فصل دوم: احتمال

درس اول: مبانی احتمال

یادآوری:

همان‌گونه که در سال‌های گذشته آموخته‌اید، موضوع احتمال بررسی آزمایش‌های تصادفی است. آزمایش تصادفی، آزمایشی است که نتیجه آن قبل از وقوع مشخص نباشد ولی همه حالت‌های ممکن نتیجه آن معلوم باشد. مثلاً کشیدن قرعه از بین کارت‌هایی که نام چند نفر روی آن‌ها نوشته شده است، نمونه‌ای از یک آزمایش تصادفی است، زیرا قبل از انجام آزمایش نمی‌توان گفت که قرعه به نام چه کسی درمی‌آید، ولی به هر حال قرعه به نام یکی از افرادی که اسم آن‌ها روی کارت‌ها نوشته شده در می‌آید. در یک آزمایش تصادفی، مجموعه همه نتایج ممکن آزمایش را فضای نمونه‌ای این آزمایش می‌نامیم. فضای نمونه‌ای را با حرف S نشان می‌دهیم و به هر عضو آن یک برآمد می‌گوییم. مثلاً فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک تاس $S=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ است و هریک از اعداد ۱ تا ۶ برآمدی از این آزمایش هستند. توجه کنید در هر بار انجام آزمایش تصادفی دقیقاً یکی از برآمدها رخ می‌دهد. مثلاً در هر پرتاب تاس دقیقاً یکی از اعداد ۱ تا ۶ ظاهر می‌شود. به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد تصادفی یا به اختصار یک پیشامد می‌گوییم.[1] مثلاً درآزمایش پرتاب تاس هر یک از مجموعه‌های $\{۱\}$، $\{۱, ۵\}$ و $\{۲, ۳, ۶\}$ یک پیشامد است. اگر نتیجه آزمایش تصادفی عضوی از پیشامد A باشد، می‌گوییم A رخ داده است. مثلاً اگر در پرتاب تاس عدد ۴ ظاهر شود، در این صورت هر یک از پیشامدهای $\{۴\}$، $\{۲, ۴\}$ و $\{۱, ۴, ۵\}$ رخ داده است، ولی هیچ یک از پیشامدهای $\{۲, ۵\}$، $\{۱, ۳, ۶\}$ و $\{۱, ۲, ۵, ۶\}$ رخ نداده است.

مثال: آزمایش پرتاب سه سکه را درنظر بگیرید. چنان‌چه ظاهر شدن رو و پشت را به‌ترتیب با H و T نشان دهیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش به‌صورت زیر می‌شود:

$$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

مثلاً برآمد THT به‌معنای ظاهر شدن پشت در سکه‌های اول و سوم و ظاهر شدن رو در سکه دوم است. مجموعه $A=\{HHT, HTH, THH\}$ پیشامد ظاهر شدن دقیقاً دو «رو» و مجموعه $B=\{HHH, HHT, THH, THT\}$ پیشامد آن است که سکه دوم «رو» بیاید. اگر آزمایش انجام شود و سکه‌های اول، دوم و سوم به ترتیب رو، پشت و رو بیایند، در این صورت A رخ داده ولی B رخ نداده است.

مثال: آرش و بهروز یک مرتبه سنگ ـ کاغذ ـ قیچی بازی می‌کنند. چنان‌چه سنگ، کاغذ و قیچی را به‌ترتیب با s، k و g نشان دهیم، فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر درمی‌آید که در آن آن‌چه را که آرش آورده ابتدا نوشته‌ایم:

$$S=\{ss, sk, sg, ks, kk, kg, gs, gk, gg\}$$

مثلاً sk به‌معنای این است که آرش سنگ و بهروز کاغذ آورده است. می‌دانیم در این بازی سنگ بر قیچی، قیچی بر کاغذ و کاغذ بر سنگ پیروز است، پس $A=\{sg, gk, ks\}$ پیشامد برد آرش و $B=\{ss, kk, gg\}$ پیشامد تساوی دو نفر است.

۱- در حالتی که فضای نمونه‌ای S نامتناهی باشد، زیرمجموعه‌های پیچیده‌ای از آن وجود دارند که پیشامد محسوب نمی‌شوند. در این کتاب هیچ‌گاه با چنین زیرمجموعه‌هایی برخورد نخواهیم کرد.

همان‌گونه که در مثال قبل دیدید، فضای نمونه‌ای را برابر $\{s,k,g\}\times\{s,k,g\}$ گرفتیم. در حالت کلی اگر آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونه‌ای S_1 و S_2 باشد، فضای نمونه‌ای این آزمایش را برابر $S_1\times S_2$ می‌گیریم.

مسئله ۱ **آزمایش پرتاب دو تاس را در نظر بگیرید. فضای نمونه‌ای و پیشامد این را که مجموع اعداد روشده برابر ۸ باشد مشخص کنید.**

راه‌حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش عبارت است از

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$$

و پیشامد ۸ بودن مجموع اعداد رو شده برابر است با

$$A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

تست ۱ **آزمایشی در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا یک تاس پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده زوج باشد، یک سکه پرتاب می‌کنیم و اگر عدد رو شده فرد باشد، تاس را مجدداً پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟**

۱) ۴۸ **۲)** ۳۶ **۳)** ۳۰ **۴)** ۲۴

پاسخ: اگر رو و پشت را به ترتیب با H و T نشان دهیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با

$$S=\{2,4,6\}\times\{H,T\}\cup\{1,3,5\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$$

بنابراین تعداد اعضای S برابر است با

$$3\times2+3\times6=6+18=24$$

فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. اگر $A\subset B$، آن‌گاه رخ دادن A رخ دادن B را نتیجه می‌دهد، یعنی اگر نتیجه آزمایش عضو A باشد، عضو B نیز هست.

اشتراک دو پیشامد A و B، یعنی $A\cap B$، وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

اجتماع دو پیشامد A و B، یعنی $A\cup B$، وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد.

تفاضل دو پیشامد A و B، یعنی $A-B$، وقتی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد، یعنی نتیجه آزمایش عضو A باشد ولی عضو B نباشد.

متمم پیشامد A، یعنی A'، وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

همچنین اگر پیشامدهای A و B برآمد مشترکی نداشته باشند، یعنی $A\cap B=\varnothing$، A و B را دو پیشامد **ناسازگار** می‌نامیم. درواقع دو پیشامد ناسازگار هیچ‌گاه با هم رخ نمی‌دهند، یعنی نتیجه آزمایش نمی‌تواند عضو هر دو پیشامد باشد. توجه کنید که برای هر پیشامد مانند A، پیشامدهای A و A' ناسازگارند.

مثال: در آزمایش پرتاب یک تاس، فرض کنید A پیشامد ظاهر شدن یک عدد اول و B پیشامد ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۴ باشد. در این صورت

$$A=\{2,3,5\},\quad B=\{5,6\}$$

در نتیجه

$$A\cup B=\{2,3,5,6\},\quad A\cap B=\{5\},\quad A-B=\{2,3\},\quad A'=\{1,4,6\}$$

مثال: در آزمایش پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد رو شدن دو عدد با مجموع ۸ و B پیشامد ظاهر شدن حداقل یک عدد ۶ باشد. در این صورت

$$A\cap B=\{(2,6),(6,2)\},\quad A-B=\{(3,5),(4,4),(5,3)\}$$

تست ۲

دو عدد به تصادف از مجموعه $\{1,2,\dots,10\}$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد فرد بودن مجموع این دو عدد، B پیشامد انتخاب عدد ۳ و C پیشامد ۱۰ بودن مجموع این دو عدد باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر B رخ دهد، آن‌گاه A نیز رخ می‌دهد.
۲) اگر B رخ دهد و C رخ ندهد، آن‌گاه A رخ می‌دهد.
۳) اگر C رخ دهد، آن‌گاه A رخ نمی‌دهد.
۴) اگر دست‌کم یکی از A و B رخ دهد، آن‌گاه C رخ نمی‌دهد.

پاسخ: گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.
گزینه (۱) درست نیست، زیرا اگر اعداد ۳ و ۵ انتخاب شوند، B رخ می‌دهد ولی A رخ نمی‌دهد.
گزینه (۲) نیز درست نیست، زیرا اگر اعداد ۳ و ۵ انتخاب شوند، B رخ می‌دهد، C رخ نمی‌دهد و A نیز رخ نمی‌دهد.
گزینه (۳) درست است زیرا اگر C رخ دهد، آن‌گاه مجموع دو عدد انتخاب شده برابر ۱۰ است، پس این مجموع عددی فرد نیست، یعنی A رخ نداده است.
گزینه (۴) درست نیست، زیرا اگر اعداد انتخاب شده ۳ و ۷ باشند، آن‌گاه دست‌کم یکی از A و B (درواقع B) رخ داده است و در ضمن C نیز رخ داده است.

تست ۳

تاسی را پی‌درپی پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد آن باشد که در پرتاب سوم ۶ ظاهر شود، B پیشامد آن باشد که تا پرتاب پنجم حداقل دو بار ۶ ظاهر شود و C پیشامد آن باشد که تا پرتاب هفتم حداکثر یک بار ۶ ظاهر شود. چند تا از جفت پیشامدهای $\{A,B\}$، $\{A,C\}$ و $\{B,C\}$ ناسازگارند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: از تعریف A، B و C مشخص است که A و B می‌توانند با هم رخ دهند، همچنین A و C نیز می‌توانند با هم رخ دهند ولی B و C نمی‌توانند با هم رخ دهند، بنابراین فقط B و C ناسازگارند و پاسخ برابر ۱ است.

اصول احتمال

برای توصیف یک آزمایش تصادفی، علاوه بر شناخت فضای نمونه‌ای لازم است بدانیم که شانس وقوع هر پیشامد از آن چقدر است. بنابراین به هر پیشامد مانند A عدد حقیقی $P(A)$ از بازه $[0,1]$ را به عنوان شانس یا احتمال رخ دادن A نسبت می‌دهیم. به P، **تابع احتمال** گفته می‌شود، به شرطی که در دو اصل زیر صدق کند:

۱) $P(S)=1$
۲) برای هر دو پیشامد ناسازگار مانند A و B، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

اگر P یک تابع احتمال باشد، فضای نمونه‌ای S به همراه P یک **فضای احتمال** نامیده می‌شود.
از جمله مهم‌ترین فضاهای احتمال، که در گذشته با آن آشنا شده‌اید، فضاهای هم‌شانس هستند. در واقع اگر فضای نمونه‌ای S متناهی باشد و برای هر پیشامد مانند A، $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$، در این صورت P یک تابع احتمال است، زیرا

۱) $P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=1$

۲) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه $A\cap B=\varnothing$، در نتیجه

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(\varnothing)}{n(S)}$$
$$=P(A)+P(B)-0=P(A)+P(B)$$

علت این‌که این‌گونه فضاهای احتمال فضاهای هم‌شانس نامیده می‌شوند، این است که شانس وقوع پیشامدهای تک عضوی همگی با هم برابرند. در واقع اگر $S=\{s_۱ , s_۲ , \dots , s_n\}$، آن‌گاه به‌ازای هر $۱\leq i\leq n$،

$$P(\{s_i\})=\frac{n(\{s_i\})}{n(S)}=\frac{۱}{n}$$

یعنی احتمال وقوع هر پیشامد تک عضوی برابر $\frac{۱}{n}$ است. در درس بعدی با فضاهای احتمالی آشنا می‌شویم که هم‌شانس نیستند.

ویژگی‌های تابع احتمال

قضیه **اگر P یک تابع احتمال باشد، آن‌گاه**

۱) برای هر پیشامد مانند A، $P(A')=۱-P(A)$.

۲) $P(\varnothing)=۰$

۳) برای هر دو پیشامد مانند A و B، $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

۴) برای هر دو پیشامد مانند A و B، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

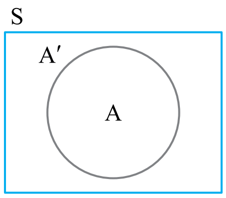
۵) برای هر سه پیشامد دوبه‌دو ناسازگار مانند A، B و C،

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

و به طور کلی برای هر n پیشامد دوبه‌دو ناسازگار مانند $A_۱$، $A_۲$، …، و A_n،

$$P(A_۱\cup A_۲\cup \dots \cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+\cdots+P(A_n)$$

اثبات:



۱) دو پیشامد A و A' ناسازگارند و در ضمن $A\cup A'=S$، پس طبق اصل‌های اول و دوم احتمال،

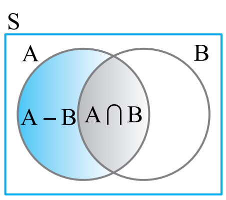
$$۱=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

در نتیجه

$$P(A')=۱-P(A)$$

۲) چون $\varnothing$ متمم فضای نمونه‌ای S است، پس طبق قسمت قبل،

$$P(\varnothing)=۱-P(S)=۱-۱=۰$$

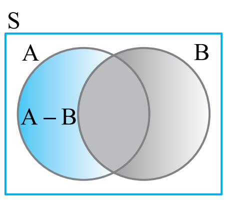


۳) دو پیشامد $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند و اجتماع آن‌ها برابر A است، پس طبق اصل دوم احتمال،

$$P(A)=P((A-B)\cup(A\cap B))=P(A-B)+P(A\cap B)$$

در نتیجه

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$



۴) دو پیشامد $A-B$ و B ناسازگارند و اجتماع آن‌ها برابر $A\cup B$ است، پس طبق اصل دوم احتمال و همچنین قسمت قبل،

$$P(A\cup B)=P((A-B)\cup B)=P(A-B)+P(B)$$

$$=(P(A)-P(A\cap B))+P(B)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۵) چون $A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$، پس $A\cap(B\cup C)=\varnothing$، یعنی A و $B\cup C$ ناسازگارند، در نتیجه طبق اصل دوم احتمال،

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)$$

و چون B و C ناسازگارند، پس $P(B\cup C)=P(B)+P(C)$. در نتیجه

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

با تکرار این استدلال می‌توانیم حکم را برای هر تعداد پیشامد دوبه‌دو ناسازگار نتیجه بگیریم.

مسئله ۲ **در عمل پیوند کلیه روی یک بیمار خاص نسبت احتمال موفقیت به عدم موفقیت برابر $\frac{۵}{۲}$ است. احتمال این‌که عمل روی این بیمار موفقیت آمیز باشد چقدر است؟**

راه‌حل: فرض کنید A پیشامد موفقیت آمیز بودن عمل روی بیمار مورد نظر باشد. در این صورت طبق فرض $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{۵}{۲}$، در نتیجه

$$\frac{P(A)}{۱-P(A)}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۲P(A)=۵-۵P(A)\Rightarrow ۷P(A)=۵\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۷}$$

مسئله ۳ **احتمال این‌که در ۴ بار پرتاب یک تاس دست‌کم یک‌بار عدد ۶ ظاهر شود چقدر است؟**

راه‌حل: فضای نمونه‌ای در این مسئله برابر مجموعه همه چهارتایی‌های مرتب از اعداد ۱ تا ۶ است، پس $n(S)=۶^۴$. فرض کنید A پیشامد ظاهر شدن دست‌کم یک‌بار عدد ۶ باشد. در این صورت A' پیشامد این است که عدد ۶ ظاهر نشود، پس $n(A')=۵^۴$ (زیرا برای هر پرتاب ۵ انتخاب وجود دارد). در نتیجه

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۵^۴}{۶^۴}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵^۴}{۶^۴}$$

مسئله ۴ **از جعبه‌ای حاوی ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه، سه مهره خارج می‌کنیم. احتمال این‌که در بین مهره‌های خارج شده، مهره سفید وجود داشته باشد چقدر است؟**

راه‌حل: فضای نمونه‌ای برابر مجموعه تمام راه‌های انتخاب ۳ مهره از ۱۲ مهره داخل جعبه است، پس

$$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{۳!۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۳!\times۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱}=۲\times۱۱\times۱۰=۲۲۰$$

فرض کنید A پیشامد آن باشد که حداقل یکی از مهره‌های خارج شده سفید باشد. در این صورت A' پیشامد آن است که هر سه مهره خارج شده سیاه باشند، در نتیجه

$$n(A')=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!۴!}=\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=۳۵$$

بنابراین

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۳۵}{۲۲۰}=\frac{۷}{۴۴}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۷}{۴۴}=\frac{۳۷}{۴۴}$$

مسئله ۵ **عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, \ldots, 60\}$ انتخاب شده است. احتمال این‌که این عدد دست‌کم بر یکی از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟**

راه‌حل: فضای نمونه‌ای $S=\{1, 2, \ldots, 60\}$ است. فرض کنید A پیشامد آن باشد که عدد انتخاب شده دست‌کم بر یکی از ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد. در این صورت A' پیشامد آن است که عدد انتخابی بر هر سه عدد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی این عدد بر ۳۰ بخش‌پذیر باشد. چون در مجموعه $\{1, 2, \ldots, 60\}$ فقط دو عدد بخش‌پذیر بر ۳۰ وجود دارد، پس

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{2}{60}=\frac{1}{30}$$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$$

تست ۴ **عددی سه‌رقمی به تصادف انتخاب شده است. احتمال این‌که این عدد رقم تکراری داشته باشد چقدر است؟**

۱) $0/18$ ۲) $0/21$ ۳) $0/25$ ۴) $0/28$

پاسخ: فضای نمونه‌ای S برابر مجموعه اعداد سه‌رقمی است، بنابراین $n(S)=9\times 10\times 10$. فرض کنید A پیشامد آن باشد که عدد انتخاب شده رقم تکراری داشته باشد. در این صورت A' پیشامد آن است که ارقام عدد انتخابی همگی متمایز باشند. بنابراین

$$n(A')=9\times 9\times 8$$

در نتیجه

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{9\times 9\times 8}{9\times 10\times 10}=0/72$$

$$P(A)=1-P(A')=1-0/72=0/28$$

مسئله ۶ **سه عدد به تصادف از مجموعه $\{1, 2, \ldots, 11\}$ انتخاب شده است. احتمال این‌که حاصل‌ضرب این سه عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟**

راه‌حل: فضای نمونه‌ای S برابر مجموعه همه زیرمجموعه‌های سه‌عضوی از مجموعه $\{1, 2, \ldots, 11\}$ است، پس $n(S)=\binom{11}{3}$. فرض کنید A پیشامد آن باشد که حاصل‌ضرب سه عدد انتخاب شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد. در این صورت A پیشامد آن است که در بین سه عدد انتخابی دست‌کم یکی از ۵ یا ۱۰ وجود داشته باشد. در نتیجه A' پیشامد آن است که در بین سه عدد انتخابی هیچ‌یک از ۵ و ۱۰ وجود نداشته باشد، پس $n(A')=\binom{9}{3}$. بنابراین

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{11}{3}}=\frac{\frac{9!}{3!6!}}{\frac{11!}{3!8!}}=\frac{9!\times 8!}{11!\times 6!}=\frac{8\times 7}{11\times 10}=\frac{28}{55}$$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{28}{55}=\frac{27}{55}$$

مسئله ۷ **عددی به تصادف از مجموعه $\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ انتخاب شده است. احتمال این‌که این عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۲ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟**

راه‌حل: فرض کنید A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخاب شده بر ۳ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخاب شده بر ۲ باشد. در این صورت باید $P(A-B)$ را بیابیم. می‌دانیم $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$. در مجموعه $\{۱,۲,...,۱۰۰\}$، ۳۳ عدد بر ۳ بخش‌پذیرند، پس $P(A)=\frac{۳۳}{۱۰۰}$. همچنین $A\cap B$ پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۶ است. چون در مجموعه $\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ ، ۱۶ عدد بر ۶ بخش‌پذیرند، پس $P(A\cap B)=\frac{۱۶}{۱۰۰}$، در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۳۳-۰/۱۶=۰/۱۷$$

مسئله ۸ **آمار نشان می‌دهد که در یکی از شهرهای بزرگ، ۲۵ درصد جرایم در طول روز و ۱۸ درصد جرائم درون شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ۱۰ درصد جرایم در حومه شهر و در طول روز اتفاق بیفتد، در این صورت**

الف) چند درصد جرایم در شهر و در طول روز اتفاق می‌افتد؟

ب) چند درصد جرایم در شهر و در طول شب اتفاق می‌افتد؟

راه‌حل: فرض کنید A پیشامد وقوع جرم در روز و B پیشامد وقوع جرم در شهر باشد. در این صورت طبق فرض $P(A)=۰/۲۵$، $P(B)=۰/۱۸$ و $P(A-B)=۰/۱$.

الف) باید $P(A\cap B)$ را بیابیم. می‌توان نوشت

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)-P(A-B)=۰/۲۵-۰/۱=۰/۱۵$$

ب) باید $P(B-A)$ را بیابیم. می‌توان نوشت

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=۰/۱۸-۰/۱۵=۰/۰۳$$

تست ۵

۶۰ درصد مردم بلژیک تحصیل کرده‌اند و ۴۰ درصد تحصیل کرده‌های این کشور عینکی هستند. یکی از ساکنان این کشور به تصادف انتخاب شده است. احتمال این‌که این شخص تحصیل کرده باشد ولی عینکی نباشد چقدر است؟

۱) ۰/۲ **۲)** ۰/۲۴ **۳)** ۰/۳۶ **۴)** ۰/۷۶

پاسخ: فرض کنید A پیشامد آن باشد که فرد انتخاب شده تحصیل کرده و B پیشامد آن باشد که فرد انتخاب شده عینکی باشد. در این صورت باید $P(A-B)$ را بیابیم. طبق فرض، $P(A)=۰/۶$ و $P(A\cap B)=۰/۴\times۰/۶$، پس

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۶-۰/۴\times۰/۶=۰/۶-۰/۲۴=۰/۳۶$$

مسئله ۹ **در یک جمع ۳۰۰ نفره، ۱۵۰ نفر به دوچرخه سواری، ۱۸۰ نفر به شنا و ۷۰ نفر به هر دو ورزش علاقه‌مندند. احتمال این‌که یک نفر از این جمع که به تصادف انتخاب شده حداقل به یکی از دو ورزش علاقه‌مند باشد چقدر است؟**

راه‌حل: فرض کنید A پیشامد این باشد که شخص انتخاب شده به دوچرخه سواری و B پیشامد این باشد که این شخص به شنا علاقه‌مند باشد. در این صورت باید $P(A\cup B)$ را حساب کنیم. می‌توان نوشت

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{۱۵۰}{۳۰۰}+\frac{۱۸۰}{۳۰۰}-\frac{۷۰}{۳۰۰}=\frac{۲۶۰}{۳۰۰}=\frac{۱۳}{۱۵}$$

تست ۶

در یک مدرسه ۴۸ معلم تدریس می‌کنند که ۱۷ تا از آن‌ها معلم ریاضی هستند. ۳۴ تا از معلمین که ۱۱ نفر آن‌ها معلم ریاضی هستند وسیله نقلیه دارند. یکی از معلمین این مدرسه به تصادف انتخاب شده است. احتمال این‌که این شخص نه معلم ریاضی باشد و نه وسیله نقلیه داشته باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: فرض کنید A پیشامد این باشد که شخص انتخاب شده معلم ریاضی باشد و B پیشامد این باشد که شخص انتخاب شده وسیله نقلیه داشته باشد. در این صورت باید $P(A'\cap B')$ را بیابیم. چون $A'\cap B'$ متمم $A\cup B$ است، پس

$$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=۱-\frac{۱۷}{۴۸}-\frac{۳۴}{۴۸}+\frac{۱۱}{۴۸}=\frac{۸}{۴۸}=\frac{۱}{۶}$$

مسئله ۱۰

از بین ۲۵۰ دانشـــجوی دانشـــکده فنی، ۲۷ نفر اهل گیلان، ۱۸ نفر اهل مازندران و ۱۴ نفر اهل اســتان گلستان هستند. احتمال این‌که یکی از دانشجویان این دانشکده که به تصادف انتخاب شده است اهل یکی از این سه استان شمالی کشور باشد، چقدر است؟

راه‌حل: فرض کنید A، B و C به ترتیب پیشامد این باشند که دانشجوی انتخاب شده اهل استان گیلان، مازندران و گلستان باشد. باید $P(A\cup B\cup C)$ را بیابیم. چون A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{۲۷}{۲۵۰}+\frac{۱۸}{۲۵۰}+\frac{۱۴}{۲۵۰}=\frac{۵۹}{۲۵۰}$$

تست ۷

در دو جعبه به ترتیب ۳ و ۵ مهره ســفید، ۴ و ۲ مهره قرمز و ۱ و ۵ مهره ســبز وجود دارد. از هر جعبه یک مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که دو مهره خارج شده همرنگ باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

پاسخ: تعداد مهره‌های دو جعبه به ترتیب برابر است با

$$۳+۴+۱=۸\ ,\quad ۵+۲+۵=۱۲$$

بنابراین تعداد راه‌های انتخاب دو مهره از دو جعبه داده شـــده برابر ۱۲×۸ اســـت، پس $n(S)=۹۶$.

فرض کنید A پیشامد سفید بودن دو مهره خارج شده، B پیشامد قرمز بودن دو مهره خارج شده و C پیشامد سبز بودن دو مهره خارج شده باشد. باید $P(A\cup B\cup C)$ را بیابیم. چون A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}+\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳\times۵}{۹۶}+\frac{۴\times۲}{۹۶}+\frac{۱\times۵}{۹۶}=\frac{۲۸}{۹۶}=\frac{۷}{۲۴}$$

تمرین

۱- یک آزمایش در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا یک تاس پرتاب می‌کنیم. اگر عددی بزرگ‌تر از ۴ ظاهر شد، دو سکه و در غیر این صورت یک سکه پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) با نوشتن اعضا، پیشامد این را که تاس عددی فرد بیاید و حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید مشخص کنید.

۲- ۴ نفر با نام‌های a، b، c و d به تصادف در یک صف می‌ایستند.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را توصیف کنید.

ب) پیشامد این را که در صف a جلوتر از b و c جلوتر از d باشد با نوشتن اعضا مشخص کنید.

پ) پیشامد این را که در صف a و b مجاور باشند و همچنین c و d نیز مجاور باشند با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۳- آزمایش انتخاب دو عدد از مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را در نظر بگیرید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) پیشامد این را که مجموع دو عدد انتخاب شده بزرگ‌تر از ۶ باشد با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۴- یک عدد به تصادف از مجموعه $\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$ انتخاب شده است. فرض کنید A پیشامد زوج بودن این عدد، B پیشامد اول بودن این عدد و C این پیشامد باشد که عدد انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

الف) مشخص کنید کدام جفت از پیشامدهای A، B و C ناسازگارند و کدام جفت از پیشامدها سازگارند؟

ب) پیشامدهای $A\cup B$، $A-B$، C' و $A'\cap C$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۵- در آزمایش پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد این باشد که مجموع اعداد رو شده حداقل ۹ باشد، B پیشامد رو شدن حداقل یک عدد ۲ و C پیشامد این باشد که تفاضل اعداد رو شده برابر ۴ باشد.

الف) مشخص کنید کدام جفت از پیشامدهای A، B و C ناسازگارند؟

ب) پیشامد $C-B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۶- اگر A و B دو پیشامد از یک فضای احتمال باشند و $A\subset B$، ثابت کنید

الف) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

ب) $P(A)\leq P(B)$

۷- فرض کنید A و B دو پیشامد از یک فضای احتمال باشند. ثابت کنید

الف) $P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$

ب) $P(A-B)\geq P(A)-P(B)$

پ) $P(A')-P(B')=P(B)-P(A)$

ت) $P(A)-P(A-B)=P(B)-P(B-A)$

ث) $P(A'\cup B)=۱-P(A)+P(A\cap B)$

ج) $P(A'\cap B')=P(A')-P(B)+P(A\cap B)$

چ) $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$

ح) $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-۱$

۸- فرض کنید A و B دو پیشامد از یک فضای احتمال باشند.

الف) اگر $P(A)+P(B')=۱/۱$ و $P(A-B)=۰/۳$، مقدار $P(B-A)$ را بیابید.

ب) اگر $P(A')=۲P(B')$، $P(A-B)=۰/۱$ و $P(B-A)=۰/۳$، مقدار $P(A)$ را بیابید.

پ) اگر $P(A'\cup B)=۰/۷$ و $P(A)=۰/۴$، مقدار $P(A\cap B)$ را بیابید.

ت) اگر $P(A\cup B)=۰/۸$، $P(A\cap B)=۰/۱$ و $P(A)=۲P(B)$، مقدار $P(A)$ را بیابید.

ث) اگر $P(A\cup B)+P(A\cup B')=۱/۶$، مقدار $P(A)$ را بیابید.

ج) اگر $P(A'\cap B)=۰/۴$ و $P(A'\cap B')=۰/۲$، مقدار $P(A)$ را بیابید.

چ) اگر $P(A'\cup B')=۰/۸$ و $P(B)=۰/۵$، مقدار $P(B-A)$ را بیابید.

۹- یک سکه را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که سکه حداقل یک بار پشت بیاید چقدر است؟

۱۰- در یک جمع ۵ نفره، احتمال این‌که حداقل دو نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند چقدر است؟

۱۱- یک واگن ۱۰ کوپه دارد. ۶ مسافر قطار، هر یک به تصادف وارد یکی از این ۱۰ کوپه می‌شوند.

الف) احتمال این‌که حداقل دو نفر وارد یک کوپه شوند چقدر است؟

ب) احتمال این‌که در کوپه اول حداقل یک مسافر وارد شود چقدر است؟

۱۲- عددی سه‌رقمی به تصادف انتخاب شده است.

الف) احتمال این‌که این عدد شامل رقم ۶ باشد چقدر است؟

ب) احتمال این‌که این عدد رقمی بزرگ‌تر از ۶ داشته باشد چقدر است؟

۱۳- در یک جعبه ۵ جفت کفش وجود دارد. چهار لنگه کفش به تصادف از جعبه انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یک جفت کفش در بین این ۴ لنگه کفش وجود داشته باشد چقدر است؟

۱۴- جعبه‌های A، B و C به‌ترتیب ۵، ۲ و ۴ مهره سفید و ۳، ۷ و ۵ مهره سیاه دارند. از هر جعبه یک مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یکی از این مهره‌ها سفید باشد چقدر است؟

۱۵- عددی به تصادف از مجموعه $\{۱, ۲, \dots, ۵۰\}$ انتخاب شده است. احتمال این‌که این عدد حداقل بر یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

۱۶- دو تاس را پرتاب کرده‌ایم. احتمال این‌که مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۱ باشد چقدر است؟

۱۷- سه عدد به تصادف از مجموعه $\{۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ انتخاب شده است. احتمال این‌که حاصل‌ضرب این سه عدد زوج باشد چقدر است؟

۱۸- در یک شهرک یک فروشگاه مواد غذایی تأسیس شده است. می‌دانیم ۷۰ درصد مشتریان فروشگاه از ساکنین شهرک، ۶۰ درصد مشتریان فروشگاه زن و ۲۰ درصد مشتریان فروشگاه مرد و ساکن شهرک هستند. احتمال این‌که اولین مشتری که وارد این فروشگاه می‌شود،

الف) زن و ساکن شهرک باشد چقدر است؟

ب) زن باشد و خارج از شهرک سکونت داشته باشد چقدر است؟

۱۹- یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که سکه رو بیاید ولی تاس ۶ نیاید چقدر است؟

۲۰- عددی به تصادف از مجموعه $\{۱, ۲, \dots, ۹۰\}$ انتخاب شده است.

الف) احتمال این‌که این عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۱۰ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

ب) احتمال این‌که این عدد بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

پ) احتمال این‌که این عدد بر هیچ‌یک از عددهای ۵ و ۶ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل دوم

درس اول:
مبانی احتمال

۱- در آزمایش پرتاب ۵ سکه، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۳۲

۲- در آزمایش پرتاب یک تاس، تعداد پیشامدها برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۳۶ ۴) ۶۴

۳- در آزمایش پرتاب دو تاس، این پیشامد که عددی بزرگ‌تر از ۴ ظاهر شود چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۴- آزمایشی در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، این سکه را ۴ بار دیگر پرتاب می‌کنیم و اگر پشت آمد، یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۲۲ ۲) ۵۲ ۳) ۶۸ ۴) ۱۰۴

۵- آزمایشی در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، این سکه را ۴ بار دیگر پرتاب می‌کنیم و اگر پشت آمد، یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. این پیشامد که سکه حداقل یک‌بار پشت بیاید چند عضو دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۵۱ ۴) ۶۷

۶- در آزمایش پرتاب دو تاس، این پیشامد که تفاضل اعداد رو شده کم‌تر از ۳ باشد چند عضو دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۷- سکه‌ای را پی‌درپی پرتاب می‌کنیم. این پیشامد که سکه در هشتمین پرتاب برای سومین بار رو بیاید چند عضو دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۵۶

۸- روی ۱۰ کارت عددهای ۱ تا ۱۰ نوشته شده است. سه تا از این کارت‌ها به تصادف انتخاب می‌شوند. فرض کنید A پیشامد فرد بودن مجموع اعداد سه کارت انتخابی، B پیشامد انتخاب حداقل دو عدد فرد و C پیشامد انتخاب حداقل یک عدد زوج باشد. کدام دو پیشامد ناسازگارند؟

۱) B و C ۲) A و $B-C$ ۳) $A\cap B$ و C ۴) $A-C$ و B

۹- یک تاس را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A_k پیشامد ظاهر شدن عدد ۶ در پرتاب kاُم باشد، $k=1,2,3$. کدام عبارت نشان دهنده پیشامد ظاهر شدن ۶ در حداکثر دو پرتاب از سه پرتاب است؟

۱) $A'_1\cup A'_2\cup A'_3$ ۲) $(A_1\cup A_2)-A_3$

۳) $(A_1\cup A_2\cup A_3)-(A_1\cap A_2\cap A_3)$ ۴) $(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)\cup(A_2\cap A_3)$

۱۰- با مفروضات سؤال قبل، کدام عبارت نشان دهنده پیشامد ظاهر شدن ۶ در یک یا دو پرتاب است؟

۱) $A'_1\cup A'_2\cup A'_3$ ۲) $A'_1\cap A'_2\cap A'_3$

۳) $(A_1\cup A_2\cup A_3)-(A_1\cap A_2\cap A_3)$ ۴) $(A_1\cup A_2)\cap(A_1\cup A_3)\cap(A_2\cup A_3)$

۱۱- احتمال مشاهده حداقل یک ۴ در پرتاب ۳ تاس چقدر است؟

۱) $\frac{91}{216}$ ۲) $\frac{1}{36}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{25}{72}$

۱۲- یک سکه را دست‌کم چند بار پرتاب کنیم تا احتمال مشاهده حداقل یک «رو» بیش از ۹۵ درصد باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳- حاصل $1-P(A\cap B)-P(B')$ برابر کدام است؟

۱) $P(A)$ ۲) $P(A')$ ۳) $P(A-B)$ ۴) $P(B-A)$

۱۴- فرض کنید $P(A-B)=۰/۲$، $P(B-A)=۰/۳$ و $P(A\cup B)=۰/۹$. مقدار $P(A)$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۷

۱۵- فرض کنید $P(A')+P(B')=۱/۵$ و $P(A\cup B)=۰/۳$. مقدار $P(A\cap B)$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۰/۳
۴) ۰/۴

۱۶- فرض کنید $P(A\cap B)=۰/۲$ و $P(A'\cup B)=۰/۷۵$. مقدار $P(A)$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۳۵
۳) ۰/۴۵
۴) ۰/۵۵

۱۷- عددی سه‌رقمی به تصادف انتخاب شده است. احتمال این‌که این عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۱۰ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$
۲) $\frac{۱}{۱۰}$
۳) $\frac{۲}{۱۵}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۸- عددی سه‌رقمی به تصادف انتخاب شده است. احتمال این‌که این عدد دست کم یک رقم فرد داشته باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۸}{۹}$

۱۹- در یک جعبه ۵ مهره سفید، ۳ مهره سبز و ۲ مهره آبی وجود دارد. سه مهره از این جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که دست‌کم دو تا از این سه مهره هم‌رنگ باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۰- دو تاس را پرتاب کرده‌ایم. احتمال این‌که مجموع اعداد رو شده برابر ۹ باشد یا حداقل یکی از دو تاس ۵ آمده باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۷}{۱۸}$
۳) $\frac{۵}{۱۲}$
۴) $\frac{۱۳}{۳۶}$

۱ الف)

$S=\{(۱,H),(۱,T),(۲,H),(۲,T),(۳,H),(۳,T),(۴,H),(۴,T),(۵,H,H),(۵,H,T),(۵,T,H),(۵,T,T),(۶,H,H),(۶,H,T),(۶,T,H),(۶,T,T)\}$

ب)

$A=\{(۱,T),(۳,T),(۵,H,T),(۵,T,H),(۵,T,T)\}$

۲ الف)

$S=\{abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba, dabc, dacb, dbca, dbac, dcab, dcba\}$

ب)

$A=\{abcd, acbd, acdb, cabd, cadb, cdab\}$

پ)

$B=\{abcd, abdc, bacd, badc, cdab, cdba, dcab, dcba\}$

۳ الف)

$S=\{\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۱,۴\},\{۱,۵\},\{۲,۳\},\{۲,۴\},\{۲,۵\},\{۳,۴\},\{۳,۵\},\{۴,۵\}\}$

ب)

$A=\{\{۲,۵\},\{۳,۴\},\{۳,۵\},\{۴,۵\}\}$

۴ الف)

$A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}, B=\{۲,۳,۵,۷\}, C=\{۳,۶,۹\}$

$A\cap B=\{۲\},\quad B\cap C=\{۳\},\quad A\cap C=\{۶\}$

برای این‌که دو پیشامد ناسازگار باشند باید اشتراک آن‌ها تهی باشد، پس هر جفت از این پیشامدها سازگارند.

ب)

زوج یا اول باشد $=A\cup B=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۱۰\}$

زوج باشد و اول نباشد $=A-B=\{۴,۶,۸,۱۰\}$

مضرب ۳ نباشد $=C'=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰\}$

زوج نباشد و مضرب ۳ باشد $=A'\cap C=\{۳,۹\}$

۵ الف)

مجموع دو عدد حداقل ۹ باشد $=A=\{(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

حداقل یکی ۲ باشد $=B=\{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲)\}$

تفاضل اعداد رو شده ۴ باشد $=C=\{(۱,۵),(۲,۶),(۵,۱),(۶,۲)\}$

$A\cap B=\varnothing,\quad B\cap C=\{(۲,۶),(۶,۲)\},\quad A\cap C=\varnothing$

A و B ناسازگارند، A و C ناسازگارند.

ب)

$C-B=\{(۱,۵),(۵,۱)\}$

۶ الف)

$A\subset B\Rightarrow A\cap B=A$

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

$\xrightarrow{A\cap B=A} P(B-A)=P(B)-P(A)$

ب)

$P(B-A)=P(B)-P(A)\Rightarrow P(B)=P(A)+P(B-A)$

$\xrightarrow{P(B-A)\geq ۰} P(A)\leq P(B)$

۷ الف) چون $A\cap B\subset A\subset A\cup B$، طبق قسمت (ب) از مسئله قبل

$P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$

ب)

$\begin{cases} P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \\ P(B)\geq P(A\cap B) \text{(طبق الف)} \end{cases}$

در نتیجه

$P(A-B)+P(B)\geq P(A)$

$P(A-B)\geq P(A)-P(B)$

پ)

$\begin{cases} P(A')=۱-P(A) \\ P(B')=۱-P(B) \end{cases}$

$P(A')-P(B')=(۱-P(A))-(۱-P(B))$

$=P(B)-P(A)$

ت)

$$P(A)-P(A\cap B)=P(A-B)$$
$$P(B)-P(A\cap B)=P(B-A)$$
$$P(A)-P(A-B)=P(A\cap B)=P(B)-P(B-A)$$

ث)

$$\begin{cases} P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B) \\ P(A')=۱-P(A) \\ A'\cap B=B-A \end{cases}$$
$$P(A'\cup B)=۱-P(A)+P(B)-P(B-A)$$
$$=۱-P(A)+P(B)-(P(B)-P(A\cap B))$$
$$=۱-P(A)+P(A\cap B)$$

ج) چون $A'\cap B'=(A\cup B)'$، در نتیجه

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')$$
$$=۱-P(A\cup B)=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))$$
$$=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

از طرف دیگر $۱-P(A)=P(A')$، بنابراین

$$P(A'\cap B')=P(A')-P(B)+P(A\cap B)$$

چ)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\xrightarrow{P(A\cap B)\geq ۰} P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$$

ح)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$\xrightarrow{P(A\cup B)\leq ۱} P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-۱$$

۸ الف)

$$\begin{cases} ۱/۱=P(A)+P(B')=P(A)+۱-P(B) \\ P(A)-P(B)=۰/۱ \quad (۱) \\ ۰/۳=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \\ P(A)-P(A\cap B)=۰/۳ \quad (۲) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(۲)-(۱)} P(B)-P(A\cap B)=۰/۳-۰/۱$$
$$P(B-A)=۰/۲$$

ب)

$$P(A')=۲P(B')\Rightarrow ۱-P(A)=۲(۱-P(B))$$
$$\begin{cases} ۰/۱=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \\ ۰/۳=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \end{cases}$$
$$P(A\cap B)=P(A)-۰/۱=P(B)-۰/۳$$
$$P(B)=P(A)+۰/۲$$
$$۱-P(A)=۲(۱-P(B))$$
$$۱-P(A)=۲(۱-(P(A)+۰/۲))$$
$$۱-P(A)=۱/۶-۲P(A)\Rightarrow P(A)=۰/۶$$

پ)

$$\begin{cases} ۰/۷=P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B) \\ ۰/۴=P(A)=۱-P(A')\Rightarrow P(A')=۰/۶ \end{cases}$$
$$۰/۷=۰/۶+P(B)-P(A'\cap B)$$
$$\xrightarrow{A'\cap B=B-A} P(B)-P(B-A)=۰/۱$$
$$P(A\cap B)=۰/۱$$

ت)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$۰/۸=P(A)+P(B)-۰/۱\Rightarrow P(A)+P(B)=۰/۹$$
$$\xrightarrow{P(A)=۲P(B)} P(A)+\frac{۱}{۲}P(A)=۰/۹$$
$$\frac{۳}{۲}P(A)=۰/۹\Rightarrow P(A)=۰/۶$$

ث)

$$\begin{cases} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B') \end{cases}$$
$$P(A\cup B)+P(A\cup B')$$
$$=۲P(A)+P(B)+P(B')-(P(A\cap B)+P(A\cap B'))$$

چون

$$\begin{cases} P(B)+P(B')=۱ \\ P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \end{cases}$$

بنابراین

$$P(A\cup B)+P(A\cup B')=۲P(A)+۱-P(A)$$
$$۱/۶=P(A)+۱\Rightarrow P(A)=۰/۶$$

ج)

$$A'=A'\cap S=A'\cap(B\cup B')=(A'\cap B)\cup(A'\cap B')$$

چون پیشامدهای $A'\cap B$ و $A'\cap B'$ ناسازگار هستند، پس

$$P(A')=P(A'\cap B)+P(A'\cap B')$$
$$P(A'\cap B)=۰/۴\,,\quad P(A'\cap B')=۰/۲$$

بنابراین

$$P(A')=۰/۶\Rightarrow ۱-P(A)=۰/۶\Rightarrow P(A)=۰/۴$$

چ)

$$A'\cup B'=(A\cap B)'$$
$$۰/۸=P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=۱-P(A\cap B)$$
$$۰/۸=۱-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B)=۰/۲$$
$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=۰/۵-۰/۲=۰/۳$$

۹

A: حداقل یک بار پشت بیاید

A′: هر ۵ بار رو بیاید

$$P(A')=\frac{۱}{۲^۵}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۲^۵}=\frac{۳۱}{۳۲}$$

۱۰

A: حداقل دو نفر در یک روز از هفته به دنیا آمده باشند

A′: هیچ دو نفری در یک روز از هفته به دنیا نیامده باشند

$$P(A')=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳}{۷\times۷\times۷\times۷\times۷}$$

$$P(A)=۱-\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳}{۷\times۷\times۷\times۷\times۷}=۱-\frac{۳۶۰}{۷^۴}$$

۱۱ الف)

A: حداقل دو نفر وارد یک کوپه شوند

A′: هیچ دو نفری وارد یک کوپه نشوند

$$P(A')=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵}{۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰}$$

$$P(A)=۱-\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵}{۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰}=۱-\frac{۱۵۱۲}{۱۰^۴}$$

ب)

B: در کوپه اول حداقل یک نفر وارد شود

B′: هیچ کس وارد کوپه اول نشود

$$P(B')=\frac{۹\times۹\times۹\times۹\times۹\times۹}{۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰}=(\frac{۹}{۱۰})^۶$$

$$P(B)=۱-P(B')=۱-(\frac{۹}{۱۰})^۶$$

۱۲ الف)

A: شامل رقم ۶ باشد

A′: شامل رقم ۶ نباشد

$$P(A')=\frac{۸\times۹\times۹}{۹\times۱۰\times۱۰}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۷۲}{۱۰۰}=۰/۲۸$$

ب)

B: شامل رقمی بزرگ‌تر از ۶ باشد

B′: شامل رقمی بزرگ‌تر از ۶ نباشد

$$P(B')=\frac{۶\times۷\times۷}{۹\times۱۰\times۱۰}$$

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۴۹}{۱۵۰}=\frac{۱۰۱}{۱۵۰}$$

۱۳

A: حداقل یک جفت کفش بین کفش‌ها باشد

A′: هیچ دوکفشی جفت نباشد

$$P(A')=\frac{\binom{۵}{۴}\times۲^۴}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۵\times۲^۴}{۲۱۰}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۸۰}{۲۱۰}=\frac{۱۳}{۲۱}$$

یادآوری: برای این‌که کفش‌ها جفت نباشند کافی است ۴ جفت از پنـج جفت را انتخاب کنیم و از هر جفت به دو حالت کفش پای راست یا چپ را انتخاب کنیم:

$$\binom{۵}{۴}\times۲^۴=\text{تعداد حالاتی که دو کفش جفت نباشند}$$

۱۴

A: حداقل یک مهره سفید باشد , A′: هر سه مهره سیاه باشند

$$P(A')=\frac{۳\times۷\times۵}{۸\times۹\times۹}=\frac{۱۰۵}{۶۴۸}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱۰۵}{۶۴۸}=\frac{۵۴۳}{۶۴۸}=\frac{۱۸۱}{۲۱۶}$$

۱۵

A: حداقل بر یکی از ۲ و ۳ بخش‌پذیر نباشد

A′: هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد = بر ۶ بخش‌پذیر باشد

$$A'=\{۶,۱۲,۱۸,۲۴,۳۰,۳۶,۴۲,۴۸\}\Rightarrow P(A')=\frac{۸}{۵۰}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۸}{۵۰}=\frac{۴۲}{۵۰}=\frac{۲۱}{۲۵}$$

۱۶

A: مجموع کمتر از ۱۱ باشد

A′: مجموع بیشتر یا مساوی ۱۱ باشد

$$A'=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۳۶}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳۳}{۳۶}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۱۷

A: حداقل یکی از اعداد زوج باشد = حاصل‌ضرب زوج باشد

A′: هر سه عدد فرد باشند

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۱۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۲},\ P(A)=۱-P(A')=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۱۸

ساکن شهرک بودن مشتری : A

زن بودن مشتری : B

مرد بودن مشتری : B'

$P(A)=۷۰٪$

$P(B)=۶۰٪$

$P(A\cap B')=۲۰٪$

الف)

مشتری زن و ساکن شهرک باشد $=B\cap A$

$A=A\cap S=A\cap(B\cup B')$

$=(A\cap B)\cup(A\cap B')$

چون A برابر اجتماع دو پیشامد ناسازگار $A\cap B$ و $A\cap B'$ است، پس

$P(A)=P(B\cap A)+P(B'\cap A)$

$\frac{۷۰}{۱۰۰}=P(B\cap A)+\frac{۲۰}{۱۰۰}$

$P(B\cap A)=\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}$

ب)

مشتری زن بوده و ساکن شهرک نباشد $=B\cap A'$

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$

$\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۵۰}{۱۰۰}+P(B\cap A')$

$P(B\cap A')=\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰}$

۱۹

سکه رو بیاید : A ، تاس شش بیاید : B

$A\cap B'=\{(H,۱),(H,۲),(H,۳),(H,۴),(H,۵)\}$

$P(A\cap B')=\frac{۵}{۱۲}$

۲۰ الف)

$$\begin{cases} A: \text{عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد} \\ B: \text{عدد بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد} \\ A=\{۳,۶,۹,\dots,۹۰\}\Rightarrow P(A)=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳} \\ A\cap B=\text{مضرب ۳۰}=\{۳۰,۶۰,۹۰\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۳}{۹۰}=\frac{۱}{۳۰} \end{cases}$$

$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳۰}=\frac{۹}{۳۰}=\frac{۳}{۱۰}$

ب)

$$\begin{cases} A: \text{بر ۳ بخش‌پذیر باشد} \\ B: \text{بر ۵ بخش‌پذیر باشد} \\ A\cup B: \text{بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشد} \end{cases}$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$A=\{۳,۶,۹,\dots,۹۰\}\quad\Rightarrow P(A)=\frac{۳۰}{۹۰}$

$B=\{۵,۱۰,۱۵,\dots,۹۰\}\Rightarrow P(B)=\frac{۱۸}{۹۰}$

$A\cap B=$ بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد $=$ بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد

$=\{۱۵,۳۰,۴۵,۶۰,۷۵,۹۰\}$

$P(A\cap B)=\frac{۶}{۹۰}$

$P(A\cup B)=\frac{۳۰}{۹۰}+\frac{۱۸}{۹۰}-\frac{۶}{۹۰}=\frac{۴۲}{۹۰}=\frac{۷}{۱۵}$

پ)

$$\begin{cases} A: \text{بر ۵ بخش‌پذیر باشد} \\ B: \text{بر ۶ بخش‌پذیر باشد} \\ A'\cap B'= \text{بر ۵ و ۶ بخش‌پذیر نباشد} \end{cases}$$

$A'\cap B'=(A\cup B)'\Rightarrow P(A'\cap B')=P((A\cup B)')$

$=۱-P(A\cup B)$

$$\begin{cases} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ A=\{۵,۱۰,۱۵,\dots,۹۰\}\Rightarrow P(A)=\frac{۱۸}{۹۰} \\ B=\{۶,۱۲,۱۸,\dots,۹۰\}\Rightarrow P(B)=\frac{۱۵}{۹۰} \\ A\cap B=\text{مضرب ۳۰}=\{۳۰,۶۰,۹۰\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۳}{۹۰} \end{cases}$$

$P(A\cup B)=\frac{۱۸}{۹۰}+\frac{۱۵}{۹۰}-\frac{۳}{۹۰}=\frac{۳۰}{۹۰}$

$P(A'\cap B')=\frac{۶۰}{۹۰}=\frac{۲}{۳}$

۲۱

$$\begin{cases} P(a)=۲P(b)=\frac{۳}{۲}P(c) \\ P(a)+P(b)+P(c)=۱ \end{cases}\Rightarrow P(a)+\frac{۱}{۲}P(a)+\frac{۲}{۳}P(a)=۱$$

$$\frac{۱۳}{۶}P(a)=۱\Rightarrow P(a)=\frac{۶}{۱۳}\Rightarrow\begin{cases} P(b)=\frac{۱}{۲}P(a)=\frac{۳}{۱۳} \\ P(c)=\frac{۲}{۳}P(a)=\frac{۴}{۱۳} \end{cases}$$