

# فهرست



۷

۲۷

**فصل اول: منطق و استدلال ریاضی**

پاسخنامه فصل اول

۴۰

۶۴

**فصل دوم: تابع**

پاسخنامه فصل دوم



۷۹

۸۹

**فصل سوم: تحلیل داده‌ها**

پاسخنامه فصل سوم

۹۵

۱۰۲

۱۰۶

۱۱۱

۱۱۹

**خلاصه فصل‌ها**

امتحان‌های نیم‌سال اول

پاسخنامه امتحان‌های نیم‌سال اول

امتحان‌های نیم‌سال دوم

پاسخنامه امتحان‌های نیم‌سال دوم



## منطق ریاضی و گزاره‌ها

### تعریف منطق

منطق در لغت به معنی کلمه و گفتار است (از نطق می‌آید). ولی از نظر فلاسفه و منطق‌دانان، به معنی قانون درست فکر کردن است. به عبارت دیگر می‌توان گفت:

1 منطق، استدلال‌ها را بررسی می‌کند و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص می‌کند؛ زیرا اگر برای اثبات یک موضوع، استدلال‌های ما نادرست باشند نتیجه به دست آمده هم، قابل قبول نخواهد بود.

2 منطق، ابزاری است از نوع قاعده و قانون که به کار بردن آن، ذهن را از خطای در تفکر مصون نگه می‌دارد.

**نکته:** اولین نفری که قواعد ذهن انسان را به دست آورد و با ترتیبی خاص، دسته‌بندی کرد، ارسطو بود.

### تعریف منطق ریاضی

به نظر شما کاربرد دستور زبان فارسی چیست؟ حتماً پاسخ می‌دهید که دستور زبان فارسی، علمی است که روش درست گفتن و درست نوشتن را به ما می‌آموزد. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است. به عبارت دیگر، منطق ریاضی روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

### ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی، گزاره، جمله‌ای است خبری که می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد هر چند که ممکن است از درستی یا نادرستی آن، اطلاعی نداشته باشیم. مثلاً:

« $2$  عددی اول است.» ← یک گزاره با ارزش درست است.

« $5^2 > 3^3$ » ← یک گزاره با ارزش نادرست است چون  $25$  کوچک‌تر از  $27$  است.

«بیشتر درس بخوان.» ← گزاره نیست. (جمله امری است.)

«چه ماشین زیبایی!» ← گزاره نیست. (جمله عاطفی است.)

«شما امسال کنکور می‌دهید؟» ← گزاره نیست. (جمله پرسشی است.)

سوال (شاعر): ببخشید مگه  $5^2 > 3^3$  جمله خبری محسوب می‌شه؟ من که کلمه فارسی توش نمی‌بینم!

دیر، فرب شما ( $5^2 > 3^3$ ) رو چه خبری می‌فونی؟ مگه نمی‌گی، « $5^2$  بزرگ‌تر از  $3^3$  است.» پس دیری که ( $5^2 > 3^3$ ) یه جمله خبریه و هتماً لازم نیست جمله، فارسی باشه. فیلی وقتاً از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنیم.

**تذکره مهم:** در بعضی از جملات خبری، نمی‌توانیم درباره درستی یا نادرستی آن‌ها اظهار نظر کنیم؛ لذا آن‌ها را گزاره محسوب نمی‌کنیم؛ مثلاً جمله خبری «متوازی‌الاضلاع، زیباترین شکل هندسی است.» گزاره محسوب نمی‌شود؛ چون زیبایی، موضوعی سلیقه‌ای است و اصولاً از نظر منطق ریاضی، جمله مذکور، قابل ارزش‌گذاری نیست.

## مثال و پاسخ

**مثال:** کدام یک از جملات و عبارات زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

**الف** کباب، خوشمزه تر از پیتزا است. **ب** عدد  $\sqrt{3}$  گویا است.

**پ** افلاطون، شاگرد سقراط بود. **ت** اصالت شما برای کدام شهر است؟

**ث** عدد  $(-2)^n$  عددی منفی است. ( $n \in \mathbb{N}$ ) **ج**  $-10 \geq -3$

**ح**  $0/2 \times \frac{1}{4} = 0/1$  **چ** کوچک ترین عدد طبیعی دورقمی مربع کامل، عدد ۱۶ است.

**پاسخ:** الف گزاره نیست. (برای مقایسه مزه غذاها نمی توانیم ارزش گذاری کنیم.)

**ب** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون  $\sqrt{3}$  گنگ است.

**پ** گزاره است و ارزش آن، درست است.

**ت** گزاره نیست. (جمله پرسشی است.)

**ث** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون اگر  $n$  زوج باشد، حاصل  $(-2)^n$  مثبت می شود و اگر  $n$  فرد باشد، حاصل  $(-2)^n$  منفی می شود.

**ج** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون  $-10$  کوچک تر از  $-3$  است.

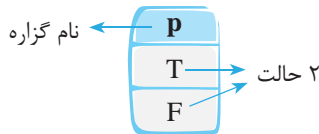
**ح** گزاره است و ارزش آن، درست است زیرا:  $0/2 \times \frac{1}{4} = 0/1$

**چ** گزاره است و ارزش آن، درست است؛ چون اولاً ۱۶ مربع کامل است؛ یعنی جذر کامل دارد ( $\sqrt{16} = 4$ ) و ثانیاً ۱۶ کوچک ترین عدد طبیعی دورقمی است که این خاصیت را دارد.

## جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها)

در منطق ریاضی، هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی کوچک مانند  $p, q, r, s$  و ... نمایش می دهیم. ضمناً بعضی گزاره‌ها خود، ترکیبی از دو یا چند گزاره دیگر هستند که به آن‌ها گزاره‌های ترکیبی (مرکب) می گوئیم. کمی جلوتر با انواع گزاره‌های ترکیبی آشنا می شوئید. جبر گزاره‌ها کارش این است که به وسیله یک سری قراردادهای و نمادگذاری‌ها ارزش یک گزاره را تعیین می کند.

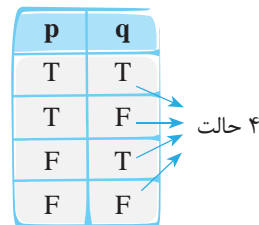
در جدول‌های زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده‌اند. ارزش درست یک گزاره را با «د» یا «T» و ارزش نادرست آن را با «ن» یا «F» نمایش می دهیم. (True یعنی درست و False یعنی نادرست.)



$2 = 2^1 =$  تعداد حالت‌های ارزشی یک گزاره

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

$8 = 2^3 =$  تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره



$4 = 2^2 =$  تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره

**نتیجه:** اگر تعداد گزاره‌ها  $n$  باشد، در جدول ارزشی آن‌ها، تعداد حالت‌ها برابر با  $2^n$  خواهد بود؛ مثلاً اگر تعداد گزاره‌ها ۴ باشد، در جدول ارزشی مربوط به آن‌ها  $2^4 = 16$  حالت مختلف وجود دارد.

### نقیض یک گزاره

P	~P
T	F
F	T

نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش آن گزاره باشد. نقیض یک گزاره مثل  $p$  را با نماد  $\sim p$  نمایش می‌دهیم.  $\sim p$  را این‌طور می‌خوانیم: «چنین نیست که  $p$ »، یا «نقیض  $p$ ». جدول ارزش نقیض یک گزاره نسبت به خود آن گزاره به شکل روبه‌رو است:

اگر گزاره ساده  $p$  به شکل یک جمله فارسی باشد، برای ساختن نقیض آن، بهترین روش این است که فعل جمله را نقیض کنیم؛ البته این کار، تنها راه ساختن نقیض نیست؛ مثلاً نقیض گزاره «۶ عددی زوج است»، را به ۳ صورت می‌توان بیان کرد:

- نقیض ← چنین نیست که عدد ۶ عددی زوج باشد.
- نقیض ← عدد ۶ عددی زوج نیست. (بهترین جمله)
- نقیض ← عدد ۶ عددی فرد است.

**تذکره مهم:** گاهی اوقات، گزاره ساده مورد نظر، شامل یک نماد ریاضی است که نقیض این نماد طبق جدول زیر، تعیین می‌شود:

نماد ریاضی	<	>	≤	≥	=	≠	∈	∉	⊆	⊄
نقیض نماد	≥	≤	>	<	≠	=	∉	∈	⊄	⊆

مثلاً نقیض گزاره  $5x + 2 = \frac{1}{3}$  برابر است با:  $5x + 2 \neq \frac{1}{3}$  یا نقیض گزاره  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  عبارت است از:  $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$ ؛ هم‌چنین نقیض گزاره  $8 \geq 3$  برابر است با  $8 < 3$ .

### مثال و پاسخ

**مثال:** نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید؛ سپس ارزش درستی هر گزاره و نقیضش را تعیین کنید:

- الف** ۵۱ عددی اول است. **پ**  $2^3 + 2^4 = 2^5$
- ب** کسر  $\frac{5x}{x^2 - 3}$  گویا است. **ت**  $(4 \times 9) > (5 \times 6)$
- ج**  $4 \in \mathbb{N}$  **ث** عددی مثبت است.

**پاسخ:** **الف** ۵۱ عددی اول است. ← نقیض ← ۵۱ عددی اول نیست. (چنین نیست که ۵۱ عددی اول باشد).  
 نادرست (F) ← درست (T)

**ب** می‌دانیم که:  $2^3 = 8$ ،  $2^4 = 16$  و  $2^5 = 32$ ؛ لذا  $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24 \neq 32 = 2^5$ ؛ بنابراین گزاره داده شده نادرست است و نقیض آن برابر است با:  $2^3 + 2^4 \neq 2^5$  و ارزش گزاره نقیض، درست است.

**پ** کسر  $\frac{5x}{x^2 - 3}$  گویا است. ← نقیض ← کسر  $\frac{5x}{x^2 - 3}$  گویا نیست.  
 درست (T) ← نادرست (F)

**ت**  $36 > 30$  ← نقیض ←  $36 \leq 30$   
 درست (T) ← نادرست (F)

**ث**  $4 \in \mathbb{N}$  ← نقیض ←  $4 \notin \mathbb{N}$   
 درست (T) ← نادرست (F)

**ج** عددی مثبت است. ← نقیض ← عددی مثبت نیست. (چنین نیست که  $a$  عددی مثبت باشد).  
 نامعلوم ← نامعلوم

a عددی مثبت است.	a عددی مثبت نیست.
T	F
F	T

ارزش گزاره «a عددی مثبت است.» معلوم نیست؛ چون مقدار a به ما داده نشده است؛ یعنی با توجه به مقدار a، گزاره مورد نظر، می تواند درست یا نادرست باشد.

سؤال (شاگرد): استاد نمی شه بگیم نقیض گزاره «a عددی مثبت است.» می شه؛ «a عددی منفی است.»؟  
 دبیر: به نظرت آیا هر عددی که مثبت نباشه، منفیه؟ فیر، صفر مثبت نیست ولی منفی هم نیست. به عبارت دیگه، وقتی a مثبت نباشه، یا منفیه یا صفر ولی «a عددی منفی است.» صفر رو شامل نمی شه. پس نقیض گزاره «a عددی مثبت است» عبارت است از: «a عددی مثبت نیست» یا «a عددی منفی یا صفر است.»

### گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره p و q یکسان باشد به آن‌ها گزاره‌های هم‌ارز می‌گوییم و این موضوع را به صورت  $p \equiv q$  نمایش می‌دهیم؛ یعنی p هر ارزشی داشته باشد (درست یا نادرست) q هم همان ارزش را دارد؛ مثلاً گزاره‌های «۲۵ عددی مربع کامل است.» و « $-3 \in \mathbb{Z}$ » هم‌ارز هستند؛ زیرا هر دوی آن‌ها ارزش درست (T) دارند.  
 هم‌چنین گزاره‌های « $\sqrt{3} > 3$ » و « $(-5)^2 = -25$ » هم‌ارز می‌باشند؛ چون هر دوی آن‌ها دارای ارزش نادرست (F) هستند. واضح است که اگر  $p \equiv q$  باشد، نقیض‌های آن‌ها نیز هم‌ارزند؛ یعنی:  $\sim p \equiv \sim q$ .

### مثال و پاسخ

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را به شکل هم‌ارزی بنویسید.

الف  $(\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}$

ب  $2^{10} > 2^{14}$

پ  $x = y$

پاسخ

الف  $\sim [(\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}] \equiv (\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$

ب  $\sim (2^{10} > 2^{14}) \equiv (2^{10} \leq 2^{14})$

پ  $\sim (x = y) \equiv (x \neq y)$

تکرار: نقیض نقیض یک گزاره، هم‌ارز با همان گزاره است؛ یعنی:  $\sim(\sim p) \equiv p$

(این موضوع شما رو یادچی میندازه؟ بله! منفی در منفی، می‌شود مثبت.)

مثال: ۴ عددی مربع کامل است. نقیض ← ۴ عددی مربع کامل نیست. نقیض ← ۴ عددی مربع کامل است.  
 گزاره p                      گزاره  $\sim p$                       گزاره  $\sim(\sim p)$

## سؤال‌های امتحانی

۱- کدام یک از جملات یا عبارتهای زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید:  
 الف) امروز به سینما نرو.

ب)  $10^4$  عدد بسیار بزرگی است.

پ) میانه داده‌های ۱۰، ۳، ۴، ۸، ۱۷، ۲۰، ۳۱، ۵۴ عدد  $12/5$  است.

ت) از نمودار خبابی برای نمایش هم‌زمان ۲ متغیر استفاده می‌شود.

ث) عدد طبیعی a، زوج است.

ج) عدد  $(-3)^{n+1}$  عددی منفی است. ( $n \in \mathbb{N}$ )

چ) بزرگ‌ترین عدد اول دورقمی، برابر ۸۹ نیست.

ح) عبارت  $\frac{|x|}{3x^2 + 5x}$  یک عبارت گویا نیست.

خ) رابطه  $f = \{(4, 5), (2, 1), (10, 20)\}$  یک تابع است.

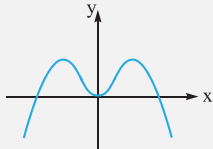
د) بُرد تابع  $y = 3$  برابر است با کل اعداد حقیقی. (مفروضه علاقه‌مندان)

ذ) نمودار سهمی  $y = 3 - x^2$  از نواحی دوم و سوم نمی‌گذرد. (مفروضه علاقه‌مندان)

ر) تعداد هلی‌کوپترهای ارتش‌های کشورهای مختلف، متغیری کمی با مقیاس نسبتی است.

ز) واریانس، جذر انحراف معیار است.

۲- جدول زیر را کامل کنید:

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$10^3 + 10^4 = 10^7$			
مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت است.			
		$-8 \geq -10$	
			
مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر با $2^4$ است.			
طول رأس سهمی $y = x^2 - 8x + 5$ برابر با $x = 3$ است. (مفروض علاقه‌مندان)			
		در تجزیه عبارت $4x^2 - 8x - 21$ عامل $(2x + 3)$ وجود ندارد. (مفروض علاقه‌مندان)	
در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰، ۲۸۰۰ و ۵ شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین، برای نمایش محل تمرکز داده‌ها است.			
مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج است.			
قرینه هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد است.			
معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، از خود آن عدد کوچک‌تر است.			
مجموع دو عدد $1 - \sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ عددی گنگ است.			

## ۲ گزاره‌های عطفی و فصلی

### ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها، به شکل‌های مختلفی می‌توانیم گزاره‌های ساده را با هم ترکیب کنیم تا گزاره‌های مرکب ساخته شوند. در کتاب ریاضی‌تان، ترکیب گزاره‌ها را با ۴ رابط «و»، «یا»، «اگر ... آن‌گاه ...»، «اگر ... آن‌گاه ... و برعکس» انجام می‌دهیم. در این درس‌نامه می‌خواهیم ارزش گزاره‌های عطفی و فصلی را تعیین کنیم. ابتدا گزاره عطفی را بررسی می‌کنیم.

### ترکیب عطفی دو گزاره

گر دو گزاره ساده را با حرف «و» به هم مربوط کنیم، گزاره مرکبی ساخته می‌شود که آن را ترکیب عطفی آن دو گزاره می‌نامیم. ترکیب عطفی p و q را با نماد  $p \wedge q$  نمایش می‌دهیم و آن را «p و q» می‌خوانیم. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{گزاره } p: 5 \text{ عددی فرد است.} \\ \text{گزاره } q: 2/3 \text{ عددی صحیح است.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{گزاره } p \wedge q: \underbrace{5 \text{ عددی فرد است}}_p \text{ و } \underbrace{2/3 \text{ عددی صحیح است}}_q \text{ است.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{گزاره } p: 2 \text{ عددی زوج است.} \\ \text{گزاره } q: 2 \text{ عددی اول است.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{گزاره } p \wedge q: \underbrace{2 \text{ عددی زوج است}}_p \text{ و } \underbrace{2 \text{ عددی اول است}}_q \text{ است. (به طور خلاصه می‌توان گفت 2 عددی زوج و اول است.)}$$

جدول ارزش درستی  $p \wedge q$  به شکل زیر است:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

→ فقط وقتی درست است که هم  $p$  و هم  $q$  درست باشند.

→ اگر حداقل یکی از دو گزاره  $p$  و  $q$  نادرست باشند؛  $p \wedge q$  نادرست خواهد بود.

### مثال و پاسخ

**مثال:** ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است جدول ارزش گذاری رسم کنید.

**الف:** تهران پایتخت ایران است و جاکارتا پایتخت مالزی است.

**پ:**  $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$  و  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

**ت:** ۱۱۰ عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است.

**ج:** رابطه  $f$  تابع است و رابطه  $g = \{(1, 2), (3, 4)\}$  تابع است.

**پاسخ:** الف: تهران پایتخت ایران است و جاکارتا پایتخت مالزی است.  $\Leftarrow$  کل گزاره، نادرست (F) است.

پ:  $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$  و  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$   $\Leftarrow$  کل گزاره، درست (T) است.

ت: ۱۱۰ عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است.  $\Leftarrow$  کل گزاره، نادرست (F) است.

(۱۱۰ جذر کامل ندارد.) F (۲ کوچک‌ترین عدد طبیعی اول است.) F

ج: رابطه  $f$  تابع است و رابطه  $g = \{(1, 2), (3, 4)\}$  تابع است. (چون  $f$  به ماداده نشده نامعلوم (عضوهای اول زوج‌ها مختلف‌اند.) T

باید برای گزاره عطفی بالا جدول ارزش گذاری رسم کنیم، چون وضعیت ارزش  $f$  مشخص نیست:

f تابع است و g تابع است.	f تابع است.	g تابع است.
T	T	T
F	T	F

پس اگر  $f$  تابع باشد، کل گزاره عطفی درست است و اگر  $f$  تابع نباشد، کل گزاره عطفی، نادرست است.

### ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره ساده را با حرف «یا» به هم مربوط کنیم، گزاره مرکب حاصل، ترکیب فصلی آن دو گزاره نام دارد. ترکیب فصلی دو گزاره  $p$  و  $q$  را به شکل  $p \vee q$  نمایش داده و آن را به صورت « $p$  یا  $q$ » می‌خوانیم؛ مثلاً:

گزاره  $p$ : عدد ۱۲۰ بر ۵ بخش پذیر است.  $\Leftarrow$  گزاره  $p \vee q$ : عدد ۱۲۰ بر ۵ بخش پذیر است یا مربع عدد ۱۰، برابر ۲۰ است.  
گزاره  $q$ : مربع عدد ۱۰، برابر ۲۰ است.

گزاره  $p$ : تهران در ایران است.  $\Leftarrow$  گزاره  $p \vee q$ : تهران در ایران است یا تهران در آسیا است. (به طور خلاصه تهران در ایران یا آسیا است).  
گزاره  $q$ : تهران در آسیا است.

جدول ارزش گذاری  $p \vee q$  به شکل زیر است:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$p \vee q$  وقتی درست است که حداقل یکی از دو گزاره درست باشند.

$p \vee q$  فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

## مثال و پاسخ

**مثال:** ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است از جدول ارزش گذاری استفاده کنید:

**الف:** ۱۳ عدد اول یا مربع کامل است.

**ب:** معادله  $x^2 - 16 = 0$  دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است.

**پ:**  $(3 > 1) \vee (5 \neq 1)$  **ت:** ۱ عدد اول است یا  $x$  زوج است.

**پاسخ:** الف) ۱۳ عدد اول یا مربع کامل است.  $\Leftarrow$  کل گزاره، درست (T) است.

ب)  $(13 \text{ جذر کامل ندارد.})$  F T

پ) ابتدا معادله داده شده را حل می‌کنیم:  $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 4$  (پس معادله ۲ ریشه دارد.)

ضمناً ۴۹ بر ۷ بخش پذیر است لذا:

معادله  $x^2 - 16 = 0$  دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است.  $\Leftarrow$  کل گزاره، درست (T) است.

پ) می‌دانیم هر عدد به توان صفر برسد، جواب برابر ۱ می‌شود؛ لذا:  $5^0 = 1$

$(3 > 1) \vee (5 \neq 1)$   $\Leftarrow$  کل گزاره، نادرست (F) است.

ت) می‌دانیم ۱ عددی اول نیست (یک فقط فرد است نه اول.) ولی در مورد ارزش گزاره « $x$  زوج است.» نمی‌توانیم اظهار نظر قطعی

کنیم؛ چون مقدار  $x$  را نمی‌دانیم؛ لذا باید جدول ارزش گذاری رسم کنیم:

۱ عدد اول است یا $x$ زوج است.	$x$ زوج است.	۱ عدد اول است یا $x$ زوج است.
F	T	T
F	F	F

## مثال و پاسخ

**مثال:** جدول ارزش گذاری گزاره  $p \vee (p \wedge \sim q)$  را تشکیل دهید.

همیشه جدول را از چپ به راست تشکیل می‌دهیم.

**پاسخ:**

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T



## خاصیت‌های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی دو گزاره P و Q

یک سری قانون برای ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره وجود دارند که یادگیری آن‌ها سرعت محاسبات را افزایش می‌دهد. البته تمام این قوانین و فرمول‌ها را می‌توانیم به کمک رسم جدول ارزش‌گذاری، اثبات کنیم ولی ما فقط آن‌هایی را ثابت می‌کنیم که ممکن است در مدارس جنبه امتحانی داشته باشند. (در تمام فرمول‌های زیر، منظور از گزاره همیشه درست و منظور از گزاره همیشه نادرست است.)

	قوانین مربوط به ترکیب عطفی	قوانین مربوط به ترکیب فصلی
فقط این‌ها را فقط این‌ها را فقط کنید	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
	$p \wedge T \equiv p$ یا $T \wedge p \equiv p$	$p \vee T \equiv T$ یا $T \vee p \equiv T$
	$p \wedge F \equiv F$ یا $F \wedge p \equiv F$	$p \vee F \equiv p$ یا $F \vee p \equiv p$
	$p \wedge \sim p \equiv F$ یا $\sim p \wedge p \equiv F$	اجتماع نقیضین $p \vee \sim p \equiv T$ یا $\sim p \vee p \equiv T$
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	جاب‌جایی $p \vee q \equiv q \vee p$
مفصوص علاقه‌مندان	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	شرکت‌پذیری $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	توزیع‌پذیری $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	دِمرگان $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	جذب $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
	$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$	شبه‌جذب $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

همان‌طور که گفتیم تمام این فرمول‌ها توسط جدول ارزش‌گذاری، قابل اثبات است؛ مثلاً قانون جذب  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$  را اثبات می‌کنیم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

ملاحظه می‌کنید که ارزش گزاره  $p \wedge (p \vee q)$  همیشه با ارزش p برابر است. برخی دیگر از فرمول‌های بالا را در تمرین‌ها اثبات کرده‌ایم.

### مثال و پاسخ

**مثال:** بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید: (T و F به ترتیب گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست هستند.)

ب  $\sim p \wedge F \equiv ?$

الف  $\sim p \vee \sim F \equiv ?$

ت  $(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) \equiv ?$

پ  $\sim (\sim p) \wedge \sim p \equiv ?$

ج  $q \vee \sim (p \vee \sim q) \equiv ?$  (مفصوص علاقهمندان)

ث  $(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv ?$  (مفصوص علاقهمندان)

پاسخ: دقت کنید که نقیض F می شود T و نقیض T می شود F؛ لذا خواهیم داشت:

الف  $\sim p \vee \sim F \equiv \sim p \vee T \equiv T$

ب  $\sim p \wedge F \equiv F$

پ  $\underbrace{\sim(\sim p)}_P \wedge \underbrace{\sim p}_{\text{اجتماع نقیضین}} \equiv p \wedge \sim p \equiv F$

ت  $(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) \equiv F \vee T \equiv T$

ث  $(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$  ج  $q \vee \sim(p \vee \sim q) \equiv q \vee (\sim p \wedge q) \equiv q$

شبه جذب جذب  
دمرگان

## سؤالهای امتحانی

۳- در جدول زیر، روبه روی گزاره های داده شده ارزش آن ها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک یا دو گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	۷۵ عددی اول است و $(-۳)^۴$ عددی منفی نیست.		
۲	..... و رنگ چشم افراد، متغیر کیفی اسمی است.	✓	
۳	مقسوم علیه های (شمارنده های) طبیعی عدد ۱۲ عبارت اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و .....	✓	
۴	۱۲۱ مضرب ۱۱ است و $\frac{1}{۳} > \frac{1}{۴}$		
۵	..... و .....	✓	
۶	همه سوره های قرآن با بسم الله شروع می شوند و سوره بقره طولانی ترین سوره قرآن است.		
۷	مجموعه $\{\emptyset\}$ تهی است و $\{۰, ۱, ۲, ۳\} \subseteq \mathbb{N}$		
۸	$\sqrt{۹+۱۰۰} = ۳+۱۰$ و $(\frac{-۲}{۳})^{-۳} \times ۳^{-۳} = \frac{1}{۸}$		
۹	$(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$ و $(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$		
۱۰	شیب هر خط موازی محور عرض هاصفر است) ۸ (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی های مخرب است.) (مفصوم علاقه مندان)		
۱۱	$(-۵ \neq -\sqrt{(-۵)^۲}) \wedge ((\frac{۲}{۳})^۰ = ۱)$		
۱۲	عدد ۲ زوج و اول است.		
۱۳	نمودار خط $x = ۳$ از ناحیه اول و چهارم می گذرد. (مفصوم علاقه مندان)		

۴- در جدول زیر، روبه روی گزاره های داده شده، ارزش آن ها را با علامت ✓ مشخص کرده و هم چنین با توجه به ارزش داده شده، با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	کسر $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ عبارتی گویا است یا ۹۱ عددی مرکب است.		
۲	قرآن ۱۱۸ سوره دارد یا .....	✓	

✓		۳	ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست یا .....
	✓	۴	..... یا معادله $x^2 + x + 3 = 0$ دو ریشه دارد.
		۵	افلاطون، شاگرد سقراط بود یا هفته هفت روز دارد.
		۶	اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱۲۱) هستند یا سهمی $f(x) = x^2 + 1$ ماکزیمم دارد. (مفصوس علاقه مندان)
		۷	در تابع $f(t) = \sqrt{t+1}$ متغیر مستقل برابر $f(t)$ است یا وزن افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است.
		۸	رابطه  تابع است یا نمودار میله‌ای، یک نمودار تک‌متغیره است.
		۹	$(\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{R} \subset \mathbb{Q})$
		۱۰	$(\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{6^7}{8^5} = 2) \vee (\sqrt{x^2} =  x )$ (مفصوس علاقه مندان)
		۱۱	عدد ۱۹ زوج یا مربع کامل است.
		۱۲	عدد ۲۴ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.

۵- با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی یا نادرستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

- الف)  $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$       ب)  $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$       پ)  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$   
 ت)  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$       ث)  $p \vee (p \wedge q) \equiv q$       ج)  $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$   
 چ)  $(p \vee \sim p) \equiv T$       ذ)  $(p \wedge \sim p) \equiv F$       خ)  $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p$   
 د)  $p \wedge (\sim p \wedge \sim q) \equiv T$       ز)  $p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

۶- اگر  $p \wedge q$  گزاره‌ای درست باشد ارزش گزاره  $p \vee (q \wedge r)$  را تعیین کنید.

۷- اگر  $p \wedge q \equiv F$  باشد ثابت کنید که:

۸- اگر گزاره  $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$  نادرست باشد، ارزش گزاره‌های زیر چیست؟

- الف)  $(q \vee r) \vee p$       ب)  $\sim (p \wedge q) \wedge \sim r$

(مفصوس علاقه مندان)  $(\sim p \vee q) \wedge p \equiv F$

### گزاره شرطی و دوشروطی

#### تجزیه شرطی دو گزاره

اگر بخواهیم از گزاره  $p$ ، گزاره  $q$  را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Rightarrow$ » استفاده کرده و می‌نویسیم:  $p \Rightarrow q$  و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

- اگر  $p$  آن گاه  $q$ .
- $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را.
- $q$  شرط کافی است برای  $p$ .
- $p$  شرط لازم است برای  $q$ .

ضمناً در گزاره « $p \Rightarrow q$ » به  $p$  مقدم و به  $q$  تالی می‌گوییم.

مثلاً گزاره شرطی «اگر یک چهارضلعی، مستطیل باشد، آن گاه قطرهایش با هم برابرند.» را به شکل‌های زیر هم می‌توان بیان کرد:

- مستطیل بودن یک چهارضلعی، نتیجه می‌دهد مساوی بودن قطرهای آن را.

● مستطیل بودن یک چهارضلعی، شرط کافی است برای مساوی بودن قطرهای آن.

● (دو قطرش با هم برابرند)  $\Rightarrow$  (چهارضلعی، مستطیل است).

● مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی، شرط لازم است برای مستطیل بودن آن.

در گزاره شرطی بالا  $p$  و  $q$  به هم وابسته هستند؛ یعنی با فرض درست بودن گزاره «چهارضلعی، مستطیل است.» درستی یا نادرستی گزاره «قطرهای چهارضلعی با هم برابرند» را بررسی می‌کنیم؛ ولی در علم منطق، گاهی  $p$  و  $q$  ربطی به هم ندارند که در این صورت باید ارزش تک تک آن‌ها را تعیین کنیم؛ مثلاً اگر  $5 > 3$  باشد، آن‌گاه تهران پایتخت ایران است. ملاحظه می‌کنید که گزاره‌های  $p$  و  $q$  ارتباطی به هم ندارند؛ پس نمی‌توانیم گزاره  $p$  (نادرست) گزاره  $q$  (درست) بدون بررسی بگوییم درست است. (دیدید که  $5 > 3$  نادرست بود، یعنی هتماً باید بررسی کنیم و چشم‌پسته نمی‌گیریم  $p$  درست؛ ولی آنگاه  $p$  و  $q$  به هم وابسته بودن، چشم‌پسته می‌گیریم  $p$  درست و فقط  $q$  رو بررسی می‌کنیم.)

جدول ارزش‌گذاری  $(p \Rightarrow q)$  به صورت مقابل است:

مقدم	تالی	$(p \Rightarrow q)$
$p$	$q$	
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$(p \Rightarrow q)$  فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

به دو ردیف آخر جدول بالا دقت کنید. ملاحظه می‌کنید که در هر دو حالت، مقدم ارزش نادرست دارد ولی ارزش  $(p \Rightarrow q)$  درست است. در این دو حالت، می‌گوییم گزاره شرطی به انتقای مقدم، درست است. یعنی به خاطر نادرست بودن مقدم، می‌گوییم تالی چه درست باشد چه نادرست، کل گزاره درست است.

### مثال و پاسخ

**مثال:** ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

**الف)** اگر ۱۳ اول است، آن‌گاه ۲۵ مربع کامل است.

**پ)** اگر  $4^2 = 8$ ؛ آن‌گاه  $7 > 3$ .

**ب)** اگر چهارمین فصل سال، پاییز است؛ آن‌گاه اسفند ۳۱ روز دارد.

**ت)** زوج بودن عدد ۴ نتیجه می‌دهد اول بودن عدد ۸ را.

**ث)** اگر  $x$  عددی زوج باشد؛ آن‌گاه بر ۲ بخش پذیر است.

**پاسخ:** پس  $(p \Rightarrow q)$  درست است.

**الف)**  $(13 \text{ اول است}) \Rightarrow (25 \text{ مربع کامل است})$

پس  $(p \Rightarrow q)$  به انتقای مقدم، درست است.

**ب)**  $(4^2 = 8) \Rightarrow (7 > 3)$

پس  $(p \Rightarrow q)$  به انتقای مقدم، درست است.

**ب)**  $(\text{اسفند ۳۱ روز دارد}) \Rightarrow (\text{چهارمین فصل سال، پاییز است})$

**ت)**  $(x \text{ زوج است}) \Rightarrow (x \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است})$

پس  $(p \Rightarrow q)$  درست است. دقت کنید که در این گزاره شرطی، مقدم و تالی به هم وابستگی دارند؛ لذا  $p$  را چشم‌پسته درست فرض کرده‌ایم؛ ولی تالی را پس از بررسی، گفتیم که درست است. (می‌دونید که هر عدد زوجی بر ۲ بخش پذیره؛ پس تالی درست)

**ث)**  $(4 \text{ زوج است}) \Rightarrow (8 \text{ عدد اول است})$

پس  $(p \Rightarrow q)$  نادرست است.

## مثال و پاسخ

**مثال:** اگر  $p$  گزاره‌ای نادرست،  $q$  گزاره‌ای درست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (مشابه تمرین کتاب صفحه ۱۱)

$$\begin{aligned} & \text{الف) } (p \Rightarrow q) \wedge r \\ & \text{ب) } p \Rightarrow (q \wedge r) \\ & \text{پ) } (\sim p \vee q) \Rightarrow r \\ & \text{ت) } (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \end{aligned}$$

چون  $p$  همیشه نادرست است، می‌توانیم به جایش از  $F$  استفاده کنیم.  $q$  هم همواره درست است؛ پس به جای آن از  $T$  استفاده می‌کنیم.

**پاسخ:**

$$\begin{aligned} \text{الف) } (p \Rightarrow q) \wedge r & \equiv (F \Rightarrow T) \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r \\ \text{ب) } p \Rightarrow (q \wedge r) & \equiv F \Rightarrow (T \wedge r) \equiv F \Rightarrow r \equiv T \\ \text{پ) } (\sim p \vee q) \Rightarrow r & \equiv (T \vee T) \Rightarrow r \equiv T \Rightarrow r \equiv r \\ \text{ت) } (p \Rightarrow r) \Rightarrow q & \equiv (F \Rightarrow r) \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T \end{aligned}$$

**تذکره:** در گزاره  $(T \Rightarrow r)$  اگر  $r$  درست باشد، به گزاره  $(T \Rightarrow T)$  می‌رسیم که درست است؛ ولی اگر  $r$  نادرست باشد به گزاره  $(T \Rightarrow F)$  می‌رسیم که نادرست است؛ پس همه چیز، بستگی به ارزش  $r$  دارد؛ به همین دلیل گفتیم ارزش  $(T \Rightarrow r)$  با ارزش  $r$  برابر است.

$$\text{پ) } p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv F \Rightarrow (T \wedge r) \equiv F \Rightarrow r \equiv T$$

گزاره  $(F \Rightarrow r)$  به انتفای مقدم، همیشه درست است؛ یعنی  $r$  چه درست باشد چه نادرست، ارزش کل گزاره  $(F \Rightarrow r)$  درست است.

$$\text{ت) } (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv (F \Rightarrow r) \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T$$

T به انتفای مقدم

p	q	~p	p ⇒ q	~p ∨ q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

**نکته مهم:** اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره دلخواه باشند؛ آن‌گاه رابطه هم‌ارزی  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  برقرار است. برای اثبات این فرمول از جدول ارزش‌گذاری استفاده می‌کنیم:

همواره برقرار است. فقط اثبات این فرمول نیست، فقط اثبات به کمک جدول ارزش‌گذاری استفاده می‌کنیم.

(در مدرسه نیاز به حفظ فرمول نیست، فقط اثبات به کمک جدول ارزش‌گذاری استفاده می‌شود.)

**عکس یک گزاره شرطی:** در گزاره  $(p \Rightarrow q)$  اگر جای مقدم و تالی را با هم عوض کنیم، به گزاره  $(q \Rightarrow p)$  می‌رسیم که به آن، عکس گزاره  $(p \Rightarrow q)$  می‌گوییم.

**عکس نقیض گزاره شرطی:** به گزاره  $(\sim q \Rightarrow \sim p)$  عکس نقیض گزاره  $p \Rightarrow q$  می‌گوییم.

## مثال و پاسخ

**مثال:** به کمک جدول ارزش‌گذاری، ثابت کنید هر گزاره‌ای به شکل  $(p \Rightarrow q)$  با عکس نقیض خود یعنی  $\sim q \Rightarrow \sim p$  هم‌ارز است.

**پاسخ:** می‌خواهیم درستی هم‌ارزی  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$  را اثبات کنیم:

p	q	~p	~q	p ⇒ q	~q ⇒ ~p
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

**ترکیب دو شرطی گزاره‌های p و q:** در ترکیب شرطی  $(p \Rightarrow q)$  دیدیم که از گزاره  $p$  گزاره  $q$  را نتیجه گرفتیم. حال می‌خواهیم هم از  $p$ ، گزاره  $q$  را نتیجه بگیریم و هم از  $q$  گزاره  $p$  را. به چنین گزاره مرکبی ترکیب دو شرطی  $p$  و  $q$  می‌گوییم و آن را با نماد  $(p \Leftrightarrow q)$  نمایش می‌دهیم. به عبارت ساده‌تر، گزاره  $(p \Leftrightarrow q)$  همان گزاره  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  می‌باشد. یعنی ترکیب عطفی دو گزاره شرطی است.

ضمناً گزاره  $(p \Leftrightarrow q)$  را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

- $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را و  $q$  نتیجه می‌دهد  $p$  را.
- اگر  $p$  آن‌گاه  $q$  و اگر  $q$  آن‌گاه  $p$ .
- $p$  شرط لازم و کافی است برای  $q$ .
- اگر  $p$  و تنها اگر  $q$ .
- اگر  $p$  آن‌گاه  $q$  و برعکس.

مثلاً گزاره « اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویه‌اش با هم مساوی‌اند و برعکس. » را می‌توان به شکل‌های زیر هم بیان کرد:

- مثلث، متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر دو زاویه‌اش با هم مساوی باشند.
- متساوی‌الساقین بودن یک مثلث نتیجه می‌دهد مساوی بودن دو زاویه‌اش را و مساوی بودن دو زاویه یک مثلث، نتیجه می‌دهد متساوی‌الساقین بودن آن مثلث را.
- متساوی‌الساقین بودن یک مثلث، شرط لازم و کافی است برای مساوی بودن دو زاویه آن.

● (دو زاویه‌اش با هم برابرند.)  $\Leftrightarrow$  (مثلث، متساوی‌الساقین است.)

جدول ارزش‌گذاری گزاره  $p \Leftrightarrow q$  به صورت مقابل است:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

نتیجه جدول: گزاره  $(p \Leftrightarrow q)$  فقط وقتی درست (T) است که دو گزاره  $p$  و  $q$  هم‌ارزش باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

## مثال و پاسخ

**مثال:** درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

**الف)** اگر  $\sqrt{3}$  گنگ است؛ آن‌گاه ۳ عددی طبیعی است و برعکس.

**ب)** رابطه  $f = \{(1, a), (2, 3), (1, b)\}$  تابع است اگر و تنها اگر  $a = b$ .

**پ)** اگر دو عدد مساوی باشند؛ آن‌گاه مربع‌هایشان نیز مساوی‌اند و برعکس.

**ت)**  $(15 < 7) \Leftrightarrow (3^3 = 27)$ .

**ث)** طبیعی بودن عدد  $(-3)$  شرط لازم و کافی است برای گنگ بودن عدد  $3/8$ .

**ج)** منفی بودن دلتا نتیجه می‌دهد ریشه‌نداشتن معادله درجه دوم را و ریشه‌نداشتن معادله درجه دوم، نتیجه می‌دهد منفی بودن دلتا را.

**پاسخ: الف)**

دو گزاره، هم‌ارزش‌اند؛ پس کل گزاره بالا، درست (T) است.

**ب)** دقت کنید که در این سؤال،  $p$  و  $q$  به هم وابسته هستند؛ ضمناً چون گزاره موردنظر، دوشروطی است، یک بار  $(p \Rightarrow q)$  و بار دیگر  $(q \Rightarrow p)$  را در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت هم، مقدم را درست فرض می‌کنیم و فقط ارزش تالی را مشخص می‌کنیم. اگر در هر دو حالت، تالی‌ها نیز درست بودند،  $p \Leftrightarrow q$  درست خواهد بود. می‌دانید اگر  $f$  تابع باشد، چون زوج‌های  $(1, a)$  و  $(1, b)$  عضو اولشان مساوی است، عضوهای دومشان هم باید مساوی باشند؛ یعنی  $a = b$ .

تالی درست است. مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم.

حالت ۱  $a = b \Rightarrow f = \{(1, a), (2, 3), (1, b)\}$  تابع است: حالت ۱

حالت ۲  $a = b \Rightarrow f = \{(1, a), (2, 3), (1, b)\}$  تابع است: مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم.

پس الان فهمیدیم که  $(p \Rightarrow q)$  درست است و  $(q \Rightarrow p)$  هم درست است؛ لذا  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  هم درست است. به طور ساده‌تر، چون در دو حالت بالا تالی‌ها درست بودند، نتیجه گرفتیم که  $p \Leftrightarrow q$  نیز درست است.

شاگرد: من نفهمیدم چه وقت باید دو حالت بالا رو در نظر بگیریم استاد؟ چرا در قسمت الف این کارو نکردین؟

دبیر، در قسمت (الف) دو گزاره « $\sqrt{3}$  گنگ است.» و « $3$  عددی طبیعی است.» ارتباطی با هم نداشتند؛ به همین دلیل برای بررسی درستی یا نادرستی  $p \Leftrightarrow q$  نیازی به ایجاد ۲ حالت جدا از هم نبود؛ ولی در قسمت (ب)،  $p$  و  $q$  با هم ارتباط داشتند. به همین دلیل، دو حالت  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  را با فرض درستی مقدم‌ها جداگانه بررسی کردیم. در هر دو حالت، کافی بود که تالی‌ها درست باشند.

**پ** باز هم  $p$  و  $q$  به هم وابسته‌اند؛ پس مانند قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

تالی، درست است  $\Rightarrow$  مربع‌هایشان مساوی‌اند  $\Rightarrow$  دو عدد مساوی باشند: حالت ۱  
 مقدم را درست فرض می‌کنیم

تالی، نادرست است  $\Rightarrow$  آن دو عدد مساوی‌اند  $\Rightarrow$  مربع‌های دو عدد مساوی باشند: حالت ۲  
 مقدم را درست فرض می‌کنیم

در حالت (۲) تالی نادرست شد؛ پس کل گزاره  $p \Leftrightarrow q$  نادرست است. دقت دارید که ممکن است مربع‌های دو عدد مساوی باشند، ولی خود آن دو عدد، مساوی نباشند؛ مثلاً  $(-3)$  و  $(+3)$  مربع‌هایشان برابرند (۹)؛ ولی خودشان برابر نیستند.

$$\underbrace{(3^3 = 27)}_T \Leftrightarrow \underbrace{(15 < 7)}_F$$

دو گزاره ارتباطی با هم ندارند؛ پس نیازی نیست دو حالت جداگانه برای بررسی درستی یا نادرستی  $p \Leftrightarrow q$  در نظر بگیریم. خیلی سریع می‌گوییم  $p \Leftrightarrow q$  نادرست است؛ چون  $p$  و  $q$  هم‌ارزش نیستند.

$$\underbrace{(3/8 \text{ عددی گنگ است.})}_F \Leftrightarrow \underbrace{(3 - \text{ عددی طبیعی است.})}_F$$

باز هم دو گزاره، ارتباطی با هم ندارند؛ پس می‌گوییم چون دو گزاره  $p$  و  $q$  هم‌ارزش‌اند؛ لذا  $p \Leftrightarrow q$  درست است.

**ج** معادله درجه دوم ریشه ندارد)  $\Leftrightarrow$  (دلته منفی باشد)

تالی‌ها درست‌اند پس کل گزاره هم درست است.  $\rightarrow$

مقدم را خودمان T فرض می‌کنیم

مقدم را خودمان T فرض می‌کنیم

مقدم را خودمان T فرض می‌کنیم

**یادآوری** از سال قبل می‌دانید اگر در معادله درجه دوم،  $\Delta = b^2 - 4ac$  منفی باشد، معادله جواب ندارد. هم‌چنین اگر معادله درجه دومی، جواب نداشته باشد، حتماً دلتهای آن منفی بوده است.

## سؤال‌های امتحانی

۹- جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	اگر $(5^2 + 1)$ زوج است؛ آن‌گاه ۱۰۰ مربع کامل است.		
۲	اگر .....؛ آن‌گاه ۹۶ اول است.	✓	
۳	اگر ۵۰ مضرب ۱۰ است؛ آن‌گاه .....		✓
۴	اگر $x$ عددی اول باشد؛ آن‌گاه $x^2$ هم عددی اول است.		
۵	اگر $\sqrt{16}$ مربع کامل است؛ آن‌گاه $3^3 > 3^2$ .	✓	
۶	اگر ۲۵ مربع کامل ..... آن‌گاه $\sqrt{3}$ عددی گنگ .....		
۷	اگر عدد صحیح زوج یا فرد باشد؛ آن‌گاه عدد ۱ اول است.		
۸	اگر عددی فرد باشد؛ آن‌گاه ۲ نیز فرد است.		