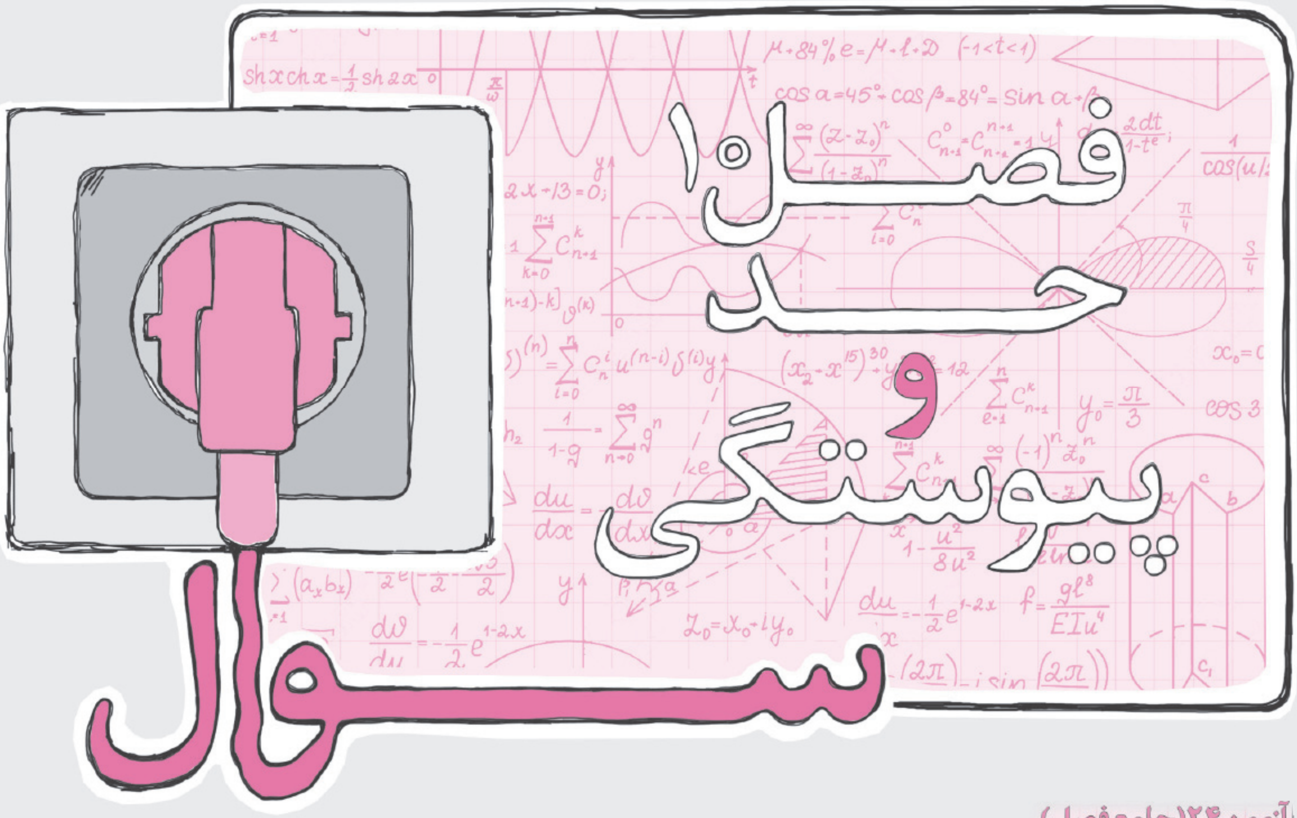
فهرست



آزمون ۲۴ (جامع فصل)

۲۸۱- تابع $f(x)=\dfrac{ax+۳}{[x]}$ **مفروض است. اگر** $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۳$ **باشد،** a **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۲۸۲- به ازای کدام مقدار a **، تابع** f **با ضابطه‌ی** $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۲ & x<-۱\\ \dfrac{x^۲}{a} & x>-۱\end{cases}$ **در** $x=-۱$ **حد دارد؟**

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

۲۸۳- اگر $f(۲x-۱)=\dfrac{x^۲-x-۱}{۴x-۱}$ **، حاصل** $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

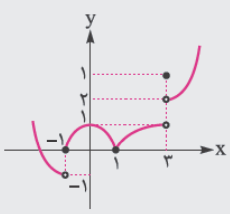
۲۸۴- اگر نمودار تابع f **به صورت مقابل باشد، حاصل** $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(۲-x)$ **کدام است؟**

۱) -۱

۲) ۲

۳) صفر

۴) ۱



۲۸۵- اگر $\dfrac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}<\dfrac{۳x+a}{x-۱}<g(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to ۰}\left(g(x)-\dfrac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}\right)=۰$ **، آنگاه** a **کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۸۶- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲x-\sqrt{۵-x}}{x^۲-۱}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۲۸۷- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{|x^۲+x|}{x^۲-۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۸۸- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos x}{x\tan x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۸۹- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\dfrac{\cot^۲ x-۱}{۲\cos^۲ x-۱}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۹۰- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۲x-\tan ۲x}{x\sin^۲ x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) -۴

۲۹۱- حاصل $\lim\limits_{x\to -۱}\left(\dfrac{۳x-۱}{x^۲-۱}-\dfrac{۲}{x+۱}\right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۲۹۲- حد تابع $f(x)=\dfrac{۱+\sin \pi x}{۴x^۲-۱۲x+۹}$ در $x=\frac{۳}{۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi^۲}{۸}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۸}$ ۳) صفر ۴) $-\frac{\pi^۲}{۱۶}$

۲۹۳- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\dfrac{\sqrt{۱-\sin x}}{\cos x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۹۴- حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x-\pi}{۱+\cos x}$ در $x=\pi$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۲۹۵- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\left(\dfrac{۴}{x^۲-۲x}+\left|\dfrac{x}{x-۲}\right|\right)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۹۶- اگر حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{m+۲}+۳x^{۲m+۱}-m}{nx^{n+۱}+x-۱}$ به ازای $m>۱$ برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۱

۲۹۷- اگر حد تابع $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt{x^۲+۳}}{۲x^n-۲}$ وقتی $x\to+\infty$ برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) صفر ۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۹۸- تابع $f(x)=\begin{cases} a\sin ۳x\ , & \frac{\pi}{۲}<x\leq\pi \\ \sin x+b\cos ۲x\ , & ۰\leq x<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ به ازای $f(\frac{\pi}{۲})=۲$ در فاصله‌ی $[۰,\pi]$ پیوسته است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۲۹۹- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-۲|-|x|}{x-۱} & x\neq ۱\\ a & x=۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است. a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

۳۰۰- تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2-2}{x+1} & , \ |x|<1 \\ bx-b & , \ |x|\geq 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. b کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 1

آزمون ۲۵ (جامع فصل)

۳۰۱- حد راست تابع $f(x)=[|x|]$ در $x=-2$ چه‌قدر از حد چپ آن در $x=1$ بیشتر است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۳۰۲- توابع $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=\dfrac{x}{[x]}$ به ترتیب در $x=1$ چگونه‌اند؟

۱) حد دارد ـ حد دارد. ۲) حد دارد ـ حد ندارد. ۳) حد ندارد ـ حد دارد. ۴) حد ندارد ـ حد ندارد.

۳۰۳- اگر $2-x^2 \leq \dfrac{g(x)+1}{x+3} \leq 2\cos x$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 5 ۳) 3 ۴) 4

۳۰۴- اگر نقطه‌ی $(2,1)$ روی تابع $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{x-1}}{2x+3}$ قرار داشته باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{2}{3}$

۳۰۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1-\cos \pi[x]}{x-2}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) تعریف نشده

۳۰۶- اگر حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{ax}}{x^2-x-2}$ عددی حقیقی باشد، این عدد کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

۳۰۷- حاصل $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x+\sqrt{32-2x}}{4x+8}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{17}{24}$ ۳) $\frac{19}{24}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۳۰۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۳۰۹- حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x+\sqrt{4x^2+3x})$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۱۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|\tan \pi x|}{\sqrt{x}-1}$ کدام است؟

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) 2π ۴) -2π

۳۱۱- حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{\cot x+\sqrt{3}}{\cot x-\sqrt{3}}$ در $x=\dfrac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۳۱۲- حاصل حدهای $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}[x]$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\dfrac{1}{x}]$ کدام است؟

۱) $+\infty$، صفر ۲) $-\infty$، $+\infty$ ۳) صفر، صفر ۴) تعریف نشده، $+\infty$

۳۱۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{[-x]+|x|}{x^2-x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) $-\infty$

۳۱۴- اگر $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x^2+2x|}{ax^2-x+2}=-1$ ، حاصل حد چپ این تابع در $x=-2$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳۱۵- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin 3x}{1+\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $-\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۱۶- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x+1} & , \quad x\neq -1\\ ax+a-1 & , \quad x=-1\end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی ۲) هیچ مقدار حقیقی ۳) -1 ۴) صفر

۳۱۷- اگر $f(x)=\begin{cases}x+1 & , \quad x>1\\ 1 & , \quad x=1\\ x-1 & , \quad x<1\end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x^2+1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۱۸- تابع $f(x)=\begin{cases}4x^2-x & , \quad x\in\mathbb{Z}\\ 3x+2 & , \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ در $x=1$ و $x=\frac{1}{2}$ چگونه است؟

۱) پیوسته - ناپیوسته ۲) ناپیوسته - پیوسته ۳) پیوسته - پیوسته ۴) ناپیوسته - ناپیوسته

۳۱۹- به ازای کدام مقدار k تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-\cos kx}}{\sin x} & , \quad x<0\\ 4\sin(x+\frac{\pi}{6}) & , \quad x\geq 0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) $-2\sqrt{2}$ ۴) هیچ مقدار k

۳۲۰- تابع پیوسته‌ی f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^2+x & , \quad x\geq k\\ 3-x & , \quad x<k\end{cases}$ از نقطه‌ی $(-1,0)$ می‌گذرد. مجموعه مقادیر k کدام است؟

۱) $\{-3\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-3,1\}$ ۴) $\varnothing$

۲۸۱- گزینه۲

نکته در محاسبه‌ی حد توابع شامل قدرمطلق و براکت، ابتدا قدرمطلق را با تعیین علامت و براکت را با تعیین مقدار حذف کنید سپس حد را محاسبه کنید.

محاسبه‌ی حد راست در $x=۲$: وقتی $x \to ۲^+$ مقدار $[x]$ برابر ۲ خواهد بود و در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{ax+۳}{[x]} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{ax+۳}{۲} = \frac{۲a+۳}{۲} \quad (*)$$

محاسبه‌ی حد چپ در $x=۲$: وقتی $x \to ۲^-$، مقدار $[x]$ برابر ۱ خواهد بود و در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{ax+۳}{[x]} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{ax+۳}{۱} = ۲a+۳ \qquad (**)$$

از آن‌جا که $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) - \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = -۳$ بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{۲a+۳}{۲} - (۲a+۳) = -۳$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲a+۳-(۴a+۶) = -۶ \Rightarrow -۲a-۳ = -۶$$

$$\Rightarrow -۲a = -۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

۲۸۲- گزینه۴ برای داشتن حد، باید حدهای چپ و راست با هم برابر باشند. برای محاسبه‌ی حد چپ از ضابطه‌ی بالا و برای محاسبه‌ی حد راست از ضابطه‌ی پایین استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۱)^+} \dfrac{x^۲}{a} = \dfrac{۱}{a} \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۱)^-} (a+۱)x+۲ = -a-۱+۲ = -a+۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a} = -a+۱ \Rightarrow -a^۲+a = ۱ \Rightarrow a^۲-a+۱ = ۰$$

دلتای این معادله منفی است، پس معادله جواب ندارد؛ در نتیجه مقداری برای a نمی‌توان یافت.

۲۸۳- گزینه۱

تذکر *این سؤال مشابه تمرین کتابه. تا حالا هم ازش تو کنکور تستی مطرح نشده، یه کم مراقبش باش.*

برای محاسبه‌ی این حد، یک روش این است که ابتدا $f(x)$ را بیابیم و سپس حد آن را در $x=۰$ محاسبه کنیم. اما یک روش بهتر هم داریم: در حد $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$، عبارت داخل پرانتز به صفر میل می‌کند؛ پس اگر کاری کنیم که در $f(۲x-۱) = \frac{x^۲-x-۱}{۴x-۱}$، عبارت داخل پرانتز به صفر میل کند می‌توانیم حد را محاسبه کنیم: $۲x-۱ \to ۰ \Rightarrow x \to \frac{۱}{۲}$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{x^۲-x-۱}{۴x-۱} = \frac{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}-۱}{۲-۱} = -\frac{۵}{۴}$$

۲۸۴- گزینه۲ حد داده‌شده، همان حد تابع fog است. پس اول ببینیم تابع داخلی به چه عددی و از چه سمتی نزدیک می‌شود:

$$x \to (-۱)^- \Rightarrow (۲-x) \to ۳^+$$

اگر با این قضیه مشکل دارید از عددگذاری هم می‌توانید استفاده کنید:

$$x \to (-۱)^- \Rightarrow \text{فرض}: x = -۱/۰۱ \Rightarrow ۲-x = ۳/۰۱$$

یعنی $۲-x$ از ۳ کمی بیشتر است. برگردیم به حل مسئله. با توجه به محاسبات بالا: $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(۲-x) = \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$

با توجه به نمودار، حد راست تابع f در $x=۳$ برابر ۲ است.

۲۸۵- گزینه۱ *قبل از هر چیز اینو بگم که اگه تو تست‌های هر، حالت $\square \le \square \le \square$ رو دیدی، قضیه‌ی فشردگی یادت بیاد.*

پس در این‌جا با قضیه‌ی فشردگی روبه‌رو هستیم. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰} g(x) - \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x} = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}$$

پس با توجه به این که $g(x) < \frac{۳x+a}{x-۱} < \frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}$ و با توجه به تساوی بالا و طبق قضیه‌ی فشردگی:

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{۳x+a}{x-۱} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x} \qquad (*)$$

حد $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}$ دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است، بنابراین برای رفع ابهام از هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}}{۱} = \frac{۱}{۴}$$

و در نهایت با توجه به (*):

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۳x+a}{x-۱} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x} \Rightarrow \frac{۰+a}{۰-۱} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۲۸۶- گزینه۲

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲x-\sqrt{۵-x}}{x^۲-۱} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام هوپیتال می‌گیریم:

$$\text{حد} = \lim_{x\to ۱} \frac{۲-\left(\frac{-۱}{۲\sqrt{۵-x}}\right)}{۲x} = \frac{۲-\left(\frac{-۱}{۴}\right)}{۲} = \frac{\frac{۹}{۴}}{۲} = \frac{۹}{۸}$$

۲۸۷- گزینه۱ اول باید قدرمطلق را با کمک تعیین علامت حذف کنیم:

$$|x^2+x|=|x(x+1)|=|x||x+1|$$

$$x\to0^- \Rightarrow |x||x+1|=(-x)(x+1)=-x^2-x$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x^2+x|}{x^2-2x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^2-x}{x^2-2x}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام هوپیتال می‌گیریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to0^-}\frac{-2x-1}{2x-2}=\frac{1}{2}$$

می‌توانید برای رفع ابهام از هم‌ارزی جمله‌ی کوچک‌تر نیز استفاده کنید:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{-x^2-x}{x^2-2x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{-2x}=\frac{1}{2}$$

۲۸۸- گزینه۴

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، از هم ارزی‌ها کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x(x)}=\frac{1}{2}$$

۲۸۹- گزینه۳

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cot^2x-1}{2\cos^2x-1}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام می‌توانیم از یکی از دو روش زیر استفاده کنیم:

① استفاده از هوپیتال‌گیری:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cot^2x-1}{2\cos^2x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cot x(-(1+\cot^2x))}{2(2\cos x)(-\sin x)}$$

$$=\frac{2\cot\frac{\pi}{4}(-(1+\cot^2\frac{\pi}{4}))}{2(2\cos\frac{\pi}{4})(-\sin\frac{\pi}{4})}=\frac{2(1)(-(1+1))}{2(2(\frac{\sqrt2}{2}))(-\frac{\sqrt2}{2})}=\frac{-4}{-2}=2$$

② از روابط مثلثاتی $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ، $\cos2x=2\cos^2x-1$ و $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cot^2x-1}{2\cos^2x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos^2x}{\sin^2x}-1}{\cos2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin^2x}}{\cos2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos2x}{\sin^2x}}{\cos2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2x}=\frac{1}{(\frac{\sqrt2}{2})^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

۲۹۰- گزینه۴ *باز هم یک تمرین مهم کتاب درسی که تا حالا تو کنکور نیومده!* حد داده شده ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. برای رفع ابهام از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tan u-\sin u\underset{u\to0}{\sim}\frac{u^3}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x-\tan2x}{x(\sin^2x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{(2x)^3}{2}}{x(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-4x^3}{x^3}=-4$$

۲۹۱- گزینه۳

$$\lim_{x\to-1}(\frac{3x-1}{x^2-1}-\frac{2}{x+1})=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to-1}(\frac{3x-1}{x^2-1}-\frac{2}{x+1})=\lim_{x\to-1}(\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x+1})$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{3x-1-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x-1-2x+2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$$

۲۹۲- گزینه۲ حد داده شده ابهام $\frac{0}{0}$ دارد، بنابراین هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{1+\sin\pi x}{4x^2-12x+9}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\pi\cos\pi x}{8x-12}=\frac{\pi\cos\frac{3\pi}{2}}{8(\frac{3}{2})-12}=\frac{0}{0}$$

چون هم‌چنان ابهام $\frac{0}{0}$ داریم، باز هم هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\pi\cos\pi x}{8x-12}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{-\pi^2\sin\pi x}{8}=\frac{-\pi^2\sin\frac{3\pi}{2}}{8}$$

$$=\frac{(-\pi^2)(-1)}{8}=\frac{\pi^2}{8}$$

۲۹۳- گزینه۴ حد داده شده ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. اما در این‌جا چون حد عبارت زیر رادیکال صفر شده، بنابراین استفاده از روش هوپیتال کمکی در حل نمی‌کند. بنابراین از روش تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases}x-\frac{\pi}{2}=t\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+t\\ x\to\frac{\pi}{2}^-\ \Rightarrow\ t\to0^-\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\cos x}=\lim_{t\to0^-}\frac{\sqrt{1-\sin(\frac{\pi}{2}+t)}}{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}$$

حال از روابط نسبت‌های $\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos t\ ,\ \cos(\frac{\pi}{2}+t)=-\sin t$$

پس حد بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{حد}=\lim_{t\to0^-}\frac{\sqrt{1-\cos t}}{-\sin t}=\frac{0}{0}$$

حال می‌توانیم از هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم:

$$\text{حد}=\lim_{t\to0^-}\frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}}}{-t}=\lim_{t\to0^-}\frac{\frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt2}}{-t}=\lim_{t\to0^-}\frac{\frac{|t|}{\sqrt2}}{-t}$$

$$\xrightarrow[|t|=-t]{t\to0^-}\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{-t}{\sqrt2}}{-t}=\frac{1}{\sqrt2}=+\frac{\sqrt2}{2}$$

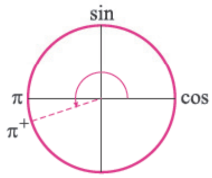
۲۹۴- گزینه۳

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{x-\pi}{1+\cos x}=\frac{0}{0}$$

حال برای رفع ابهام هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{x-\pi}{1+\cos x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{-\sin x}$$

به ازای $x=\pi$، مخرج صفر می‌شود. پس حاصل حد بالا برابر ∞ است. اما باید تشخیص دهیم $+\infty$ است یا $-\infty$. وقتی $x\to\pi^+$ کمان سینوس در ناحیه‌ی سوم قرار دارد. چون $\sin x$ در ناحیه‌ی سوم مقادیر منفی دارد. بنابراین:



$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{-\sin x}=\frac{1}{-(0^-)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۲۹۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا باید قدرمطلق را با تعیین علامت حذف کنیم:

$$x\to 2^-\Rightarrow \left|\frac{x}{x-2}\right|=\frac{\overset{+}{\overbrace{|x|}}}{\underset{-}{\underbrace{|x-2|}}}=\frac{x}{-(x-2)}$$

پس حد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{4}{x^2-2x}+\frac{x}{-(x-2)}\right)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{4}{x^2-2x}-\frac{x}{x-2}\right)=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{4}{x(x-2)}-\frac{x}{x-2}\right)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{4-x^2}{x(x-2)}\right)=\frac{0}{0}$$

نوع ابهام تغییر کرد. برای رفع ابهام صورت را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2^-}\frac{4-x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x^2-4)}{x(x-2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x+2)}{x}=\frac{-4}{2}=-2$$

۲۹۶- گزینه‌ی ۱ ابهام حد از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ است. پس برای رفع ابهام از هم‌ارزی جمله‌ی بزرگ‌تر استفاده می‌کنیم. به ازای $m>1$، توان $2m+1$ بزرگ‌تر از $m+2$ است. (می‌توانید یک مقدار دلخواه مثلاً $m=2$ قرار بدین ببینین کدوم بزرگتره) پس در صورت، جمله‌ی $3x^{2m+1}$، جمله‌ی بزرگ‌تر است. در مخرج هم به طور قطع، جمله‌ی nx^{n+1} جمله‌ی بزرگ‌تر است. (چون به ازای $m>1$ درجه‌ی صورت بزرگ‌تر از ۳ است. پس تو مخرج، x نمی‌تونه جمله‌ی بزرگ‌تر باشه. اگر باشه حاصل حد $\frac{1}{2}$ نمیشه بلکه ∞ میشه). در نتیجه:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{2m+1}}{nx^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

دو تا کار دیگر برای پیدا کردن جواب داریم:

۱ چون حاصل حد، عدد حقیقی و غیرصفر است. باید x ها با هم ساده شوند. پس باید توان‌های آن‌ها برابر باشند:

$$2m+1=n+1\Rightarrow 2m=n \qquad (*)$$

۲ بعد از ساده شدن x ها با هم:

$$\text{حد}=\frac{3}{n}=\frac{1}{2}\Rightarrow n=6\xrightarrow{(*)}2m=6\Rightarrow m=3$$

۲۹۷- گزینه‌ی ۲ اول باید a و n را محاسبه کنیم. با هم‌ارزی جمله‌ی بزرگ‌تر رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt{x^2+3}}{2x^n-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt{x^2}}{2x^n}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\overset{+}{\overbrace{|x|}}}{2x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-x}{2x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a-1)}{2x^n}$$

چون حاصل حد برابر $\frac{1}{2}$ است، پس باید x ها با هم ساده شوند. بنابراین:

$n=1$

در نتیجه با حذف x ها داریم: (دقت کنید که حاصل حد $\frac{1}{2}$ است.)

$$\frac{a-1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=2$$

حال این مقادیر را در تابع جای‌گذاری کرده و حاصل حد تابع را در $x=1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{2x-2}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{2x-2}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام هوپیتال می‌گیریم:

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

۲۹۸- گزینه‌ی ۴ برای این که تابع در فاصله‌ی $[0,\pi]$ پیوسته باشد، باید در $x=\frac{\pi}{2}$ (مرز ضابطه‌ها) هم پیوسته باشد؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x+b\cos 2x)=1-b$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}a\sin 3x=a\sin\frac{3\pi}{2}=-a$$

$$f(\frac{\pi}{2})=2$$

برای پیوسته‌بودن باید:

$$1-b=2=-a\Rightarrow\begin{cases}1-b=2\Rightarrow b=-1\\ 2=-a\Rightarrow a=-2\end{cases}\Rightarrow a+b=-3$$

۲۹۹- گزینه‌ی ۱ برای محاسبه‌ی حد تابع در $x=1$ از ضابطه‌ی بالا باید استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\overset{-}{\overbrace{|x-2|}}-\overset{+}{\overbrace{|x|}}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-x+2-x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2$$

چون $f(1)=a$، پس برای پیوسته بودن باید: $a=-2$

۳۰۰- گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\begin{cases}\frac{ax^2-2}{x+1}, & |x|<1\Rightarrow -1<x<1\\ bx-b, & |x|\ge1\Rightarrow x\le-1 \text{ یا } x\ge1\end{cases}$$

برای این که تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید در نقاط $x=1$ و $x=-1$ نیز پیوسته باشد.

در $x=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(bx-b)=0=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax^2-2}{x+1}=\dfrac{a-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a-2}{2}=0 \Rightarrow a=2$$

در $x=-1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to (-1)^-}(bx-b)=-2b=f(-1) \\ \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{2x^2-2}{x+1}\xrightarrow[\text{HOP}]{\text{ابهام}:\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{4x}{1}=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2b=-4 \Rightarrow b=2$$

۳۰۱- گزینه ۲ حد چپ در $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1^-}[|x|]=[1^-]=0$

حد راست در $x=-2$: $\lim\limits_{x\to (-2)^+}[|x|]=[2^-]=1$

(می‌توانید با فرض $(-2)^+=-1/99$ حاصل حد بالا را راحت‌تر محاسبه کنید.)

بنابراین: $(\text{حد چپ در } x=1)-(\text{حد راست در } x=-2)=0-1=-1$

۳۰۲- گزینه ۳ چون در هر دو تابع، جزء صحیح داریم، برای محاسبه‌ی حد آن‌ها، جزء صحیح‌ها تعیین مقدار شوند. پس باید حد چپ و راست بگیریم:

(۱) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+[x])$

$$=\begin{cases} \text{حد راست}: \lim\limits_{x\to 1^+}(x+[x])=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+[1^+])=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2 \\ \text{حد چپ}: \lim\limits_{x\to 1^-}(x+[x])=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+[1^-])=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+0)=1 \end{cases}$$

چون حدهای چپ و راست در $x=1$ برابر نیستند پس تابع در $x=1$ حد ندارد.

(۲) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{[x]}$

$$=\begin{cases} \text{حد راست}: \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{[x]}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{[1^+]}=\lim\limits_{x\to 1^+}x=1 \\ \text{حد چپ}: \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{[x]}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{[1^-]}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{0}: \text{تعریف‌نشده} \end{cases}$$

نکته اگر یکی از حدهای چپ یا راست تابع در $x=a$ تعریف نشده باشد، حد تابع برابر حد طرف دیگر است. چون در این‌جا حد چپ، تعریف نشده است، بنابراین: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=1$

۳۰۳- گزینه ۲ با دیدن نامساوی‌ها، یادی از قضیه‌ی فشردگی می‌کنیم: $\lim\limits_{x\to 0}(2-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}2\cos x=2$

پس طبق قضیه‌ی فشردگی، حد تابع $y=\dfrac{g(x)+1}{x+3}$ هم در $x=0$ باید برابر ۲ باشد.

$$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+1}{x+3}=2 \Rightarrow \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}g(x)+1}{\lim\limits_{x\to 0}(x+3)}=2$$

$$\Rightarrow \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}g(x)+1}{3}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}g(x)+1=6 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}g(x)=5$$

۳۰۴- گزینه ۱ نقطه‌ی $(2,1)$ روی تابع قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند: $f(2)=1 \Rightarrow \dfrac{2a+\sqrt{2-1}}{2(2)+3}=1 \Rightarrow \dfrac{2a+1}{7}=1 \Rightarrow a=3$

پس: $f(x)=\dfrac{3x+\sqrt{x-1}}{2x+3}$

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+\sqrt{x-1}}{2x+3}=\dfrac{\infty}{\infty}$

با کمک هم‌ارزی جمله‌ی بزرگ‌تر: حاصل حد $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

۳۰۵- گزینه ۲ اول تعیین مقدار براکت را انجام می‌دهیم:

$$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1-\cos\pi[x]}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1-\cos\pi[2^-]}{x-2}$$

$$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1-\cos\pi}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1-(-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$$

۳۰۶- گزینه ۲ چون حد مخرج وقتی $x\to 2$ برابر صفر است و حاصل حد، عددی حقیقی است، پس باید حد صورت هم صفر شود تا ابهام $\frac{0}{0}$ ایجاد شود (در غیر این صورت حاصل حد ∞ می‌شد).

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}(x-\sqrt{ax})=0 \Rightarrow 2-\sqrt{2a}=0 \Rightarrow a=2$$

با جای‌گذاری مقدار a، حاصل حد را می‌یابیم. چون ابهام $\frac{0}{0}$ است از هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{2x}}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\dfrac{2}{2\sqrt{2x}}}{2x-1}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{4}}}{3}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{3}=\dfrac{1}{6}$$

۳۰۷- گزینه ۲

$$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+\sqrt{32-2x}}{4x+8}=\dfrac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3+\dfrac{-2}{2\sqrt{32-2x}}}{4}=\dfrac{3-\dfrac{2}{2(6)}}{4}=\dfrac{3-\dfrac{1}{6}}{4}=\dfrac{\dfrac{17}{6}}{4}=\dfrac{17}{24}$$

۳۰۸- گزینه ۱ ابهام $\frac{0}{0}$ است. از دو روش می‌توانیم استفاده کنیم:

(۱) صورت را گویا می‌کنیم:

$$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\times\dfrac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-(1-x^2)}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)+x^2}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-x^2})}$$

با کمک هم‌ارزی $1-\cos u \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$:

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}+x^2}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{1+1}=\dfrac{1}{4}$$

(۲) هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2x}$$

حال از هم‌ارزی $\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$ استفاده می‌کنیم:

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x(-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{1}{4}$$

۳۰۹- گزینه۳ ابهام از نوع $\infty-\infty$ است. برای رفع ابهام از هم‌ارزی رادیکالی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+3x})=\lim_{x\to-\infty}(2x+(\sqrt{4}|x+\frac{3}{2(4)}|))$$

چون $x\to-\infty$، عبارت داخل قدرمطلق، علامت منفی دارد. بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+2|x+\frac{3}{8}|)=\lim_{x\to-\infty}(2x-2x-\frac{3}{4})=-\frac{3}{4}$$

۳۱۰- گزینه۳ اول باید قدرمطلق را با تعیین علامت حذف کنیم: $x\to1^+ \Rightarrow \pi x\to\pi^+$

پس کمان تانژانت در ناحیه‌ی سوم قرار دارد. چون تانژانت در این ناحیه مثبت است؛ بنابراین:

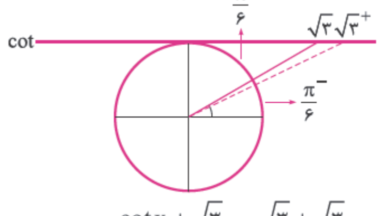
$$\lim_{x\to1^+}\frac{\overbrace{|\tan\pi x|}^{+}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\tan\pi x}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1^+}\frac{\pi(1+\tan^2\pi x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\pi(1+0)}{\frac{1}{2(1)}}=2\pi$$

۳۱۱- گزینه۴ مشابه تمرین کتاب و مورد بسیار خوبی برای طرح در کنکور است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}\frac{\cot x+\sqrt{3}}{\cot x-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{0}=\infty$$

اما باید $+\infty$ یا $-\infty$ بودنِ حد را مشخص کنیم. بنابراین از دایره‌ی مثلثاتی کمک می‌گیریم. با توجه به شکل زیر وقتی $x\to\frac{\pi}{6}^-$، کتانژانت با مقادیر بیشتر از $\sqrt{3}$ به $\sqrt{3}$ نزدیک می‌شود. بنابراین:



$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}\frac{\cot x+\sqrt{3}}{\cot x-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}^+-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{0^+}=+\infty$$

۳۱۲- گزینه۱

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}[x]=\lim_{x\to0^-}(\frac{1}{x})[0^-]=\lim_{x\to0^-}(\frac{1}{x}(-1))=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

صفر مطلق $\lim_{x\to+\infty}x[\frac{1}{x}]=\lim_{x\to+\infty}x[0^+]=\lim_{x\to+\infty}x(0)=0$

۳۱۳- گزینه۲ براکت را با تعیین مقدار و قدرمطلق را با تعیین علامت حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{[-x]+|x|}{x^2-x}=\lim_{x\to0^-}\frac{[0^+]+(-x)}{x^2-x}=\lim_{x\to0^-}\frac{0-x}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

۳۱۴- گزینه۳

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{|x^2+2x|}^{+}}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{ax^2}=\frac{1}{a}$$

چون حاصل حد برابر ۱- است. بنابراین: $\frac{1}{a}=-1 \Rightarrow a=-1$

حال حد چپ تابع را در $x=-2$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{|x^2+2x|}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{|x(x+2)|}{-x^2-x+2}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{\overbrace{|x|}^{-}\overbrace{|x+2|}^{-}}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(-x)(-(x+2))}{-x^2-x+2}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x^2+2x}{-x^2-x+2}$$

ابهام حد از نوع $\frac{0}{0}$ است. برای رفع ابهام، هوپیتال می‌گیریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{2x+2}{-2x-1}=\frac{-2}{3}$$

۳۱۵- گزینه۲ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 3x}{1+\cos 2x}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$

هوپیتال می‌گیریم: $\text{حد}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos 3x}{-2\sin 2x}=\frac{3\cos\frac{3\pi}{2}}{-2\sin\pi}=\frac{0}{0}$

باز هم هوپیتال می‌گیریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-9\sin 3x}{-4\cos 2x}=\frac{-9\sin\frac{3\pi}{2}}{-4\cos\pi}=\frac{(-9)(-1)}{(-4)(-1)}=\frac{9}{4}$$

۳۱۶- گزینه۱

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x+1})=\infty-\infty$$

توضیح به ظاهر $\lim_{x\to-1}(\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x-1})=\infty+\infty=+\infty$ است. اما اگر حد چپ یا راست بگیرید به حالت مبهم $\infty-\infty$ می‌رسید. پس به طور کلی در مجموع یا تفاضل دو عبارت کسری که حد کسر برابر بی‌نهایت است مسئله را با مخرج‌مشترک‌گیری حل کنید. (چون بررسی حد چپ و راست زمان‌بر است و معمولاً در تست‌های کنکور حالت $\infty-\infty$ مدنظر است.)

برای رفع ابهام، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x}=-1$$

از طرفی مقدار تابع در $x=-1$ برابر است با: $f(-1)=-a+a-1=-1$

چون همواره $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$ ، بنابراین به ازای هر مقدار a تابع در $x=-1$ پیوسته است.

۳۱۷- گزینه ۳

$$x\to 0^+ \Rightarrow x^2+1\to 1^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x^2+1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

با توجه به ضابطه‌ی f، برای محاسبه‌ی حد راست f در $x=1$ باید از ضابطه‌ی بالا کمک بگیریم: $\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$

۳۱۸- گزینه ۲ بررسی پیوستگی در $x=\frac{1}{2}$:

چون $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ برای محاسبه‌ی حد چپ، راست و مقدار تابع باید از ضابطه‌ی پایین استفاده کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)=3(\frac{1}{2})+2=\frac{7}{2}\\ f(\frac{1}{2})=3(\frac{1}{2})+2=\frac{7}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

بررسی پیوستگی در $x=1$: در این‌جا برای محاسبه‌ی حد از ضابطه‌ی پایین و برای محاسبه‌ی مقدار باید از ضابطه‌ی بالا استفاده کنیم: (دقت کنید وقتی $x\to 1^+$ یا $x\to 1^-$، مقادیر x صحیح نیست چون به یک نمی‌رسند)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5\\ f(1)=4(1)^2-1=3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f در $x=1$ ناپیوسته است.

۳۱۹- گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos kx}}{\sin x}=\frac{0}{0}$$

از هم‌ارزی‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos kx}}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{(kx)^2}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{k^2x^2}{2}}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{|k||x|}{\sqrt{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|k|(-x)}{\sqrt{2}x}=-\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 4\sin(x+\frac{\pi}{6})=4\sin\frac{\pi}{6}=2=f(0)$$

پس برای پیوستگی در $x=0$ باید:

$\frac{-|k|}{\sqrt{2}}=2 \Rightarrow |k|=-2\sqrt{2}$:این معادله جواب ندارد

پس این تابع در $x=0$ پیوسته نخواهد بود.

۳۲۰- گزینه ۱ چون f پیوسته است باید در $x=k$ هم پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to k^+} f(x)=f(k)=k^2+k\\ \lim\limits_{x\to k^-} f(x)=3-k\end{cases}\Rightarrow k^2+k=3-k$$

$$\Rightarrow k^2+2k-3=0 \Rightarrow k=1,-3$$

حال هر کدام را امتحان می‌کنیم. برای امتحان کردن باید به این نکته توجه کنید که تابع از نقطه‌ی $(-1,0)$ می‌گذرد:

$$k=1: f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\geq 1\\ 3-x, & x<1\end{cases}\Rightarrow f(-1)=3-(-1)=4\neq 0$$

$\Rightarrow$ $k=1$ قابل قبول نیست.

$$k=-3: f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\geq -3\\ 3-x, & x<-3\end{cases}\Rightarrow f(-1)=(-1)^2-1=0\ \checkmark$$

$\Rightarrow$ $k=-3$ قابل‌قبول است.