۳) $-۴/۵$   ۴) $-۵/۵$

۲. فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ تلاقی دو خط به معادلات $۳y = ۲x + ۱۱$ و $۲y + x = ۵$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) $\sqrt{۸}$   ۳) ۳   ۴) $\sqrt{۱۰}$

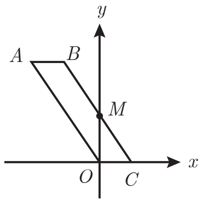
۳. مساحت ناحیهٔ محدود بین دو خط $۳x + y = ۳$ و $۵y + ۳x = ۱۵$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۱۱   ۲) ۶   ۳) ۸   ۴) ۷/۵

۴. دو خط $y = (m-۳)x + ۸$ و $۶y - ۳mx + ۱۱ = ۰$ موازی‌اند. نزدیک‌ترین نقطهٔ خط $۲y - (m-۴)x + ۱۲ = ۰$ به نقطهٔ $A(۶,-۶)$ کدام است؟

۱) $(۲,۳)$   ۲) $(۲,-۲)$

۳) $(۴,-۴)$   ۴) $(۳,-۳)$




۵. در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCO$ متوازی‌الاضلاع است. اگر $M$ وسط ضلع $BC$ و $A(-۴,۶)$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

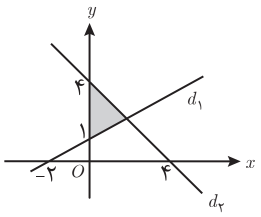
۱) ۱۶   ۲) ۱۲

۳) ۱۸   ۴) ۲۰

۶. یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادلهٔ $y = x + ۲$ و نقطهٔ $A(۳,-۱)$ یک رأس آن است. اندازهٔ قطر مربع کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) $۳\sqrt{۲}$   ۴) $۶\sqrt{۲}$

۷. مساحت ناحیهٔ رنگی شکل مقابل کدام است؟




۱) ۲/۵

۲) ۳

۳) ۳/۵

۴) ۴

۸. فاصلهٔ دو خط موازی $۲x + my - ۱۲ = ۰$ و $y - ۲x + ۲ = ۰$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$   ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۴   ۴) $۲\sqrt{۵}$

۹. مساحت مثلث $ABC$ برابر ۵ است. اگر $A(۲,-۱)$ و $B(-۲,۲)$ باشد، رأس $C$ روی کدام خط زیر قرار دارد؟

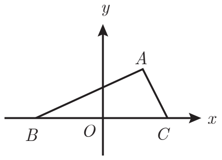
۱) $۳x - ۴y + ۱۲ = ۰$   ۲) $۳x + ۴y - ۱۲ = ۰$

۳) $۳x - ۴y + ۸ = ۰$   ۴) $۳x + ۴y - ۸ = ۰$

۱۰. در شکل زیر، $A(۳,۴)$ رأس قائم مثلث $ABC$ است. اگر $OB = OC$ باشد، طول وتر $BC$ کدام است؟

۱) ۷   ۲) ۸

۳) ۹   ۴) ۱۰




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ ① ② ③ ④ | ۳ ① ② ③ ④ | ۵ ① ② ③ ④ | ۷ ① ② ③ ④ | ۹ ① ② ③ ④ |
| ۲ ① ② ③ ④ | ۴ ① ② ③ ④ | ۶ ① ② ③ ④ | ۸ ① ② ③ ④ | ۱۰ ① ② ③ ④ |

پاسخ آزمون ۳ در صفحهٔ ۷۶

## آزمون ۴ معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ دو

۱۵ دقیقه

۱. به ازای کدام مقدار $m$ معادلهٔ $(1-m)x^2+4x+m^2-4=0$ دارای دو ریشهٔ مختلف العلامت است؟

۱) $(-2,1)\cup(2,+\infty)$
۲) $(-2,2)$
۳) $(-1,0)\cup(2,+\infty)$
۴) $(1,+\infty)$

۲. ریشهٔ کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2-3x-1=0$ یک واحد کم‌تر است؟ *تجربی ۹۴*

۱) $x^2-3x+1=0$
۲) $x^2+3x+1=0$
۳) $x^2-5x+2=0$
۴) $x^2+5x+2=0$

۳. اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(2-a)x+a-3=0$ باشند به ازای کدام مقدار $a$ رابطهٔ $x_1^2x_2+x_1x_2^2<0$ همواره برقرار است؟

۱) $0<a<1$
۲) $a<-1$
۳) $2<a<3$
۴) $1<a<2$

۴. اگر معادلهٔ $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر $m$ به کدام صورت است؟ *تجربی ۸۵*

۱) $m<-4$
۲) $m>4$
۳) $-4<m<4$
۴) $4<m<9$

۵. راکتی به‌طور عمودی رو به بالا شلیک شده است. $t$ ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع $h$ متری از سطح زمین با معادلهٔ $h(t)=100t-5t^2$ قرار می‌گیرد. ارتفاع نقطهٔ اوج راکت کدام است؟

۱) ۴۰۰
۲) ۳۵۰
۳) ۴۵۰
۴) ۵۰۰

۶. اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x-3$ نسبت به خط $x=-2$ متقارن باشد، این منحنی محور $x$ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۷. خط به معادلهٔ $y=-\frac{5}{2}$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{2}x^2-3x+a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. $a$ کدام است؟

۱) $-2$
۲) $-1$
۳) ۱
۴) ۲

۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر $m$ منحنی به معادلهٔ $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$ محور $x$ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ *ریاضی ۹۵*

۱) $m>2$
۲) $-1<m<2$
۳) هر مقدار $m$
۴) هیچ مقدار $m$

۹. اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ *تجربی ۸۷*

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) جواب دیگر ندارد.

۱۰. در معادلهٔ $x+\frac{2x-1}{x-4}=-2$ جواب‌ها چگونه‌اند؟

۱) دو جواب قرینه
۲) دو جواب وارون هم
۳) دو جواب مساوی
۴) فقط یک جواب قابل قبول

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۳ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۵ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۷ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۹ (۱)(۲)(۳)(۴) |
| ۲ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۴ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۶ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۸ (۱)(۲)(۳)(۴) | ۱۰ (۱)(۲)(۳)(۴) |

پاسخ آزمون ۴ در صفحهٔ ۷۸

## آزمون ۵ معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ دو

۱۵ دقیقه

**۱.** در معادلهٔ درجهٔ دوم $6x^2+(m+1)x+m=0$، اگر مجموع دو ریشهٔ حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشهٔ مثبت آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ‏ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) ۱ ‏ ۴) $\frac{4}{3}$

**۲.** به ازای کدام مقدار $m$، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ می‌باشد؟ *ریاضی ۹۶*

۱) ۳ ‏ ۲) ۴ ‏ ۳) ۵ ‏ ۴) ۶

**۳.** ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+7x+1=0$ بیش‌تر است. $b$ کدام است؟ *تجربی ۸۷*

۱) ۲- ‏ ۲) ۱- ‏ ۳) $\frac{2}{3}$ ‏ ۴) $\frac{4}{3}$

**۴.** تعداد جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^4+10x^2+9=0$ کدام است؟

۱) صفر ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۴

**۵.** به ازای کدام مقادیر $a$، معادلهٔ $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است؟

۱) $(-\infty,-4)-\{-5\}$ ‏ ۲) $(-\infty,-4)$

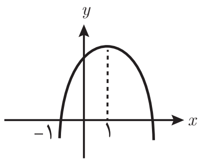
۳) $(4,+\infty)-\{5\}$ ‏ ۴) $(4,+\infty)$

**۶.** اگر منحنی به معادلهٔ $y=2x^2-4x+m-3$ محور $x$ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر $m$ به کدام صورت است؟ *ریاضی ۸۷*

۱) $m>3$ ‏ ۲) $3<m<4$

۳) $3<m<5$ ‏ ۴) $4<m<5$

**۷.** شکل رو به رو نمودار تابع $y=-2x^2+ax+b$ است. $b$ کدام است؟




۱) ۳ ‏ ۲) ۴

۳) ۵ ‏ ۴) ۶

**۸.** جواب‌های معادلهٔ $3x+4=\sqrt{x^2+6}$ چگونه است؟

۱) یک جواب منفی ‏ ۲) یک جواب مثبت

۳) دو جواب منفی ‏ ۴) یک جواب مثبت، یک جواب منفی

**۹.** مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x^2-\frac{4}{x^2})(\frac{x}{3x+2})=\frac{x^2+2}{x}$ کدام است؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۴ ‏ ۴) ۵

**۱۰.** در یک زمین گل‌خانه‌ای، اگر با فاصلهٔ یکسان، ۴۰ بوتهٔ گوجه فرنگی کاشته شود به‌طور متوسط از هر بوته ۸ کیلو محصول به دست می‌آید. به ازای هر بوتهٔ اضافی که کاشته شود، به مقدار $\frac{1}{8}$ کیلو از میانگین محصول بوته‌ها کاسته می‌شود. در این صورت بیش‌ترین محصول برداشتی کدام است؟

۱) ۳۳۶ ‏ ۲) ۳۳۸

۳) ۳۴۰ ‏ ۴) ۳۴۲

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۹ (۱) (۲) (۳) (۴) |
| ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴) |

پاسخ آزمون ۵ در صفحهٔ ۸۰

## آزمون ۶ معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ دو
۱۵ دقیقه

**۱.** به ازای کدام مقدار $m$، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ برابر ۶ می‌باشد؟ تجربی ۹۳

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱

۳) $-\frac{۹}{۵},۱$ ۴) $-۱,\frac{۹}{۵}$

**۲.** یکی از جواب‌های کدام معادلهٔ زیر $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد؟

۱) $x^۲+۲x-\frac{۱}{۴}=۰$ ۲) $x^۲-۲x+\frac{۱}{۴}=۰$

۳) $۲x^۲-۲x+۱=۰$ ۴) $۴x^۲-۲x+۱=۰$

**۳.** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x(۵x+۳)=۲$ باشند، به ازای کدام مقدار $k$ مجموعه جواب‌های معادلهٔ $۴x^۲-kx+۲۵=۰$ به صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha^۲},\frac{۱}{\beta^۲}\right\}$ است؟ ریاضی ۹۰

۱) ۲۷ ۲) ۲۹ ۳) ۲۸ ۴) ۳۱

**۴.** مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۹}{x^۲}+\frac{x^۲}{۴}+۶(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x})+۶=۰$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) -۶ ۴) -۵

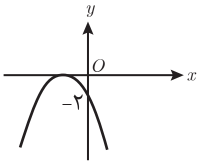
**۵.** به ازای چند عدد صحیح $m$ نمودار تابع $f(x)=(۱-m)x^۲+x+(m-۲)$ از هر چهار ناحیهٔ محور مختصات می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

**۶.** اگر بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x)=(k+۳)x^۲-۴x+k$ برابر صفر باشد، مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۱

**۷.** شکل رو به‌رو، نمودار کدام تابع زیر است؟




۱) $y=-۲x^۲+۴x-۲$ ۲) $y=-۲x^۲-۴x-۲$

۳) $y=-x^۲-۲x-۲$ ۴) $y=۲x^۲+۴x-۲$

**۸.** محور تقارن سهمی $y=\frac{۱}{۲}(x-۲)(x+۳)$ کدام است؟

۱) $x=\frac{۱}{۲}$ ۲) $x=\frac{۵}{۲}$

۳) $x=-\frac{۱}{۲}$ ۴) $x=-\frac{۵}{۲}$

**۹.** جواب معادلهٔ $\sqrt{۴x+۵}=x$ ریشهٔ معادله $x^۲-(m+۲)x+۴m=۰$ است. مقدار $m$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

**۱۰.** در یک کارگاه تولیدی، یکی از کارگران متعهد شده است که در پایان هر هفته ۸۰ قطعه با دستمزد هر قطعه ۴۵۰ تومان تحویل دهد. به ازای هر قطعهٔ اضافه بر تعهد، مبلغ ۵ تومان از دستمزد هر قطعهٔ تحویلی کسر می‌شود. بیش‌ترین دستمزد کارگر کدام است؟

۱) ۳۶۰۷۵ ۲) ۳۶۱۲۵

۳) ۳۶۱۷۵ ۴) ۳۶۲۲۵

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۹ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۱ (۱) (۲) (۳) (۴) |
| ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) |

پاسخ آزمون ۶ در صفحهٔ ۸۲

**۱.** به ازای کدام مقادیر $m$، خط به معادلهٔ $y = mx + m - ۳$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $۰ \le m \le ۳$  ۲) $m \ge ۳$

۳) $m \le ۰$  ۴) هیچ مقدار $m$

**۲.** مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادله‌های $x + y = ۲$ و $۲y - x = ۴$ و ضلع دیگر آن بر محور $x$ قرار دارد کدام است؟

۱) ۵  ۲) ۶

۳) ۷  ۴) ۸

**۳.** نقاط $A(-۱,۲)$ و $B(x_۰,y_۰)$ مفروض‌اند. اگر $x - y + ۵ = ۰$ معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط $AB$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ $B$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۳  ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۵  ۴) $۲\sqrt{۵}$

**۴.** اگر $A(۳,۵)$، $B(-۲,۱)$ و $C(۱,-۱)$ رئوس مثلث $ABC$ باشند، معادلهٔ میانهٔ $BM$ کدام است؟

۱) $۲y = x + ۶$  ۲) $۲y = x + ۴$

۳) $۴y = x + ۴$  ۴) $۴y = x + ۶$

**۵.** در معادله درجه دوم $۲x^۲ + ax + ۹ = ۰$ یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است. مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵  ۲) ۴

۳) ۴/۵  ۴) ۵

**۶.** اگر $۲\alpha - ۱$ و $۲\beta - ۱$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha}+۱, \frac{۱}{\beta}+۱\right\}$ است؟

۱) $x^۲ + ۱۶x - ۲۳ = ۰$  ۲) $x^۲ - ۱۶x + ۲۳ = ۰$

۳) $۴x^۲ + ۱۶x - ۲۳ = ۰$  ۴) $۴x^۲ - ۱۶x - ۲۳ = ۰$

**۷.** مجموع جواب‌های مثبت معادلهٔ $(x^۲ - ۴x)^۲ - ۲x^۲ + ۸x - ۱۵ = ۰$ کدام است؟

۱) ۶  ۲) ۷

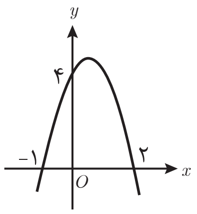
۳) ۸  ۴) ۹

**۸.** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha^۳ + ۵\beta^۲ - ۲\beta$ کدام است؟

۱) ۱۰۰  ۲) ۹۵

۳) ۹۰  ۴) ۸۵

**۹.** معادلهٔ سهمی شکل رو به رو کدام است؟




۱) $y = -x^۲ + ۲x + ۴$  ۲) $y = ۲x^۲ - ۲x - ۴$

۳) $y = -۲x^۲ - ۲x + ۴$  ۴) $y = -۲x^۲ + ۲x + ۴$

**۱۰.** جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $\frac{x+۵}{x+۴} - \frac{x}{x+۲} = -۱$ چند برابر جواب معادلهٔ $\sqrt{x-۵} + \sqrt{x} = ۵$ است؟

۱) ۲  ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$  ۴) $-\frac{۱}{۳}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ ۲ ۳ ۴ | ۳ | ۱ ۲ ۳ ۴ | ۵ | ۱ ۲ ۳ ۴ | ۷ | ۱ ۲ ۳ ۴ | ۹ | ۱ ۲ ۳ ۴ |
| ۲ | ۱ ۲ ۳ ۴ | ۴ | ۱ ۲ ۳ ۴ | ۶ | ۱ ۲ ۳ ۴ | ۸ | ۱ ۲ ۳ ۴ | ۱۰ | ۱ ۲ ۳ ۴ |

پاسخ آزمون ۷ در صفحه ۸

۱. نقاط $A(1,2)$ ، $B(-1,3)$ و $C(0,1)$ رئوس مثلث $ABC$ هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع $BC$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

۲. نقاط $A(2m,m)$ و $B(m+3,m-4)$ دو رأس مثلث $ABC$ و معادلهٔ میانهٔ نظیر رأس $C$ خط $y=5$ می‌باشد، مختصات وسط $AB$ کدام است؟

۱) $(5,9)$ ۲) $(5,12)$
۳) $(9,5)$ ۴) $(12,5)$

۳. عرض از مبدأ خطی که از نقطهٔ $(-3,2)$ موازی خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(1,4)$ و $(-1,5)$ رسم شود کدام است؟

۱) $-4$ ۲) $-2$
۳) $3$ ۴) $4$

۴. به ازای یک مقدار $m$، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3mx+2m+6=0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $1/5$
۳) $2$ ۴) $3$

۵. کدام گزینه در مورد معادلهٔ $(x^2-2x+3)^2+4x^2-8x=0$ صحیح است؟

۱) دو ریشهٔ مختلف العلامت دارد. ۲) دو ریشهٔ متمایز مثبت دارد.
۳) یک ریشهٔ مضاعف منفی دارد. ۴) یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

۶. به ازای کدام مقدار $a$ نقطهٔ مینیمم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=ax^2-2\sqrt{2}x+5$ بر روی خط $y=1$ واقع است؟

۱) $-1$ ۲) $\frac{1}{2}$
۳) $1$ ۴) $2$

۷. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^2-3x-10$ را حداقل چند واحد به طرف $x$ های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور $x$ ها غیر منفی باشد؟ *تجربی خارج ۹۳*

۱) $1$ ۲) $1/5$
۳) $2$ ۴) $3$

۸. اگر $m$ جواب معادلهٔ $(x+\frac{1}{x})^2-8(x+\frac{1}{x})+16=0$ باشد، حاصل $m^3+\frac{1}{m^3}$ کدام است؟

۱) $48$ ۲) $50$
۳) $52$ ۴) $56$

۹. ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $3=\frac{x-1}{3x}+\frac{6x}{x-1}$ چند برابر ریشهٔ کوچک‌تر آن است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۰. از بین مربع‌هایی که عدد مساحت آن از عدد محیط کم‌تر است، بیش‌ترین مقدار فزونی عدد محیط از عدد مساحت کدام است؟

۱) $3$ ۲) $4$ ۳) $5$ ۴) $6$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۹ (۱) (۲) (۳) (۴) |
| ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) | ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴) |

پاسخ آزمون ۸ در صفحهٔ ۸۷

# بخش دوم

# پاسخنامه تشریحی

# پاسخ‌نامه فصل اول

## هندسه تحلیلی و جبر

### پاسخ‌نامه آزمون ۱ هندسه تحلیلی

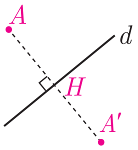
**۱.** گزینه ۴ **روش اول:** چون نقاط $A$، $B$ و $C$ روی یک خط قرار دارند، اگر شیب خط را به وسیلهٔ هر دو نقطه به‌دست آوریم، باید با هم برابر شـوند. با توجه به این که فقط در مؤلفه‌های نقطهٔ $C$ مجهول وجود دارد پس بهتر اسـت یکی از شـیب‌هایی که به دست می‌آوریم، شیب خط $AB$ باشد:

$$m_{AB}=m_{AC}\Rightarrow \frac{۵-۲}{۳-۴}=\frac{۵-m}{۳-۲}\Rightarrow -۳=۵-m\Rightarrow m=۸$$

**روش دوم:** چون $A$، $B$ و $C$ روی یک خط هستند پس مساحت مثلث ایجادشده توسط این سه نقطه صفر است:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۴ & ۲ \\ ۲ & m \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix}\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}|(۶+۴m+۱۰)-(۳m+۴+۲۰)|\Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}|۱۶+۴m-۳m-۲۴|\Rightarrow |m-۸|=۰\Rightarrow m=۸$$

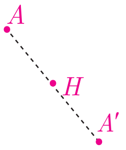
**۲.** گزینه ۳ برای به دسـت آوردن قرینهٔ نقطهٔ $A$ نسـبت به خط $d$، باید از $A$ بر $d$ عمود کرده تا نقطهٔ $H$ به دست آید. سپس $A$ را نسبت به $H$ قرینه کنیم. چون شیب خط $y-۲x+۱=۰$ برابر ۲ است پس شیب خط گذرا از $A$ و عمود بر آن برابر $-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ آن به صورت زیر است:




$$y-۲=-\frac{۱}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۴$$

حال نقطهٔ $H$ از تلاقی خط‌های $y-۲x+۱=۰$ و $y=-\frac{۱}{۲}x+۴$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y=۲x-۱ \\ y=-\frac{۱}{۲}x+۴ \end{cases}\Rightarrow ۲x-۱=-\frac{۱}{۲}x+۴\Rightarrow \frac{۵}{۲}x=۵\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۳\Rightarrow H(۲,۳)$$




حال کافی است نقطهٔ $A(۴,۲)$ را نسبت به نقطهٔ $H(۲,۳)$ قرینه کنیم:

$$H=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow ۲H=A+A'\Rightarrow A'=۲H-A=(۴,۶)-(۴,۲)=(۰,۴)$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A'(۰,۴)$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۰^۲+۴^۲}=۴$ می‌باشد.

**۳.** گزینه ۳ دو خط داده‌شده موازی‌اند. برای استفاده از فرمول فاصله، ابتدا ضرایب $x$ و $y$ را در دو خط یکسان می‌کنیم:

$$y=x\sqrt{۳}+۲\xrightarrow{\times\sqrt{۳}}\sqrt{۳}y=۳x+۲\sqrt{۳}\Rightarrow \sqrt{۳}y-۳x-۲\sqrt{۳}=۰$$

حال فاصلهٔ دو خط $\sqrt{۳}y-۳x-۲\sqrt{۳}=۰$ و $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|۶-(-۲\sqrt{۳})|}{\sqrt{۳+۹}}=\frac{۶+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۲}}=\frac{۶+۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۶}{۲\sqrt{۳}}+\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}+۱=\sqrt{۳}+۱$$

**۴.** گزینه ۳ عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط $d$ با هم برابرند، پس شیب خط $d$ برابر است با:

$$m_d = -\frac{\text{عرض از مبدأ}}{\text{طول از مبدأ}} = -۱$$

حال به کمک نقطهٔ $C$ معادلهٔ خط $d$ را می‌نویسیم:

$$y-(-۴) = -(x-۳) \Rightarrow y+۴ = -x+۳ \Rightarrow y+x+۱ = ۰$$

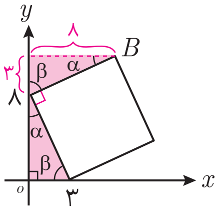
فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $d$ همان طول ارتفاع وارد بر ضلع $AB$ در مثلث رنگی می‌باشد. پس:

$$OH = \frac{|۰+۰+۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

**۵.** گزینه ۲ به کمک رابطهٔ مقابل داریم:

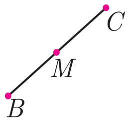
$$S = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}|(۰+۶+۰)-(۴+۰+۱۵)| = \frac{۱}{۲}|۶-۱۹| = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

**۶.** گزینه ۱ از رأس $B$ بر محور $y$ها عمودی رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی هم‌نهشت هستند و در نتیجه اضلاع متناظر آن‌ها برابرند. بنابراین مختصات نقطهٔ $B$ برابر $(۸,۱۱)$ خواهد بود و داریم:

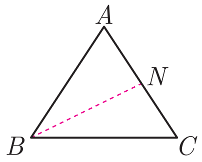



$$B \text{ مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ } = ۸+۱۱ = ۱۹$$

**۷.** گزینه ۳ با توجه به شکل مقابل داریم:




$$\Rightarrow M = \frac{B+C}{۲} \Rightarrow C = ۲M - B = ۲(۲,۲)-(۳,۵) = (۴,۴)-(۳,۵) = (۱,-۱)$$




میانهٔ نظیر رأس $B$ از وسط ضلع $AC$ می‌گذرد پس:

$$N = \frac{A+C}{۲} \Rightarrow N\left(\frac{-۱+۱}{۲}, \frac{۷+(-۱)}{۲}\right) = (۰,۳)$$

حال معادلهٔ خط گذرا از $B$ و $N$ را می‌نویسیم:

$$m_{BN} = \frac{۵-۳}{۳-۰} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow BN: y-۳ = \frac{۲}{۳}(x-۰) \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x+۳$$

با توجه به گزینه‌ها $BN$ از نقطهٔ $(-۳,۱)$ می‌گذرد زیرا $(-۳,۱)$ در معادلهٔ $y = \frac{۲}{۳}x+۳$ صدق می‌کند.

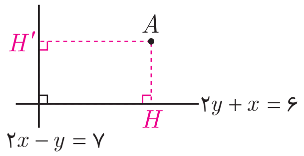
**۸.** گزینه ۱ شیب خط گذرنده از نقاط $A(a-۱,a+۱)$ و $B(a+۲,۲a)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{۲a-(a+۱)}{a+۲-(a-۱)} = \frac{a-۱}{۳}$$

از طرفی شیب خط $\frac{x}{۳}+\frac{y}{۴} = ۱$ برابر $-\frac{۴}{۳}$ است. چون این دو خط بر هم عمودند پس حاصل‌ضرب شیب آن‌ها باید برابر ۱- شود:

$$\frac{a-۱}{۳} \times \frac{-۴}{۳} = -۱ \Rightarrow \frac{a-۱}{۳} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow a-۱ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow a = \frac{۱۳}{۴}$$

**۹.** گزینه ۲ با توجه به این که مختصات نقطهٔ $A(۸,۵)$ در معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ صدق نمی‌کند، پس نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به صورت مقابل است. بنابراین اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A$ تا دو خط را به‌دست آوریم، طول و عرض مستطیل به‌دست می‌آید:




$$AH = \frac{|۲(۵)+۸-۶|}{\sqrt{۴+۱}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \quad , \quad AH' = \frac{|۲(۸)-۵-۷|}{\sqrt{۴+۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \times \frac{۴}{\sqrt{۵}} = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$$

**۱۰.** گزینهٔ ۲ وقتی خطی با خط $۲y - x = ۴$ موازی است یعنی شیب آن نیز برابر $\frac{۱}{۲}$ است. حال که شیب و یک نقطه از خط را داریم معادلهٔ آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y-(-۲)=\frac{۱}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-۴$$

با توجه به گزینه‌ها فقط نقطهٔ $(۶,-۱)$ در معادلهٔ $y=\frac{۱}{۲}x-۴$ صدق می‌کند.

## پاسخنامه آزمون ۲ | هندسه تحلیلی

**۱.** گزینهٔ ۱ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است. پس:

$$r=\frac{|۳(۲)-۴(۵)+۹|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{|-۵|}{۵}=\frac{۵}{۵}=۱$$

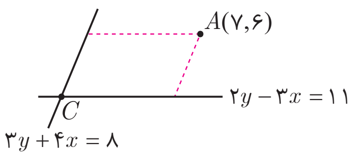
مساحت دایره به شعاع $r$ برابر $\pi r^۲$ است پس مساحت این دایره برابر $\pi(۱)^۲=\pi$ می‌باشد.

**۲.** گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ $B$ روی خط $y=۲x-۶$ است پس مختصات $B$ به صورت $B(\alpha,۲\alpha-۶)$ است. از طرفی چون چهارضلعی $OABC$ مربع است، پس $BA=BC$ است. اندازهٔ $BA$ برابر $-y_B$ و اندازهٔ $BC$ برابر $x_B$ است. پس:

$$BA=BC\Rightarrow -y_B=x_B\Rightarrow -(۲\alpha-۶)=\alpha\Rightarrow -۲\alpha+۶=\alpha\Rightarrow ۳\alpha=۶\Rightarrow\alpha=۲$$

بنابراین طول ضلع مربع برابر ۲ و مساحت آن برابر $S=۲^۲=۴$ است.

**۳.** گزینهٔ ۳ چون مختصات نقطهٔ $A$ در معادلهٔ هیچ‌کدام از دو خط $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ صدق نمی‌کند، پس وضعیت قرارگیری آن‌ها به صورت مقابل است. حال کافی است نقطهٔ تلاقی دو خط $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ را به‌دست آوریم تا رأس $C$ متوازی‌الاضلاع مشخص شود:




$$\begin{matrix}\times۳\\\times۲\end{matrix}\begin{cases}۲y-۳x=۱۱\\۳y+۴x=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۶y-۹x=۳۳\\۶y+۸x=۱۶\end{cases}\xRightarrow{(-)}-۱۷x=۱۷\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۴\Rightarrow C(-۱,۴)$$

حال که مختصات دو سر قطر متوازی‌الاضلاع را داریم، مختصات وسط قطر را به‌دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{x_A+x_C}{۲},\frac{y_A+y_C}{۲}\right)=\left(\frac{۷+(-۱)}{۲},\frac{۶+۴}{۲}\right)=(۳,۵)$$

**۴.** گزینهٔ ۴ چون نقاط $A$ و $B$ روی خط $y=-۲x+۵$ قرار دارند، پس مختصات آن‌ها به فرم $(\alpha,-۲\alpha+۵)$ است. حال فاصلهٔ این نقطه را از خط $۳x+۴y=۱۰$ برابر ۲ قرار می‌دهیم تا $\alpha$ مشخص شود:

$$۲=\frac{|۳\alpha+۴(-۲\alpha+۵)-۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}}\Rightarrow ۲=\frac{|-۵\alpha+۱۰|}{۵}\Rightarrow ۲=\frac{۵|-\alpha+۲|}{۵}\Rightarrow|-\alpha+۲|=۲\Rightarrow\begin{cases}-\alpha+۲=۲\Rightarrow\alpha=۰\\-\alpha+۲=-۲\Rightarrow\alpha=۴\end{cases}$$

بنابراین $A(۰,۵)$ و $B(۴,-۳)$ می‌باشند که طول پاره‌خط $AB$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

**۵.** گزینهٔ ۱ ابتدا معادلهٔ خط گذرا از نقاط $A(۳,-۲)$ و $B(۱,۲)$ را نوشته، سپس عرض از مبدأ خط را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{۲-(-۲)}{۱-۳}=-۲\Rightarrow y-۲=-۲(x-۱)\xRightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}}y-۲=-۲(۰-۱)\Rightarrow y=۴$$

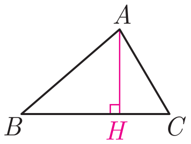
**۶.** گزینه ۱ مختصات نقطهٔ $M$ وسط پاره‌خط $AB$ را به‌دست می‌آوریم:

$$M=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow M\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)=\left(\frac{۳t-۳+t+۱}{۲},\frac{t+۳+(-۳t+۵)}{۲}\right)=(۲t-۱,-t+۴)$$

حال کافی است ارتباط بین $x_M$ و $y_M$ را به‌دست آوریم تا معادلهٔ خط مورد نظر مشخص شود:

$$M(۲t-۱,-t+۴)\Rightarrow\begin{cases}x=۲t-۱\Rightarrow t=\dfrac{x+۱}{۲}\\ y=-t+۴\Rightarrow t=۴-y\end{cases}\Rightarrow\frac{x+۱}{۲}=۴-y\Rightarrow x+۱=۸-۲y\Rightarrow x+۲y-۷=۰$$

**۷.** گزینه ۲ با توجه به شکل مقابل، برای نوشتن معادلهٔ ارتفاع $AH$ باید مختصات نقطهٔ $A$ و شیب $AH$ را داشته باشیم. دقت کنید که چون $AH$ بر $BC$ عمود است، پس شیب $AH$ قرینه و عکس شیب $BC$ است:



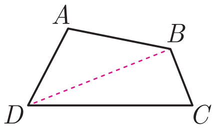

$$\times۲\begin{cases}AB:۲y-x=۳\\ AC:y-۲x=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴y-۲x=۶\\ y-۲x=۵\end{cases}\Rightarrow ۳y=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=-\frac{۷}{۳}\Rightarrow A(-\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۳})$$

$$BC:۲y+۳x=۶\Rightarrow m_{BC}=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow m_{AH}=\frac{۲}{۳}$$

حال معادلهٔ $AH$ را می‌نویسیم:

$$y-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}(x+\frac{۷}{۳})\xrightarrow{\times۳}۳y-۱=۲(x+\frac{۷}{۳})\Rightarrow ۳y-۲x=\frac{۱۷}{۳}\xrightarrow{\times۳}۹y-۶x=۱۷$$

**۸.** گزینه ۴ یکی از قطرهای چهارضلعی $ABCD$ را رسم می‌کنیم تا به دو مثلث تبدیل شود. سپس مساحت هر یک از مثلث‌ها را به‌دست می‌آوریم و باهم جمع می‌کنیم:




$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۱&۴\\۶&۱\\-۴&-۳\\۱&۴\end{vmatrix}\Rightarrow S_{ABD}=\frac{۱}{۲}|(۱-۱۸-۱۶)-(-۳-۴+۲۴)|=\frac{۱}{۲}|-۳۳-۱۷|=۲۵$$

$$S_{BCD}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۶&۱\\۸&-۵\\-۴&-۳\\۶&۱\end{vmatrix}\Rightarrow S_{BCD}=\frac{۱}{۲}|(-۳۰-۲۴-۴)-(-۱۸+۲۰+۸)|=\frac{۱}{۲}|-۵۸-۱۰|=۳۴$$

بنابراین مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر است با:

$$S=۲۵+۳۴=۵۹$$

**۹.** گزینه ۲ شیب دسته خطوط داده‌شده برابر $\frac{-۲k}{k+۱}$ است. از طرفی شیب خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(۲,-۱)$ و $(۸,۳)$ برابر $\frac{۳-(-۱)}{۸-۲}=\frac{۴}{۶}$ است. حاصل‌ضرب شیب‌ها را برابر $-۱$ قرار می‌دهیم تا $k$ مشخص شود:

$$\frac{-۲k}{k+۱}\times\frac{۴}{۶}=-۱\Rightarrow\frac{-۲k}{k+۱}=-\frac{۶}{۴}\Rightarrow ۸k=۶k+۶\Rightarrow k=۳$$

بنابراین خط مورد نظر به ازای $k=۳$ به دست می‌آید. با قرار دادن $k=۳$ در معادلهٔ $(k+۱)y+۲kx-k+۱=۰$ داریم:

$$k=۳\Rightarrow ۴y+۶x-۲=۰\xrightarrow{(\div۲)}۲y+۳x=۱$$

با توجه به گزینه‌ها خط $۲y+۳x=۱$ از نقطهٔ $(۱,-۱)$ می‌گذرد زیرا فقط $(۱,-۱)$ در معادلهٔ $۲y+۳x=۱$ صدق می‌کند.

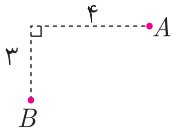
**۱۰.** گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطهٔ تلاقی خط $۲y+۳x-۶=۰$ و محور $x$ها را به‌دست می‌آوریم. این نقطه در معادلهٔ خط $۳x-۲y+m=۰$ نیز صدق می‌کند:

$$۲y+۳x-۶=۰\xrightarrow[y=۰]{\text{تلاقی با محور } x \text{ ها}}۲(۰)+۳x-۶=۰\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲\Rightarrow A(۲,۰)$$

حال نقطهٔ $A(۲,۰)$ را در خط $۳x-۲y+m=۰$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۳x-۲y+m=۰\xrightarrow{A(۲,۰)}۳(۲)-۲(۰)+m=۰\Rightarrow m=-۶$$

**۱.** گزینه ۳ وضعیت قرارگیری نقاط $A$ و $B$ به صورت شکل مقابل است. بنابراین شیب خط گذرنده از $A$ و $B$ برابر $\frac{3}{4}=\frac{-3}{-4}=\frac{\text{تفاوت عرض‌ها}}{\text{تفاوت طول‌ها}}$ است. از آن‌جایی که این خط محور $x$ها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند پس نقطهٔ $(6,0)$ یک نقطه از خط می‌باشد و داریم:




$$y-0=\frac{3}{4}(x-6)\Rightarrow 4y=3x-18\Rightarrow 4y-3x=-18\xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}}4y=-18\Rightarrow y=\frac{-18}{4}=-4/5$$

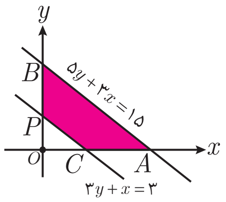
**۲.** گزینه ۴ ابتدا نقطهٔ تلاقی دو خط $3y=2x+11$ و $2y+x=5$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}3y=2x+11\\2y+x=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y-2x=11\\2y+x=5\end{cases}\xrightarrow{\times 2}\begin{cases}3y-2x=11\\4y+2x=10\end{cases}\xrightarrow{(+)}7y=21\Rightarrow y=3\Rightarrow x=-1\Rightarrow A(-1,3)$$

حال فاصلهٔ مبدأ مختصات یعنی $O(0,0)$ را از نقطهٔ $A(-1,3)$ به‌دست می‌آوریم:

$$OA=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

**۳.** گزینه ۲ مساحت ناحیهٔ رنگی شکل مقابل را می‌خواهیم، بنابراین باید مساحت مثلث $OCD$ را از مساحت مثلث $OAB$ کم کنیم، برای این منظور عرض از مبدأ و طول از مبدأ هر کدام از خطوط را به‌دست می‌آوریم:




$3y+x=3\xrightarrow{y=0}x=3\Rightarrow$ طول از مبدأ $=3$ و $3y+x=3\xrightarrow{x=0}y=1\Rightarrow$ عرض از مبدأ $=1$

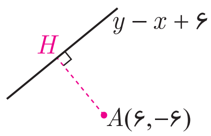
$5y+3x=15\xrightarrow{y=0}x=5\Rightarrow$ طول از مبدأ $=5$ و $5y+3x=15\xrightarrow{x=0}y=3\Rightarrow$ عرض از مبدأ $=3$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر است با: $S_{\text{رنگی}}=\frac{1}{2}|5\times3|-\frac{1}{2}|3\times1|=6$

**۴.** گزینه ۴ شیب خط $y=(m-3)x+8$ برابر $m-3$ و شیب خط $6y-3mx+11=0$ برابر $\frac{3m}{6}=\frac{m}{2}$ است چون این دو خط موازی‌اند داریم:

$$m-3=\frac{m}{2}\Rightarrow\frac{m}{2}=3\Rightarrow m=6$$

حال به ازای $m=6$ معادلهٔ خط $2y-(m-4)x+12=0$ به صورت $2y-2x+12=0$ یا $y-x+6=0$ می‌شود. می‌خواهیم نزدیک‌ترین نقطهٔ خط $y-x+6=0$ را از نقطهٔ $A(6,-6)$ بیابیم. با توجه به شکل مقابل نقطهٔ $H$ مدنظر سؤال است. بنابراین کافی است معادلهٔ $AH$ را نوشته و با خط $y-x+6=0$ تلاقی دهیم تا نقطهٔ $H$ به‌دست آید. شیب خط $y-x+6=0$ برابر ۱ است، بنابراین شیب خط $AH$ برابر ۱- خواهد بود. به کمک نقطهٔ $A$ داریم:

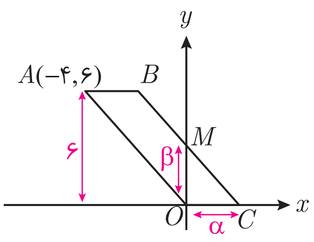



$$AH:y-(-6)=-1(x-6)\Rightarrow y=-x$$

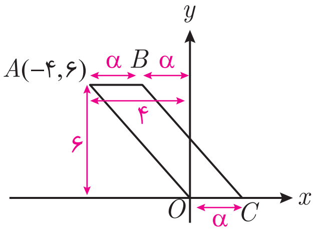
بنابراین مختصات نقطهٔ $H$ برابر است با:

$$\begin{cases}y-x+6=0\\y=-x\end{cases}\Rightarrow-2x+6=0\Rightarrow x=3\Rightarrow y=-3\Rightarrow H(3,-3)$$

**۵.** گزینه ۲ با توجه به این‌که نقطهٔ $C$ روی محور $x$ها و نقطهٔ $M$ روی محور $y$ها است، فرض می‌کنیم $C(\alpha,0)$ و $M(0,\beta)$ باشد. با توجه به مختصات رأس $A$، ارتفاع متوازی‌الاضلاع برابر ۶ است. چون $M$ وسط $BC$ است داریم:




$$M=\frac{B+C}{2}\Rightarrow(0,\beta)=\frac{B+(\alpha,0)}{2}\Rightarrow(0,2\beta)=B+(\alpha,0)\Rightarrow B(-\alpha,2\beta)$$



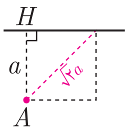

می دانیـــم در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو برابرند. با توجه به مختصات نقاط $A$ و $B$، اندازه‌ها به صورت مقابل هستند و داریم:

$$۲\alpha = ۴ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$S = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

**۶.** گزینه ۲ مختصات رأس $A$ در معادلهٔ خط $y = x + ۲$ صدق نمی‌کند. پس وضعیت قرارگیری آن‌ها به صورت مقابل است:

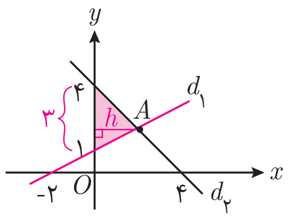



فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از خط $y - x - ۲ = ۰$ برابر طول ضلع مربع است، پس:

$$AH = a = \frac{|-۱ - ۳ - ۲|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}}$$

طول قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع آن است، پس طول قطر مربع برابر $۶ = \sqrt{۲} \times \frac{۶}{\sqrt{۲}}$ است.

**۷.** گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را می‌نویسیم. طول از مبدأ و عرض از مبدأ هر دو خط را داریم. پس:




$$d_۱ : \frac{x}{-۲} + \frac{y}{۱} = ۱ \Rightarrow x - ۲y = -۲$$

$$d_۲ : \frac{x}{۴} + \frac{y}{۴} = ۱ \Rightarrow x + y = ۴$$

حال از تلاقی دو خط $d_۱$ و $d_۲$ مختصات نقطهٔ $A$ را به دســـت می‌آوریم. طول نقطهٔ $A$ برابر ارتفاع مثلث رنگی است:

$$\begin{cases} x - ۲y = -۲ \\ x + y = ۴ \end{cases} \xRightarrow{(-)} -۳y = -۶ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow h = ۲$$

بنابراین مساحت مثلث رنگی برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۲ = ۳$$

**۸.** گزینه ۴ ابتدا ضرایب $x$ و $y$ را در دو خط موازی یکسان می‌کنیم:

$$\begin{cases} y - ۲x + ۲ = ۰ \\ ۲x + my - ۱۲ = ۰ \xRightarrow{\times(-۱)} -my - ۲x + ۱۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|۲ - ۱۲|}{\sqrt{۱^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۰\sqrt{۵}}{۵} = ۲\sqrt{۵}$$

**۹.** گزینه ۲ فرض می‌کنیم $C(x,y)$ باشد. پس:

$$۵ = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & ۲ \\ x & y \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} \Rightarrow ۵ = \frac{۱}{۲}|(۴ - ۲y - x) - (۲y + ۲x + ۲)| \Rightarrow ۱۰ = |-۴y - ۳x + ۲|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۴y - ۳x + ۲ = ۱۰ \Rightarrow -۴y - ۳x - ۸ = ۰ \Rightarrow ۴y + ۳x + ۸ = ۰ \\ -۴y - ۳x + ۲ = -۱۰ \Rightarrow -۴y - ۳x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۴y + ۳x - ۱۲ = ۰ \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید $۴y + ۳x - ۱۲ = ۰$ در گزینه‌ها وجود دارد.

**۱۰.** گزینه ۴ چون $O$ وسط وتر $BC$ است پس $AO$ میانهٔ وارد بر وتر مثلث $ABC$ است. طول $AO$ را به‌دست می‌آوریم:

$$AO = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است. پس $BC = ۲ \times ۵ = ۱۰$ می‌باشد.

**۱.** گزینه ۱ چون دو ریشهٔ معادله مختلف‌العلامت هستند، پس $P=\frac{c}{a}<\circ$ است:

$$\frac{c}{a}<\circ \Rightarrow \frac{m^{۲}-۴}{۱-m}<\circ \Rightarrow$$

| $m$ | | -۲ | | ۱ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عبارت | + | ۰ | - | | + | ۰ | - |

$$\Rightarrow (-۲,۱)\cup(۲,+\infty)$$

**۲.** گزینه ۴ فرض می‌کنیم $\alpha$ و $\beta$ ریشــه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}-۳x-۱=\circ$ هستند. باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌اش $\frac{۱}{\alpha}-۱$ و $\frac{۱}{\beta}-۱$ باشند. بنابراین داریم:

$$۲x^{۲}-۳x-۱=-\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{-۳}{۲}\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$

حال باید $S$ و $P$ معادلهٔ جدید را به‌دست آوریم:

$$S=\frac{۱}{\alpha}-۱+\frac{۱}{\beta}-۱=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}-۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}-۲=-۳-۲=-۵$$

$$P=(\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha\beta}-(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})+۱=\frac{۱}{\alpha\beta}-(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})+۱=\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}}-(\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}})+۱=-۲-(-۳)+۱=۲$$

بنابراین معادلهٔ جدید به صورت زیر است:

$$x^{۲}-Sx+P=\circ\Rightarrow x^{۲}-(-۵)x+۲=\circ\Rightarrow x^{۲}+۵x+۲=\circ$$

**۳.** گزینه ۳ رابطهٔ $x_۱^{۲}x_۲+x_۱x_۲^{۲}$ رابطه‌ای متقارن بر حسب $x_۱$ و $x_۲$ (ریشه‌های معادله) است پس می‌توان آن را بر حسب $S$ و $P$ نوشت:

$$x_۱^{۲}x_۲+x_۱x_۲^{۲}=x_۱x_۲(x_۱+x_۲)=PS$$

پس باید $PS<\circ$ باشد. لذا داریم:

$$PS<\circ\Rightarrow(\frac{a-۳}{۱})(-\frac{۲-a}{۱})<\circ\Rightarrow(a-۳)(a-۲)<\circ\Rightarrow ۲<a<۳$$

**۴.** گزینه ۲ ابتدا فرض می کنیم $x^{۲}=t$ اسـت، پس معادلهٔ داده‌شـده به معادلهٔ درجهٔ دوم $t^{۲}-(m+۲)t+m+۵=\circ$ تبدیل می‌شـود. بـرای ایـن کـه معادلـهٔ $x^{۴}-(m+۲)x^{۲}+m+۵=\circ$ دارای ۴ ریشـهٔ حقیقی متمایـز باشـد بایـد معادلـهٔ $t^{۲}-(m+۲)t+m+۵=\circ$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت داشته باشد. پس:

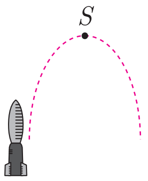
$$\Delta>\circ\Rightarrow(-(m+۲))^{۲}-۴(۱)(m+۵)>\circ\Rightarrow m^{۲}+۴m+۴-۴m-۲۰>\circ\Rightarrow m^{۲}-۱۶>\circ\Rightarrow m>۴ \text{ یا } m<-۴$$

$$S>\circ\Rightarrow-\frac{-(m+۲)}{۱}>\circ\Rightarrow m+۲>\circ\Rightarrow m>-۲$$

$$P>\circ\Rightarrow\frac{m+۵}{۱}>\circ\Rightarrow m>-۵$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده برای $m$، مقادیر قابل قبول $m>۴$ می‌باشد.

**۵.** گزینه ۴ با توجه به معادلهٔ $h(t)=۱۰۰t-۵t^{۲}$ درمی‌یابیم که مسیر حرکت راکت یک سهمی رو به پایین است. بنابراین ارتفاع نقطهٔ اوج راکت همان $y$ رأس سهمی می‌باشد. پس:




$$y_S=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-((۱۰۰)^{۲}-۴(-۵)(\circ))}{۴(-۵)}=\frac{۱۰۰۰۰}{۲۰}=۵۰۰$$

**۶.** گزینه ۱ چون $x=۲$ محور تقارن سهمی است پس طول رأس سهمی برابر ۲- می‌باشد. بنابراین داریم:

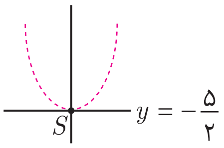
$$-۲=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow -۲=-\frac{۱}{۲(a-۱)}\Rightarrow ۴(a-۱)=۱\Rightarrow a-۱=\frac{۱}{۴}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{۱}{۴}x^۲+x-۳$ می‌باشد. حال ریشه‌های سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۴}x^۲+x-۳=۰\Rightarrow x^۲+۴x-۱۲=۰\Rightarrow (x+۶)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۶\\x=۲\end{cases}$$

بنابراین سهمی محور $x$ها را با طول مثبت ۲ قطع می‌کند.

**۷.** گزینه ۴ تابـع به معادلهٔ $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+a$ معادلهٔ یک سـهمی اسـت. چون خط $y=-\frac{۵}{۲}$، محور تقارن سهمی را روی خود سهمی قطع می‌کند، پس این نقطه، رأس سهمی است. بنابراین عرض رأس سهمی برابر $-\frac{۵}{۲}$ است:




$$-\frac{۵}{۲}=\frac{-\Delta}{۴a}\Rightarrow -\frac{۵}{۲}=\frac{-\left(۹-۴(\frac{۱}{۲})(a)\right)}{۴(\frac{۱}{۲})}\Rightarrow -\frac{۵}{۲}=\frac{-۹+۲a}{۲}\Rightarrow -۹+۲a=-۵\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

**۸.** گزینه ۴ منحنی $y=(m-۲)x^۲-۲(m+۱)x+۱۲$ یک سهمی است. چون محور $x$ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند پس داریم:

$$\Delta>۰\Rightarrow (-۲(m+۱))^۲-۴(m-۲)(۱۲)>۰\Rightarrow ۴m^۲+۸m+۴-۴۸m+۹۶>۰\Rightarrow m^۲-۱۰m+۲۵>۰$$

$$\Rightarrow (m-۵)^۲>۰\Rightarrow m\neq ۵$$

$$S<۰\Rightarrow -\frac{-۲(m+۱)}{m-۲}<۰\Rightarrow \frac{۲(m+۱)}{m-۲}<۰\Rightarrow -۱<m<۲$$

$$P>۰\Rightarrow \frac{۱۲}{m-۲}>۰\Rightarrow m-۲>۰\Rightarrow m>۲$$

اشتراک مقادیر به‌دست آمده برای $m$ تهی است، پس هیچ مقداری برای $m$ وجود ندارد.

**۹.** گزینه ۴ می‌دانیم ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند. پس با قرار دادن $x=۴$ در معادله مقدار $a$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۴+a=\sqrt{۵(۴)-۴^۲}\Rightarrow ۴+a=\sqrt{۲۰-۱۶}\Rightarrow ۴+a=\sqrt{۴}\Rightarrow ۴+a=۲\Rightarrow a=-۲$$

حال معادلهٔ $x-۲=\sqrt{۵x-x^۲}$ را حل می‌کنیم:

$$x-۲=\sqrt{۵x-x^۲}\Rightarrow (x-۲)^۲=۵x-x^۲\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۵x-x^۲\Rightarrow ۲x^۲-۹x+۴=۰$$

$$\Delta=۸۱-۴(۲)(۴)=۴۹\Rightarrow x=\frac{۹\pm ۷}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=۴\\x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$x=\frac{۱}{۲}$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم تا ببینیم در معادله صدق می‌کند یا خیر. به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ سمت چپ تساوی منفی می‌شود پس معادله به جز $x=۴$ ریشهٔ دیگری ندارد.

توجه کنید که می‌توانستیم بعد از به‌دســت آوردن مقدار $a$، گزینه‌ها را در معادله جای‌گذاری کنیم تا ببینیم می‌توانند ریشهٔ دیگر معادله باشند یا خیر.

۱۰. گزینه ۱ طرفین معادله را در $(x-۴)$ ضرب می‌کنیم:

$$x(x-۴)+۲x-۱=-۲(x-۴)\Rightarrow x^۲-۴x+۲x-۱=-۲x+۸\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm ۳$$

و $x=۳$ و $x=-۳$ مخرج کسر $\frac{۲x-۱}{x-۴}$ را صفر نمی‌کنند. پس هر دو قابل قبول هستند. یعنی معادله دارای دو ریشهٔ قرینه است.

## پاسخنامه آزمون ۵ معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ دو

۱. گزینه ۲ چون مجموع دو ریشهٔ معادله $\frac{۱}{۶}$ است یعنی $-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{۱}{۶}\Rightarrow -\frac{m+۱}{۶}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow -(m+۱)=۱\Rightarrow m+۱=-۱\Rightarrow m=-۲$$

حال به ازای $m=-۲$ معادله به صورت $۶x^۲-x-۲=۰$ می‌شود و داریم:

$$\Delta=(-۱)^۲-۴(۶)(-۲)=۴۹\Rightarrow \alpha,\beta=\frac{۱\pm ۷}{۱۲}\Rightarrow \alpha=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\quad,\quad \beta=\frac{-۶}{۱۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۲. گزینه ۴ اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲-(m+۱)x+\frac{۱}{۸}=۰$ باشند، با توجه به این‌که در صورت سؤال گفته شده $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲$ است داریم:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲=۴\Rightarrow \alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=۴\quad (*)$$

حال $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را از معادلهٔ $۲x^۲-(m+۱)x+\frac{۱}{۸}=۰$ به دست آورده و در رابطهٔ $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{-(-(m+۱))}{۲}\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{m+۱}{۲}\quad,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\frac{۱}{۸}}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

با جای‌گذاری $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ در رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$\frac{m+۱}{۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=۴\Rightarrow \frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۴\Rightarrow \frac{m+۲}{۲}=۴\Rightarrow m+۲=۸\Rightarrow m=۶$$

۳. گزینه ۲ فرض می‌کنیم $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ باشند. پس: $\alpha+\beta=-\frac{۷}{۳},\alpha\beta=\frac{۱}{۳}$

حال باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha+۱$ و $\beta+۱$ باشند. بنابراین $S$ و $P$ معادلهٔ جدید را به دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+۱+\beta+۱=\alpha+\beta+۲=-\frac{۷}{۳}+۲=-\frac{۱}{۳}$$

$$P=(\alpha+۱)(\beta+۱)=\alpha\beta+\alpha+\beta+۱=\frac{۱}{۳}+(-\frac{۷}{۳})+۱=-۱$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب به صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-(-\frac{۱}{۳})x+(-۱)=۰\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۳}x-۱=۰$$

با مقایسهٔ معادلهٔ $x^۲+\frac{۱}{۳}x-۱=۰$ با معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ مقدار $b=-۱$ است.

۴. گزینه ۱ با فرض $x^۲=t$ معادلهٔ $x^۴+۱۰x^۲+۹=۰$ به معادلهٔ درجهٔ دوم $t^۲+۱۰t+۹=۰$ تبدیل می‌شود. حال ریشه‌های معادلهٔ $t^۲+۱۰t+۹=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$t^۲+۱۰t+۹=۰\Rightarrow (t+۱)(t+۹)=۰\Rightarrow t=-۱,t=-۹$$

چون هر دو مقدار $t$ منفی شده است، پس هیچ جوابی برای $x$ پیدا نمی‌شود.

**۵.** گزینه ۱ ابتدا معادلهٔ $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ را ساده‌تر می‌کنیم تا شاید بتوانیم از دِل آن یک معادلهٔ درجه دوم استخراج کنیم:

$$x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4 \to x^3+ax^2-x^2+4x-ax-4=0 \Rightarrow \underbrace{x^3-x^2}+\underbrace{ax^2-ax}+\underbrace{4x-4}=0$$

$$\xRightarrow{\text{فاکتورگیری}} x^2(x-1)+ax(x-1)+4(x-1)=0 \xRightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{از }(x-1)} (x-1)(x^2+ax+4)=0$$

واضح است که یک ریشهٔ معادله $x=1$ است. برای آن که معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز باشد باید معادلهٔ $x^2+ax+4=0$ نیز دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت داشته باشد. پس:

$$\Delta>0 \Rightarrow a^2-4(1)(4)>0 \Rightarrow a^2>16 \Rightarrow a>4 \text{ یا } a<-4$$

$$P>0 \Rightarrow \frac{4}{1}>0 \Rightarrow 4>0$$

$$S>0 \Rightarrow \frac{-a}{1}>0 \Rightarrow a<0$$

اشـــتراک مقادیر به‌دست آمده برای $a$ برابر $a<-4$ است، دقت کنید فقط $x=1$ نباید ریشهٔ معادلهٔ $x^2+ax+4=0$ باشد، چون جواب‌های معادله باید متمایز باشند:

$$x=1 \Rightarrow (1)^2+a(1)+4\neq 0 \Rightarrow a\neq -5$$

بنابراین مقادیر $a$ به صورت $(-\infty,-4)-\{-5\}$ می‌باشد.

**۶.** گزینه ۳ منحنی $y=2x^2-4x+m-3$ یک سهمی است. چون محور $x$ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع می‌کند. پس در معادلهٔ $2x^2-4x+m-3=0$ باید $\Delta>0$، $P>0$ و $S>0$ باشد پس:

$$\Delta>0 \Rightarrow 16-4(2)(m-3)>0 \xRightarrow{(\div 8)} 2-(m-3)>0 \Rightarrow m-3<2 \Rightarrow m<5$$

$$P>0 \Rightarrow \frac{m-3}{2}>0 \Rightarrow m-3>0 \Rightarrow m>3$$

$$S>0 \Rightarrow -\frac{-4}{2}>0 \Rightarrow 2>0$$

اشتراک مقادیر به‌دست آمده برای $m$ به صورت $3<m<5$ می‌باشد.

**۷.** گزینه ۴ **روش اول:** چون خط $x=1$ محور تقارن سـهمی و یکی از ریشـه‌ها $x=-1$ که دو واحد کم‌تر از ۱ اسـت پس ریشـهٔ دیگر دو واحد بیش‌تر از یک بوده و برابر $x=3$ می‌باشد. حال چون $b$ را می‌خواهیم کافی است حاصل‌ضرب ریشه‌ها یعنی $P$ را به دست آوریم:

$$P=\frac{c}{a} \Rightarrow -1\times 3=\frac{b}{-2} \Rightarrow -3=\frac{b}{-2} \Rightarrow b=6$$

**روش دوم:** با توجه به شکل یک ریشهٔ سهمی $x=-1$ است، پس $x=-1$ در معادلهٔ $-2x^2+ax+b=0$ صدق می‌کند:

$$-2(-1)^2+a(-1)+b=0 \Rightarrow -a+b=2$$

از طرفی طول رأس سهمی برابر ۱ است. پس:

$$1=-\frac{\text{ضریب } x}{2(\text{ضریب } x^2)} \Rightarrow 1=-\frac{a}{2(-2)} \Rightarrow a=4$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-a+b=2\\ a=4\end{cases} \Rightarrow b=6$$

**۸.** گزینه ۱ طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$3x+4=\sqrt{x^2+6} \Rightarrow (3x+4)^2=x^2+6 \Rightarrow 9x^2+24x+16=x^2+6 \Rightarrow 8x^2+24x+10=0$$

$$\Delta=(24)^2-4(8)(10)=576-320=256 \Rightarrow x=\frac{-24\pm 16}{16} \Rightarrow x=-\frac{8}{16}=-\frac{1}{2}\ ,\ x=\frac{-40}{16}=-\frac{5}{2}$$

با قرار دادن $x=-\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{5}{2}$ در معادله داریم:

$$x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۳}{۲}+۴=\sqrt{\frac{۱}{۴}+۶}\Rightarrow \frac{۵}{۲}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}$$

$x=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow \underbrace{-\frac{۱۵}{۲}}_{\text{منفی}}+۴=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}+۶}\Rightarrow$ غیرقابل قبول است. $x=-\frac{۵}{۲}$

بنابراین معادله دارای یک جواب منفی است.

**۹.** گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ $(x^۲-\frac{۴}{x^۲})(\frac{x}{۳x+۲})=\frac{x^۲+۲}{x}$ را ساده‌تر کنیم:

$$(x^۲-\frac{۴}{x^۲})(\frac{x}{۳x+۲})=\frac{x^۲+۲}{x}\Rightarrow (x-\frac{۲}{x})(x+\frac{۲}{x})(\frac{x}{۳x+۲})=\underbrace{\frac{x^۲}{x}+\frac{۲}{x}}_{x+\frac{۲}{x}}\Rightarrow (x-\frac{۲}{x})(\frac{x}{۳x+۲})=۱$$

حال طرفین معادله را در $x(۳x+۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x^۲-۲)(\cancel{x})=\cancel{x}(۳x+۲)\Rightarrow x^۲-۲=۳x+۲\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۴,x=-۱$$

هر دو ریشه، مخرج هیچ‌کدام از کسرها را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول هستند. پس مجموع ریشه‌ها برابر $۴+(-۱)=۳$ است.

**۱۰.** گزینه ۲ مقدار محصول برداشتی برابر حاصل‌ضرب تعداد بوته‌ها در میانگین محصول هر بوته است. از طرفی گفته شده اگر $x$ بوته اضافه شود، به ازای هر بوته $\frac{۱}{۸}$ کیلو از میانگین محصول بوته‌ها کاسته می‌شود پس در این حالت تعداد بوته‌ها $۴۰+x$ و میانگین $(۸-\frac{۱}{۸}x)$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\text{کل محصول}=(۴۰+x)(۸-\frac{x}{۸})=۳۲۰-۵x+۸x-\frac{۱}{۸}x^۲=-\frac{۱}{۸}x^۲+۳x+۳۲۰$$

همان‌طور که می‌بینید معادلهٔ به‌دست آمده مربوط به یک سهمی رو به پایین است. پس بیش‌ترین مقدار که همان عرض رأس سهمی می‌باشد برابر است با:

$$\text{بیش‌ترین محصول}=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-\left(۹-۴(-\frac{۱}{۸})(۳۲۰)\right)}{۴(-\frac{۱}{۸})}=\frac{-۱۶۹}{-\frac{۱}{۲}}=۳۳۸$$

## پاسخنامه آزمون ۶ معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ دو

**۱.** گزینه ۱ اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ باشند، طبق فرض سؤال $\alpha^۲+\beta^۲=۶$ است. چون $\alpha^۲+\beta^۲$ رابطه‌ای متقارن برحسب ریشه‌های معادله است پس می‌توان آن را برحسب $S$ و $P$ نوشت:

$$\alpha^۲+\beta^۲=۶\Rightarrow (\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۶\Rightarrow S^۲-۲P=۶$$

حال از معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ مقادیر $S$ و $P$ را به‌دست می‌آوریم و در $S^۲-۲P=۶$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S=-\frac{-(m+۳)}{m}=\frac{m+۳}{m}\quad,\quad P=\frac{۵}{m}\xRightarrow{S^۲-۲P=۶}\left(\frac{m+۳}{m}\right)^۲-۲(\frac{۵}{m})=۶$$

$$\Rightarrow \frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}=۶\xRightarrow{(\times m^۲)}m^۲+۶m+۹-۱۰m=۶m^۲\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰$$

چون مجموع ضرایب معادله $۵m^۲+۴m-۹=۰$ برابر صفر است، پس یک ریشه ۱ و دیگری $\frac{c}{a}=-\frac{۹}{۵}$ است. حال باید بررسی کنیم که آیا به ازای $m=۱$ و $m=-\frac{۹}{۵}$ معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ دارای دو ریشه است یا خیر:

$m=۱\Rightarrow x^۲-۴x+۵=۰\Rightarrow \Delta=۱۶-۴(۱)(۵)<۰\Rightarrow$ معادله ریشه ندارد.

با توجه به گزینه‌ها $m=-\frac{۹}{۵}$ حتماً جواب سؤال است.

**۲.** گزینه ۲ در معادله با ضرایب گویا اگر یک ریشه $m+\sqrt{n}$ باشد، ریشهٔ دیگر $m-\sqrt{n}$ است. با توجه به گزینه‌ها می‌بینیم که ضرایب تمام معادلات، گویا هستند پس ریشهٔ دیگر معادله حتماً $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$ است و داریم:

$$\begin{aligned} S&=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}=۲\\ P&=(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲})=(\frac{۴-۳}{۴})=\frac{۱}{۴}\end{aligned} \Rightarrow x^{۲}-۲x+\frac{۱}{۴}=۰$$

**۳.** گزینه ۲ ابتدا مقادیر $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را در معادلهٔ $x(۵x+۳)=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$x(۵x+۳)=۲\Rightarrow ۵x^{۲}+۳x-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{۳}{۵}\\ \alpha\beta=\frac{-۲}{۵}\end{cases}$$

حال $S$ و $P$ را در معادله‌ای که ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha^{۲}}$ و $\frac{۱}{\beta^{۲}}$ است به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}=\frac{\beta^{۲}+\alpha^{۲}}{\alpha^{۲}\beta^{۲}}=\frac{(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^{۲}}=\frac{(-\frac{۳}{۵})^{۲}-۲(-\frac{۲}{۵})}{(-\frac{۲}{۵})^{۲}}=\frac{\frac{۹}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{\frac{۲۹}{۲۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۹}{۴}$$

$$P=\frac{۱}{\alpha^{۲}}\times\frac{۱}{\beta^{۲}}=\frac{۱}{\alpha^{۲}\beta^{۲}}=\frac{۱}{(\alpha\beta)^{۲}}=\frac{۱}{(-\frac{۲}{۵})^{۲}}=\frac{۱}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۵}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب به صورت $x^{۲}-\frac{۲۹}{۴}x+\frac{۲۵}{۴}=۰$ است. با مقایسه با معادلهٔ $۴x^{۲}-kx+۲۵=۰$، کافی است طرفین معادله را در ۴ ضرب کنیم:

$$x^{۲}-\frac{۲۹}{۴}x+\frac{۲۵}{۴}=۰\xRightarrow{(\times ۴)}۴x^{۲}-۲۹x+۲۵=۰\xRightarrow{۴x^{۲}-kx+۲۵=۰}k=۲۹$$

**۴.** گزینه ۳ ابتدا معادله را برحسب $\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x}$ مرتب می‌کنیم:

$$\frac{۹}{x^{۲}}+\frac{x^{۲}}{۴}+۶(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x})+۶=۰\Rightarrow(-\frac{۳}{x})^{۲}+(\frac{x}{۲})^{۲}+۶(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x})+۶=۰$$

$$\Rightarrow(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x})^{۲}+۲(\frac{x}{۲})(\frac{۳}{x})+۶(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x})+۶=۰\Rightarrow(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x})^{۲}+۳+۶(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x})+۶=۰$$

با فرض $\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x}=t$ معادله به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود:

$$t^{۲}+۳+۶t+۶=۰\Rightarrow t^{۲}+۶t+۹=۰\Rightarrow(t+۳)^{۲}=۰\Rightarrow t=-۳$$

بنابراین $\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x}=-۳$ است، پس داریم:

$$\frac{x}{۲}-\frac{۳}{x}=-۳\xRightarrow{(\times ۲x)}x^{۲}-۶=-۶x\Rightarrow x^{۲}+۶x-۶=۰\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=-۶$$

**۵.** گزینه ۴ برای آن‌که یک سهمی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات بگذرد باید یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی داشته باشد. برای این منظور کافی است $\frac{c}{a}<۰$ باشد، پس:

$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{m-۲}{۱-m}<۰\Rightarrow m<۱$ یا $m>۲\Rightarrow$ بی‌شمار مقدار صحیح برای $m$ وجود دارد.

دقت کنید در این حالت نیازی به بررسی مثبت بودن $\Delta$ نیست، چون $a$ و $c$ مختلف‌العلامت هستند، قطعاً $\Delta>۰$ است.

۶. گزینه ۲ تابع $f(x)$ یک تابع درجهٔ دوم است. بیش‌ترین مقدار تابع همان عرض رأس سهمی می‌باشد. پس:

$$y_S=\frac{-\Delta}{4a}\Rightarrow 0=\frac{-(16-4(k+3)(k))}{4(k+3)}\Rightarrow 16-4(k^2+3k)=0\xRightarrow{(\div 4)}4-(k^2+3k)=0$$

$$\Rightarrow k^2+3k-4=0\Rightarrow (k+4)(k-1)=0\Rightarrow\begin{cases}k=-4\\k=1\end{cases}$$

$k=1$ غیرقابل قبول است زیرا به ازای $k=1$ ضریب $x^2$ بزرگ‌تر از صفر می‌شود و سهمی رو به بالا خواهد بود که دارای بیش‌ترین مقدار نخواهد بود.

۷. گزینه ۲ چون سهمی رو به پایین است پس باید ضریب $x^2$ منفی باشد. پس گزینهٔ «۴» نادرست است. از طرفی طول رأس سهمی منفی است، پس $-\frac{b}{2a}$ باید منفی باشد که در گزینهٔ «۱» این چنین نیست، زیرا طول رأس سهمی $y=-2x^2+4x-2$ برابر $x_S=-\frac{4}{2(-2)}=1$ است. چون سهمی بر محور $x$ها مماس است باید $\Delta=0$ باشد. بنابراین $\Delta$ سهمی‌های گزینه‌های «۲» و «۳» را چک می‌کنیم:

۲) $y=-2x^2-4x-2\Rightarrow\Delta=16-4(-2)(-2)=16-16=0$

۳) $y=-x^2-2x-2\Rightarrow\Delta=4-4(-1)(-2)=4-8=-4$

بنابراین گزینهٔ «۲» صحیح است.

۸. گزینه ۳ $x=2$ و $x=-3$ ریشه‌های سهمی $y=\frac{1}{2}(x-2)(x+3)$ هستند. پس:

$$x=x_S=\frac{2+(-3)}{2}=-\frac{1}{2}$$

۹. گزینه ۳ ابتدا جواب معادلهٔ $\sqrt{4x+5}=x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{4x+5}=x\xRightarrow{\text{توان ۲}}4x+5=x^2\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow(x-5)(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=5\\x=-1\end{cases}$$

$x=-1$ سمت راست تساوی را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست. بنابراین جواب معادله $x=5$ است. حال چون گفته شده $x=5$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2-(m+2)x+4m=0$ است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$25-(m+2)(5)+4m=0\Rightarrow 25-5m-10+4m=0\Rightarrow m=15$$

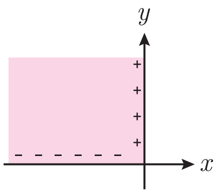
۱۰. گزینه ۲ اگر کارگر $x$ قطعهٔ اضافه تحویل دهد یعنی $(80+x)$ قطعه تحویل دهد، $5x$ تومان از دستمزد هر قطعهٔ تحویلی توسط وی کم می‌شود یعنی دستمزد هر قطعه $(450-5x)$ خواهد شد. بنابراین میزان دستمزد کارگر برابر است با:

$$\text{دستمزد}=(80+x)(450-5x)=36000-400x+450x-5x^2=-5x^2+50x+36000$$

بنابراین تابع دستمزد کارگر یک تابع درجهٔ دوم است. بیش‌ترین مقدار تابع همان عرض رأس سهمی است. پس:

$$\text{بیش‌ترین دستمزد}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{50^2-4(-5)(36000)}{4(-5)}=-\frac{2500+720000}{-20}=\frac{722500}{20}=36125$$

**۱.** **گزینه ۱** بـرای آن که خط $y=mx+m-۳$ از ناحیهٔ دوم نگـذرد، باید طول از مبدأ خط منفی و عرض از مبدأ آن مثبت نباشد. ابتدا طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط را به‌دست می‌آوریم:



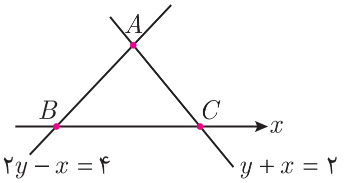

$$y=mx+m-۳\xRightarrow[y=۰]{\text{طول از مبدأ}}۰=mx+m-۳\Rightarrow x=\frac{۳-m}{m}$$

$$y=mx+m-۳\xRightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}}y=m(۰)+m-۳\Rightarrow y=m-۳$$

حال باید $\frac{۳-m}{m}\geq ۰$ و $m-۳\leq ۰$ باشند پس:

$$\begin{cases}\frac{۳-m}{m}\geq ۰\Rightarrow ۰\leq m\leq ۳\\ m-۳\leq ۰\Rightarrow m\leq ۳\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}}۰\leq m\leq ۳$$

**۲.** **گزینه ۲** بـا توجه به شـکل مقابـل، باید نقـاط $A$، $B$ و $C$ را پیدا کنیـم. می‌دانیم معادلهٔ محور $x$ها برابر $y=۰$ می‌باشد. پس:




$$\begin{cases}y+x=۲\\ ۲y-x=۴\end{cases}\xRightarrow{(+)}۳y=۶\Rightarrow y=۲\Rightarrow x=۰\Rightarrow A(۰,۲)$$

$$\begin{cases}y+x=۲\\ y=۰\end{cases}\Rightarrow x=۲\Rightarrow C(۲,۰)\quad,\quad\begin{cases}۲y-x=۴\\ y=۰\end{cases}\Rightarrow x=-۴\Rightarrow B(-۴,۰)$$

بنابراین مساحت مثلث $ABC$ برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۰ & ۲\\ ۲ & ۰\\ -۴ & ۰\\ ۰ & ۲\end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|(۰+۰-۸)-(۰+۰+۴)|=\frac{۱}{۲}|-۱۲|=۶$$

**۳.** **گزینه ۳** عمودمنصف پاره‌خط $AB$، در وسـط پاره‌خط بر آن عمود اسـت. پس اولاً مختصات وسـط پاره‌خط $AB$ در معادلهٔ عمودمنصف صدق می‌کند. ثانیاً شیب عمودمنصف، قرینه و عکس شیب پاره‌خط $AB$ است:

$$M=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow M(\frac{x_۰-۱}{۲},\frac{y_۰+۲}{۲})\xRightarrow{\text{جای‌گذاری}}\frac{x_۰-۱}{۲}-(\frac{y_۰+۲}{۲})+۵=۰\Rightarrow x_۰-y_۰+۷=۰$$

$$\begin{cases}m_{AB}=\frac{۲-y_۰}{-۱-x_۰}\\ m_{\text{عمودمنصف}}=۱\end{cases}\Rightarrow\frac{۲-y_۰}{-۱-x_۰}\times۱=-۱\Rightarrow ۲-y_۰=۱+x_۰\Rightarrow x_۰+y_۰=۱$$

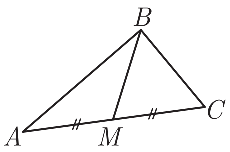
حال کافی است دو تساوی اخیر را در یک دستگاه حل کنیم تا نقطهٔ $B$ معلوم شود:

$$\begin{cases}x_۰-y_۰=-۷\\ x_۰+y_۰=۱\end{cases}\Rightarrow ۲x_۰=-۶\Rightarrow x_۰=-۳\,,\,y_۰=۴\Rightarrow B(-۳,۴)$$

فاصلهٔ نقطهٔ $B$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OB=\sqrt{(-۳)^۲+۴^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

**۴.** **گزینه ۴** با توجه به شکل مقابل، $M$ وسط ضلع $AC$ است. پس:




$$M=\frac{A+C}{۲}=(\frac{۳+۱}{۲},\frac{۵-۱}{۲})=(۲,۲)$$

حال معادله خط گذرا از دو نقطهٔ $B(-۲,۱)$ و $M(۲,۲)$ را می‌نویسیم:

$$m_{BM}=\frac{۱-۲}{-۲-۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow y-۲=\frac{۱}{۴}(x-۲)\xRightarrow{(\times۴)}۴y-۸=x-۲\Rightarrow ۴y=x+۶$$

۵. گزینه ۳ اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+ax+۹=۰$ باشند، آن‌گاه طبق فرض مسأله $\alpha=۲\beta$ است.

$$\alpha\beta=\frac{۹}{۲}\xRightarrow{\alpha=۲\beta}۲\beta\times\beta=\frac{۹}{۲}\Rightarrow\beta^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\beta=\pm\frac{۳}{۲}\xRightarrow{\text{ریشهٔ مثبت}}\beta=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\alpha=۲\times\frac{۳}{۲}=۳$$

بنابراین مجموع ریشه‌های مثبت این معادله $۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$ است.

۶. گزینه ۲ ابتدا در معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۴=۰$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$(۲\alpha-۱)+(۲\beta-۱)=-\frac{-۳}{۲}\Rightarrow ۲\alpha+۲\beta=\frac{۷}{۲}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۷}{۴}$$

$$(۲\alpha-۱)(۲\beta-۱)=\frac{-۴}{۲}=-۲\Rightarrow ۴\alpha\beta-۲(\alpha+\beta)+۱=-۲\xRightarrow{\alpha+\beta=\frac{۷}{۴}}\alpha\beta=\frac{۱}{۸}$$

حال باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha}+۱$ و $\frac{۱}{\beta}+۱$ باشند. پس $S$ و $P$ این معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۱}{۸}}+۲=۱۴+۲=۱۶$$

$$P=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱}{\frac{۱}{۸}}+\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۱}{۸}}+۱=۸+۱۴+۱=۲۳$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر به صورت $x^۲-۱۶x+۲۳=۰$ است.

۷. گزینه ۴ ابتدا معادلهٔ $(x^۲-۴x)^۲-۲x^۲+۸x-۱۵=۰$ را به صورت $(x^۲-۴x)^۲-۲(x^۲-۴x)-۱۵=۰$ بازنویسی می‌کنیم. حال با فرض $x^۲-۴x=t$ داریم:

$$t^۲-۲t-۱۵=۰\Rightarrow(t-۵)(t+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۵\\t=-۳\end{cases}$$

بنابراین حالات مقابل را داریم:

$$x^۲-۴x=۵\Rightarrow x^۲-۴x-۵=۰\Rightarrow(x-۵)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\x=-۱\end{cases}$$

$$x^۲-۴x=-۳\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=۳\end{cases}$$

مجموع جواب‌های مثبت معادله برابر $۵+۱+۳=۹$ می‌باشد.

۸. گزینه ۲ چون عبارت $\alpha^۳+۵\beta^۲-۲\beta$ رابطه‌ای نامتقارن برحسب ریشه‌های معادله است، پس نمی‌توانیم آن را برحسب $S$ و $P$ بنویسیم. با توجه به این عبارت و خود معادله، کافی است $\beta$ را در معادله $x^۲-۵x+۲=۰$ جایگذاری کنیم، در این صورت $\beta^۲-۵\beta+۲=۰$ خواهد بود. پس داریم:

$$\beta^۲-۵\beta+۲=۰\Rightarrow\beta^۲=۵\beta-۲\xRightarrow{(\times\beta)}\beta^۳=۵\beta^۲-۲\beta$$

بنابراین عبارت $\alpha^۳+۵\beta^۲-۲\beta$ به رابطهٔ متقارن $\alpha^۳+\beta^۳$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS=(۵)^۳-۳(۲)(۵)=۹۵$$

۹. گزینه ۴ ریشه‌های سهمی $x=-۱$ و $x=۲$ هستند پس معادلهٔ آن به فرم $y=a(x+۱)(x-۲)$ است. چون سهمی محور $y$ها را با عرض ۴ قطع می‌کند پس نقطهٔ $(۰,۴)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$y=a(x+۱)(x-۲)\Rightarrow ۴=a(۰+۱)(۰-۲)\Rightarrow ۴=-۲a\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=-۲(x+۱)(x-۲)$ یا همان $y=-۲x^۲+۲x+۴$ است.

**۱۰.** گزینه ۴ ابتدا جواب معادلهٔ $\frac{x+5}{x+4}-\frac{x}{x+2}=-1$ را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور طرفین معادله را در $(x+4)(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x+5}{x+4}-\frac{x}{x+2}=-1\Rightarrow(x+5)(x+2)-x(x+4)=-(x+4)(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2+7x+10-x^2-4x=-x^2-6x-8\Rightarrow x^2+9x+18=0\Rightarrow(x+6)(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-6\\x=-3\end{cases}$$

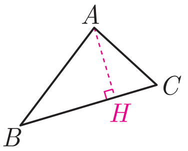
حال جواب معادلهٔ $\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=5$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x-5}=5-\sqrt{x}\xRightarrow{\text{توان ۲}}x-5=25-10\sqrt{x}+x\Rightarrow10\sqrt{x}=30\Rightarrow\sqrt{x}=3\Rightarrow x=9$$

بنابراین جواب بزرگ‌تر معادلهٔ اولی یعنی ۳-، $-\frac{1}{3}$ برابر جواب معادلهٔ دومی یعنی ۹ است.

## پاسخنامه آزمون ۸ جامع ۲

**۱.** گزینه ۳ **روش اول:** با توجه به شکل مقابل، کافی است فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از خط گذرا از نقاط $B$ و $C$ را به دست آوریم، پس ابتدا معادلهٔ خط $BC$ را می‌نویسیم:




$$m_{BC}=\frac{1-3}{0-(-1)}=\frac{-2}{1}=-2\Rightarrow BC:y-1=-2(x-0)\Rightarrow y=-2x+1$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,2)$ را از خط $y=-2x+1$ به دســت می‌آوریم. ابتدا معادلهٔ خط را به صورت $y+2x-1=0$ می‌نویسیم و داریم:

$$AH=\frac{|2+2(1)-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

**روش دوم:** ابتدا مساحت مثلث $ABC$ را به دست می‌آوریم:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\\0&1\\1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|(3-1+0)-(1+0-2)|=\frac{1}{2}|3|=\frac{3}{2}$$

حال طول ضلع $BC$ را به دست می‌آوریم:

$$BC=\sqrt{(-1-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

بنابراین طول ارتفاع $AH$ برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}BC\times AH\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times AH\Rightarrow AH=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

**۲.** گزینه ۴ میانهٔ نظیر رأس $C$ از وسط ضلع $AB$ می‌گذرد. پس مختصات وسط $AB$ در معادلهٔ میانه صدق می‌کند:

$$M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{2m+m+3}{2},\frac{m+m-4}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}m+\frac{3}{2},m-2\right)$$

چون معادلهٔ میانه $y=5$ اســت، پس $m-2=5$ در نتیجه $m=7$ خواهد بود. پس مختصات نقطهٔ $M$ وســط ضلع $AB$ برابر $M(12,5)$ می‌باشد.

**۳.** گزینه ۲ شیب خطی که موازی خط گذرنده بر دو نقطهٔ $B(1,4)$ و $C(-1,5)$ است با شیب خط گذرنده از $B$ و $C$ برابر است. پس:

$$m=m_{BC}=\frac{4-5}{1-(-1)}=\frac{-1}{2}$$

بنابراین معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $A(2,-3)$ با شیب $-\frac{1}{2}$ به صورت زیر است که عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$y-(-3)=-\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow y+3=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-2\xRightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}}y=-2$$

**۴.** گزینه ۴ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3mx+2m+6=0$ معکوس یکدیگرند، پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر ۱ است:

$$\frac{c}{a}=1\Rightarrow\frac{2m+6}{2}=1\Rightarrow 2m+6=2\Rightarrow 2m=-4\Rightarrow m=-2$$

به ازای $m=-2$ معادله به صورت $2x^2-6x+2=0$ می‌شود که مجموع ریشه‌هایش برابر است با:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{2}=3$$

**۵.** گزینه ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^2-2x+3)^2+4x^2-8x=0\Rightarrow(x^2-2x+3)^2+4(x^2-2x)=0\Rightarrow(x^2-2x+3)^2+4(x^2-2x+3)-12=0$$

با فرض $x^2-2x+3=t$ معادله به معادلهٔ درجهٔ دوم $t^2+4t-12=0$ تبدیل می‌شود، پس:

$$t^2+4t-12=0\Rightarrow(t+6)(t-2)=0\Rightarrow t=-6 \text{ یا } t=2$$

حال می‌توان گفت:

$t=-6\Rightarrow x^2-2x+3=-6\Rightarrow x^2-2x+9=0\xRightarrow{\Delta<0}$ این معادله ریشه ندارد.

$t=2\Rightarrow x^2-2x+3=2\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1\Rightarrow$ یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

**۶.** گزینه ۲ تابع $y=ax^2-2\sqrt{2}x+5$ یک سهمی است. چون مینیمم سهمی روی خط $y=1$ است، پس عرض رأس سهمی برابر ۱ می‌باشد:

$$y_s=1\Rightarrow\frac{-\Delta}{4a}=1\Rightarrow\frac{-((-2\sqrt{2})^2-4(a)(5))}{4a}=1\Rightarrow\frac{-(8-20a)}{4a}=1\Rightarrow-8+20a=4a\Rightarrow-8=-16a\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

**۷.** گزینه ۳ ابتدا ریشه‌های سهمی $y=x^2-3x-10$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2-3x-10=0\Rightarrow(x-5)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=5\\x=-2\end{cases}$$

ریشهٔ منفی سهمی $y=x^2-3x-10$ برابر $x=-2$ است، پس اگر سهمی را ۲ واحد به سمت $x$های مثبت انتقال دهیم طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور $x$ها که همان ریشه‌های سهمی هستند غیرمنفی می‌شود.

**۸.** گزینه ۳ با فرض $x+\frac{1}{x}=t$ معادلهٔ $(x+\frac{1}{x})^2-8(x+\frac{1}{x})+16=0$ به معادلهٔ درجهٔ دوم $t^2-8t+16=0$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$t^2-8t+16=0\Rightarrow(t-4)^2=0\Rightarrow t=4$$

چون $m$ ریشهٔ معادلهٔ $(x+\frac{1}{x})^2-8(x+\frac{1}{x})+16=0$ است، پس $m+\frac{1}{m}=4$ می‌باشد. حال داریم:

$$m^3+\frac{1}{m^3}=(m+\frac{1}{m})^3-3\underbrace{m\times\frac{1}{m}}_{1}(m+\frac{1}{m})\Rightarrow m^3+\frac{1}{m^3}=(4)^3-3(4)=64-12=52$$

**۹.** گزینه ۲ طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $3x(x-1)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\frac{6x}{x-1}+\frac{x-1}{3x}=3\Rightarrow 18x^2+(x-1)^2=9x(x-1)\Rightarrow 18x^2+x^2-2x+1=9x^2-9x$$

$$\Rightarrow 10x^2+7x+1=0\xRightarrow{\Delta=49-40=9}x=\frac{-7\pm3}{20}\Rightarrow x=-\frac{1}{5}\quad,\quad x=-\frac{1}{2}$$

ریشهٔ بزرگ‌تر معادله $x=-\frac{1}{5}$ و ریشهٔ کوچک‌تر $x=-\frac{1}{2}$ است، پس داریم:

$$\frac{\text{ریشهٔ بزرگ‌تر}}{\text{ریشهٔ کوچک‌تر}}=\frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

**۱۰.** گزینه ۲ فرض می‌کنیم طول ضلع مربع $x$ باشـد پس مسـاحت آن $x^۲$ و محیط آن $۴x$ است. با توجه به این‌که عدد مساحت از عدد محیط کم‌تر است، پس مقدار فزونی عدد محیط از عدد مساحت به صورت زیر است:

مقدار فزونی $= ۴x - x^۲ = -x^۲ + ۴x$

همان‌طور که می‌بینیم تابع فزونی یک سهمی است، پس بیش‌ترین مقدار آن همان عرض رأس سهمی است:

بیش‌ترین مقدار فزونی $= \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-(۱۶ - ۴(-۱)(۰))}{۴(-۱)} = \frac{-۱۶}{-۴} = ۴$

**یادداشت:**