

طول کمان: برای به دست آوردن طول کمان، از نسبت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ}$$

زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به کمان‌های برابر، با هم برابرند و برعکس.

$$\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{C\hat{O}D} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{A\hat{O}B} = \widehat{C\hat{O}D}$$

اگر در یک دایره دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیرشان برابرند و برعکس.

$$AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$$

قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان نظیر به آن را نصف می‌کند.

$$OH \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \widehat{AC} = \widehat{CB} \end{cases}$$

در هر دایره، خطی که از مرکز به وسط وتر وصل می‌شود بر آن وتر عمود است و کمان نظیر به آن را نصف می‌کند.

$$AH = HB \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ \widehat{AC} = \widehat{CB} \end{cases}$$

در هر دایره خطی که از مرکز دایره به وسط کمان وصل می‌شود بر آن وتر عمود است و آن وتر را نصف می‌کند.

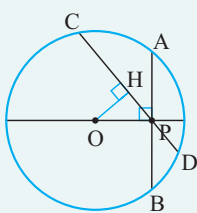
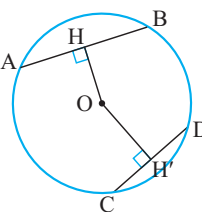
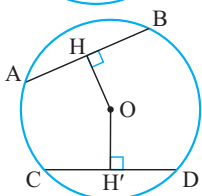
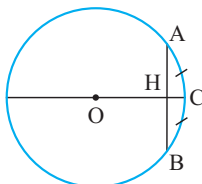
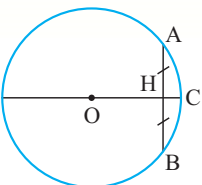
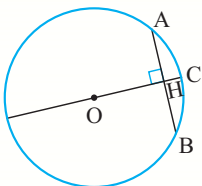
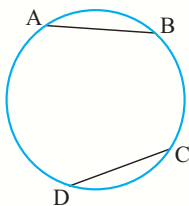
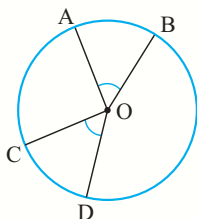
$$AC = CB \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ AH = HB \end{cases}$$

در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس.

$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

در هر دایره، وتر نزدیک‌تر به مرکز بزرگ‌تر است و بالعکس.

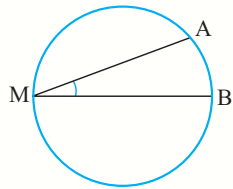
$$OH < OH' \Leftrightarrow AB > CD$$



مثال نقطه P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟

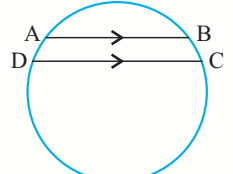
پاسخ بدیهی است که بزرگ‌ترین وتر گذرنده از P، قطر دایره است. کوچک‌ترین وتر گذرنده از P، وتری عمود بر قطر دایره، در نقطه P است.

$$OH < OP \Rightarrow CD > AB$$



زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و ضلع‌های آن، وترهای دایره باشند. اندازه زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن است.

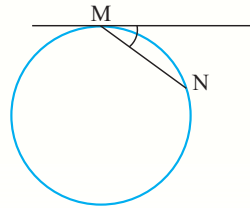
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



اگر دو وتر موازی رسم کنیم، کمان‌های بین آن‌ها برابر خواهند بود و بالعکس.

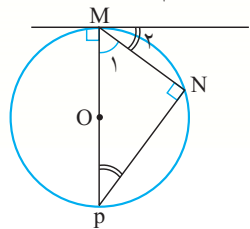
$$AB \parallel DC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AB \parallel DC$$



زاویه ظلّی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره، یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگر، مماس بر دایره باشد.

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{MN}}{2}$$



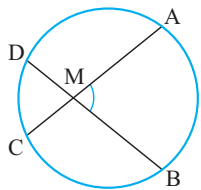
اثبات از M به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه P قطع کند، از P به N وصل می‌کنیم.

زاویه N روبه‌رو به قطر است، پس 90° است و OM در نقطه M بر خط مماس عمود است.

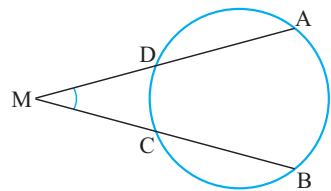
$$\left. \begin{aligned} \widehat{M}_2 + \widehat{M}_1 &= 90^\circ \\ \widehat{P} + \widehat{M}_1 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{P} = \widehat{M}_2$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{P} &= \widehat{M}_2 \\ \widehat{P} &= \frac{\widehat{MN}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{M}_2 = \frac{\widehat{MN}}{2}$$

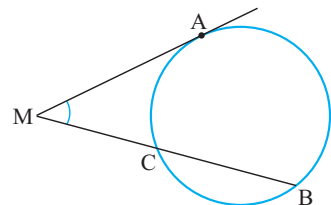
زاویه‌های بین دو وتر دایره



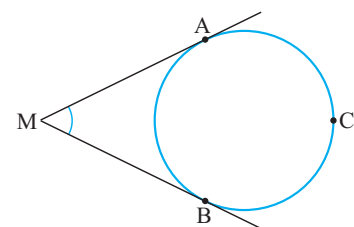
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

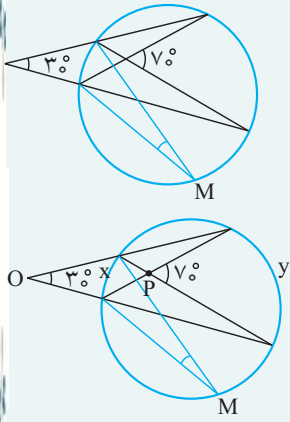


$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$$



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$

مثال زاویه \widehat{M} را به دست آورید.

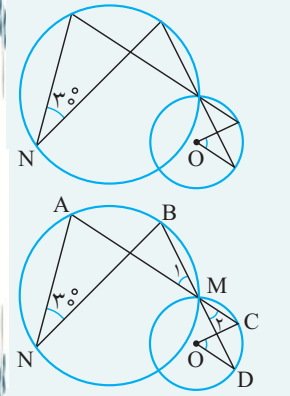


پاسخ

$$\left. \begin{aligned} \widehat{P} = \frac{x+y}{2} = 7^\circ &\Rightarrow y+x = 14^\circ \\ \widehat{O} = \frac{y-x}{2} = 3^\circ &\Rightarrow y-x = 6^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 4^\circ$$

$$\widehat{M} = \frac{x}{2} = 2^\circ$$

مثال زاویه \widehat{O} را به دست آورید.

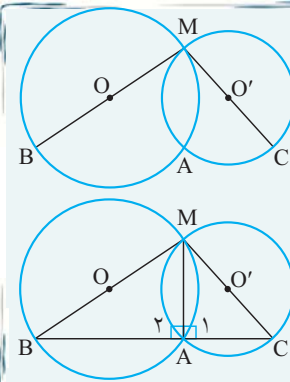


پاسخ

$$\widehat{N} = 3^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 6^\circ \Rightarrow \widehat{M}_1 = 3^\circ$$

$$\widehat{M}_2 = \widehat{M}_1 = 3^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 6^\circ \Rightarrow \widehat{O} = 6^\circ$$

مثال نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



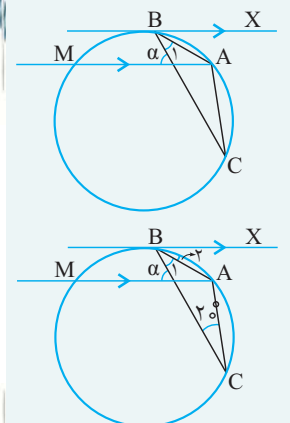
پاسخ

زاویه‌های \widehat{A}_1 و \widehat{A}_2 روبرو به قطر هستند. در نتیجه:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ$$

A، B و C روی خط راست هستند.

مثال $\widehat{B}_1 = 3^\circ$ ، $\widehat{C} = 2^\circ$ و $BX \parallel MA$. زاویه α را به دست آورید.

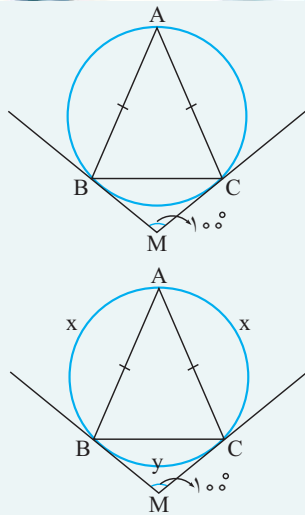


پاسخ

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B}_2 &= \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \widehat{C} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{C} = 2^\circ$$

$$MA \parallel BX \Rightarrow \alpha = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \left. \begin{aligned} \widehat{B}_1 &= 3^\circ, \widehat{B}_2 = 2^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = 5^\circ$$

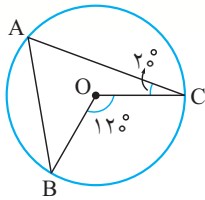
مثال MB و MC مماس بر دایره هستند و $AB = AC$. زاویه \hat{A} را به دست آورید.

**پاسخ**

$$\begin{aligned}
 AB = AC &\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \\
 \widehat{AB} = \widehat{AC} = x, \widehat{BC} = y \\
 \widehat{M} = \frac{2x - y}{2} = 100^\circ &\Rightarrow 2x - y = 200^\circ \\
 2x + y = 360^\circ &\Rightarrow y = 80^\circ \\
 \widehat{A} = \frac{y}{2} = 40^\circ
 \end{aligned}$$

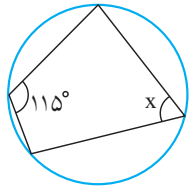
پرسش‌های چهارگزینیه

۱. در شکل روبه‌رو اندازه زاویه B چند درجه است؟



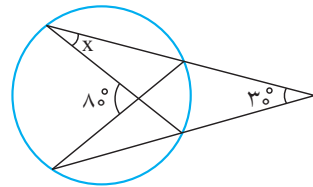
- (۱) 20°
 (۲) 30°
 (۳) 40°
 (۴) 50°

۲. در شکل روبه‌رو x چند درجه است؟



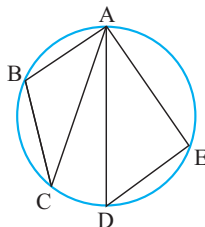
- (۱) 45°
 (۲) 55°
 (۳) 65°
 (۴) 75°

۳. در شکل روبه‌رو، اندازه x چند درجه است؟



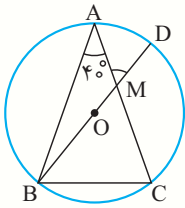
- (۱) 20°
 (۲) 25°
 (۳) 30°
 (۴) 35°

۴. در شکل روبه‌رو، اگر $\hat{B} = 110^\circ$ و $\hat{E} = 95^\circ$ ، آنگاه زاویه CAD چند درجه است؟



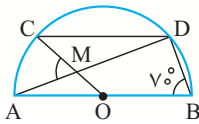
- (۱) 20°
 (۲) 25°
 (۳) 40°
 (۴) 50°

۵. مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB=AC$) در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. اگر $\widehat{A}=40^\circ$ ، آن‌گاه اندازه زاویه M چند درجه است؟



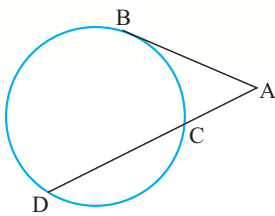
- (۱) 40°
- (۲) 50°
- (۳) 60°
- (۴) 70°

۶. در شکل روبه‌رو، اگر $\widehat{B}=70^\circ$ و $CD \parallel AB$ ، آن‌گاه اندازه زاویه M چند درجه است؟



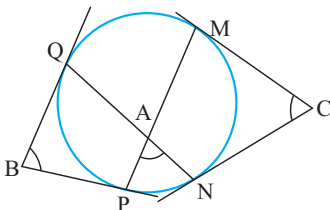
- (۱) 40°
- (۲) 50°
- (۳) 60°
- (۴) 70°

۷. در شکل روبه‌رو، AB بر دایره مماس است. اگر $\widehat{BC}=3\alpha$ ، $\widehat{BD}=5\alpha$ و $\widehat{CD}=4\alpha$ ، اندازه زاویه A چند درجه است؟



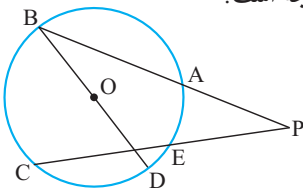
- (۱) 30°
- (۲) 45°
- (۳) 60°
- (۴) 75°

۸. در شکل روبه‌رو، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. کدام رابطه بین زوایای A ، B و C برقرار است؟ (کتاب درسی)



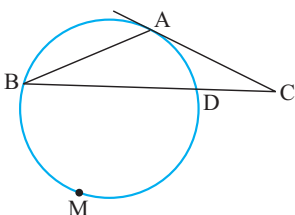
- (۱) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$
- (۲) $\widehat{A} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$
- (۳) $2\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ$
- (۴) $\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A} = 90^\circ$

۹. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره است، $\widehat{AB}=120^\circ$ ، $\widehat{ED}=20^\circ$ ، $\widehat{CD}=80^\circ$. اندازه زاویه P چند درجه است؟



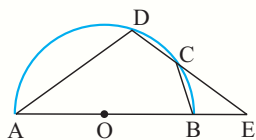
- (۱) 20°
- (۲) 30°
- (۳) 60°
- (۴) 90°

۱۰. در شکل مقابل، مماس AC بر دایره با وتر AB از دایره برابرنند. اگر کمان \widehat{DMB} برابر 222 درجه باشد. زاویه C چند درجه است؟



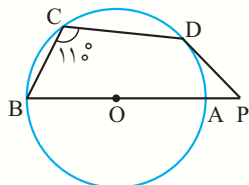
- (۱) 21°
- (۲) 22°
- (۳) 23°
- (۴) 24°

۱۱. **رسور** در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. اگر $BC = CD$ و $AD = DE$. اندازه زاویه A چند درجه است؟



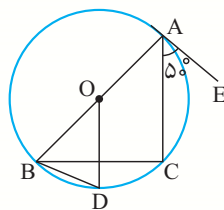
- (۱) 24°
- (۲) 30°
- (۳) 36°
- (۴) 42°

۱۲. **رسور** در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است، PD بر دایره مماس است و $\widehat{C} = 110^\circ$. اندازه زاویه P چند درجه است؟



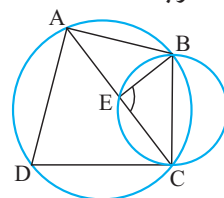
- (۱) 50°
- (۲) 60°
- (۳) 45°
- (۴) 55°

۱۳. در شکل روبه‌رو، AE بر دایره مماس است و OD با AC موازی است. اندازه زاویه \widehat{CBD} چند درجه است؟



- (۱) 15°
- (۲) 20°
- (۳) 25°
- (۴) 30°

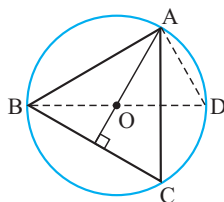
۱۴. **رسور** در شکل روبه‌رو، CD بر دایره کوچک مماس است. اگر $\widehat{BAD} = 100^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه \widehat{BEC} چند درجه است؟



- (۱) 80°
- (۲) 100°
- (۳) 40°
- (۴) 50°

(سراسری ریاضی - ۹۲)

۱۵. **رسور** در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه \widehat{AOD} برابر کدام است؟



- (۱) \widehat{OBC}
- (۲) \widehat{CAD}
- (۳) \widehat{OAC}
- (۴) \widehat{ADO}

۱۶. **مسئله** در مثلث ABC ، داریم $\widehat{B} = 50^\circ$ و $\widehat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع‌اند.

زاویه \widehat{MBC} چند درجه است؟

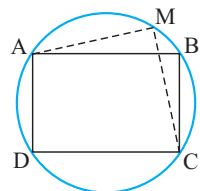
- (۱) 25°
- (۲) 30°
- (۳) 35°
- (۴) 40°

۱۷. **مسئله** در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه O در امتداد AC ، مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟

(سراسری ریاضی - ۹۳)

- (۱) متساوی‌الساقین
- (۲) قائم‌الزاویه
- (۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین
- (۴) غیر مشخص

۱۸. در شکل روبه‌رو، $ABCD$ یک مستطیل به اضلاع ۲ و ۳ است و نقطه دلخواه M روی محیط دایره قرار دارد. مقدار $MA^2 + MC^2$ کدام است؟



- (۱) ۹
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۵

۱۹. **مسئله** در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۵)

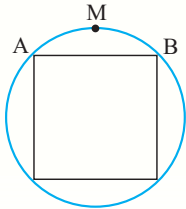
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۰. **رسواری** مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

(سراسری قارچ از کشور ریاضی - ۹۵)

- (۱) $\frac{2}{25}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

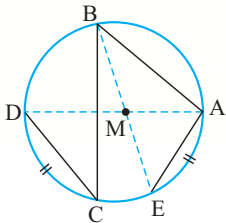
۲۱. **رسواری** در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصله‌ی وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



- (۱) $\sqrt{2}-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{4}-2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

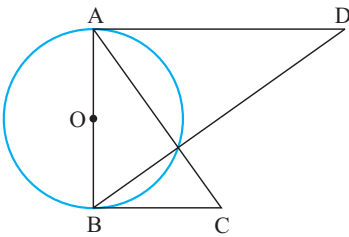
۲۲. در شکل مقابل، اگر $AB=6$ ، $BC=8$ ، $CD=3$ و $\widehat{AE}=\widehat{CD}$ ، آن‌گاه اندازه‌ی AM کدام است؟

(سراسری قارچ از کشور ریاضی - ۹۳)



- (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{25}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{2}{75}$

۲۳. در شکل روبه‌رو، BC و AD بر دایره‌ای به قطر AB مماس هستند. اگر $AD=x$ و $BC=y$ ، طول قطر دایره با کدام برابر است؟



- (۱) $\frac{x+y}{2}$ (۲) \sqrt{xy} (۳) $\frac{xy}{x+y}$ (۴) $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

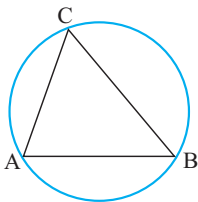
۲۴. **رسواری** در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی B امتداد می‌دهیم. از نقطه‌ی B بر مماس دلخواه دایره، عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $\widehat{ADB}=34^\circ$ باشد، زاویه‌ی OAD چند درجه است؟

(سراسری ریاضی - ۹۴)

- (۱) ۶۸ (۲) ۷۳ (۳) ۱۰۲ (۴) ۱۴۶

۲۵. **مسئله** در شکل روبه‌رو، $\widehat{A}=70^\circ$ و $\widehat{B}=50^\circ$. از نقطه‌ی O مرکز دایره، بر اضلاع AB، AC و BC به ترتیب عمودهای OP، OQ و OR رسم می‌شود. کدام درست است؟

(کتاب درسی)



- (۱) $OP > OR > OQ$ (۲) $OP > OQ > OR$ (۳) $OQ > OR > OP$ (۴) $OQ > OP > OR$

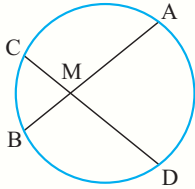
(کتاب درسی)

۲۶. **مسئله** در دایره‌ی $C(O, 2)$ وتر $AB=2\sqrt{3}$ رسم شده است. کمان \widehat{AB} چند درجه است؟

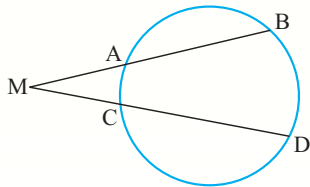
- (۱) 60° (۲) 90° (۳) 120° (۴) 150°

رابطه های طولی در دایره

اگر دو وتر AB و CD در نقطه ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن گاه:

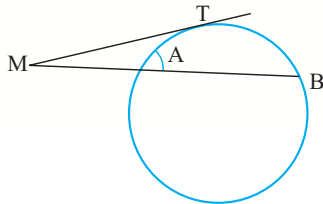


$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



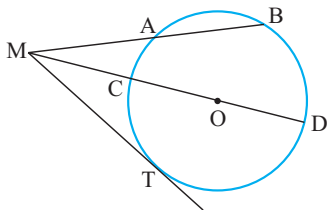
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

از نقطه M خارج دایره، مماس MT بر دایره رسم شده است.



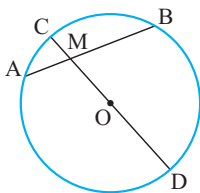
$$MT^2 = MA \cdot MB$$

فاصله نقطه M تا مرکز دایره را d و شعاع دایره را r در نظر می گیریم.



$$\left. \begin{array}{l} MC = d - R \\ MD = d + R \end{array} \right\} \Rightarrow MC \cdot MD = d^2 - r^2$$

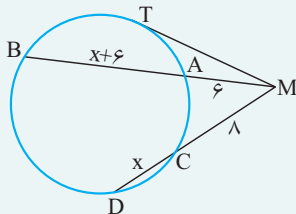
$$MT^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD = d^2 - r^2$$



$$\left. \begin{array}{l} MC = R - d \\ MD = R + d \end{array} \right\} \Rightarrow MC \cdot MD = r^2 - d^2$$

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = r^2 - d^2$$

مثال در شکل مقابل، طول مماس MT چند است؟

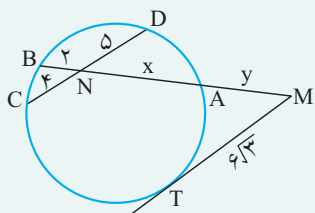


پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} MT^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD \\ MA \cdot MB = 6 \times (x + 6) \\ MC \cdot MD = 8 \times (x + 8) \end{array} \right\} \Rightarrow 6 \times (x + 6) = 8 \times (x + 8) \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow MT^2 = 6 \times (12 + 4) \Rightarrow MT^2 = 16 \times 6 \Rightarrow MT = 4\sqrt{6}$$

مثال در شکل مقابل، مقدار y را به دست آورید.



پاسخ

$$NA \cdot NB = NC \cdot ND \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = y \times (y + 12) \Rightarrow y^2 + 12y = 108 \Rightarrow y^2 + 12y - 108 = 0$$

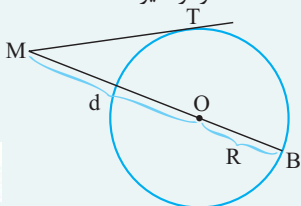
$$\Rightarrow (y + 18)(y - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -18 & \text{غیرقابل قبول} \\ y = 6 \end{cases}$$

مثال کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M از محیط دایره (C) برابر 5 و 9 است. طول مماس که از نقطه M بر دایره رسم شده، چند است؟

شده، چند است؟

پاسخ بیش‌ترین فاصله یک نقطه تا محیط دایره برابر با $d + R$ است که در آن R شعاع دایره و d فاصله نقطه تا مرکز دایره است.

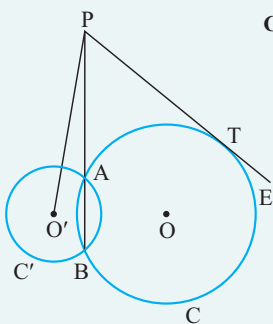
کم‌ترین فاصله یک نقطه (خارج دایره) تا محیط دایره برابر با $d - R$ است.



$$MT^2 = d^2 - R^2 \Rightarrow MT^2 = (d - R)(d + R) \Rightarrow MT^2 = 5 \times 9 \Rightarrow MT^2 = 45 \Rightarrow MT = \sqrt{45}$$

مثال در شکل روبه‌رو، دایره‌های $C(O, R)$ و $C'(O', 3)$ در A و B متقاطع‌اند و PT بر دایره C

مماس است. اگر $PT = 4$ ، اندازه $O'P$ چقدر است؟



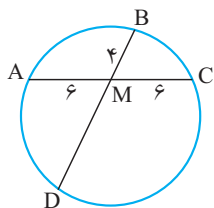
پاسخ

شعاع دایره C' برابر با 3 است و طول PO' را d در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} C'(O', 3) : PA \cdot PB &= d^2 - 3^2 \\ C(O, R) : PA \cdot PB &= PT^2 = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = 5$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۷. در شکل روبه‌رو، طول پاره‌خط MD کدام است؟



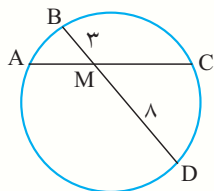
۸ (۱)

۹ (۲)

۱۲ (۳)

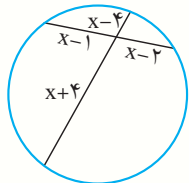
۱۶ (۴)

۲۸. **مسئله** در شکل روبه‌رو، $AC = 10$ ، طول پاره‌خط MC کدام است؟ ($MA < MC$)



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

۲۹. در شکل روبه‌رو، مقدار x کدام است؟

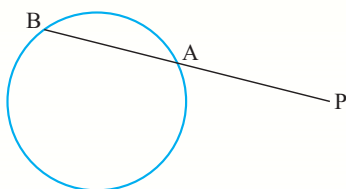


- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

۳۰. **مسئله** نزدیک‌ترین نقطه از دایره‌ای به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری

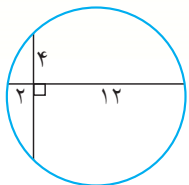
(سراسری ریاضی - ۹۰)

رسم شده است که $PA - AB = 2$ ، اندازه AB چه قدر است؟



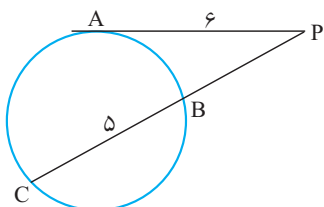
- ۹ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۵ (۴)

۳۱. **مسئله** در شکل روبه‌رو، شعاع دایره کدام است؟



- $3\sqrt{6}$ (۱)
- $5\sqrt{2}$ (۲)
- $2\sqrt{7}$ (۳)
- $2\sqrt{5}$ (۴)

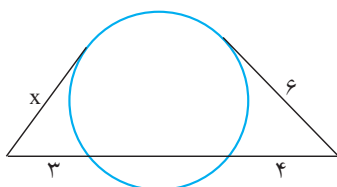
۳۲. در شکل روبه‌رو، $PA = 6$ و $BC = 5$. طول پاره‌خط PB کدام است؟



- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

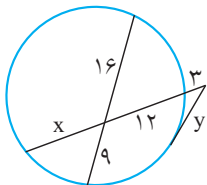
(سراسری ریاضی - ۹۱)

۳۳. **مسئله** در شکل مقابل، اندازه x چند واحد است؟



- $3\sqrt{2}$ (۱)
- $2\sqrt{5}$ (۲)
- $2\sqrt{6}$ (۳)
- ۵ (۴)

۳۴. در شکل مقابل، مقدار $(x-y)$ کدام است؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۳۵. در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است، نقطه C در امتداد AB به فاصله $CB = 2\sqrt{2}$

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

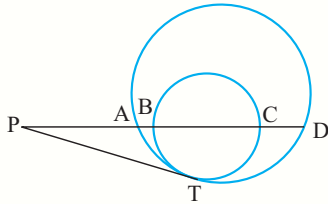
انتخاب شده است. طول قطعه مماسی که از C بر دایره رسم شود، کدام است؟

- $5\sqrt{2}$ (۴)
- ۷ (۳)
- $3\sqrt{5}$ (۲)
- $2\sqrt{10}$ (۱)

۳۶. **مسئله** دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در نقاط P و Q متقاطع‌اند. از نقطه دلخواه M واقع بر امتداد PQ ، مماس‌های MT و MT' را به ترتیب بر دایره‌های C و C' رسم می‌کنیم. اگر $R' = 2R$ باشد، حاصل $\frac{MT'}{MT}$ کدام است؟

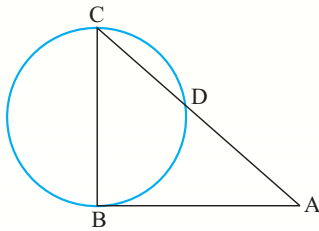
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) به محل نقطه M بستگی دارد.

۳۷. **مسئله** در شکل روبه‌رو، PT بر هر دو دایره مماس است. اگر $PA = 4$ ، $PC = 10$ و $BD = 6$ ، آنگاه اندازه PB کدام است؟



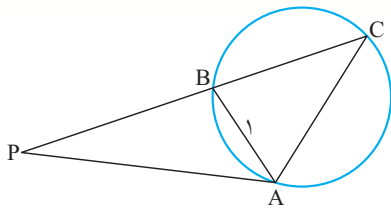
- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۳۸. خط AB بر دایره‌ای به قطر $BC = 6$ مماس است. اگر $CD = 4$ ، طول پاره‌خط AD کدام است؟



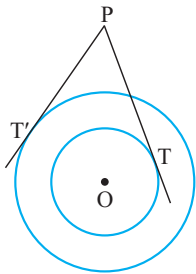
- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۳۹. **مسئله** در شکل زیر، PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $AB = 1$. طول AC چقدر است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (۴) ۲

۴۰. در شکل روبه‌رو، دو دایره هم‌مرکز هستند که شعاع‌هایشان $R = 3$ و $R' = 5$. مقدار $PT'^2 - PT^2$ کدام است؟



- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

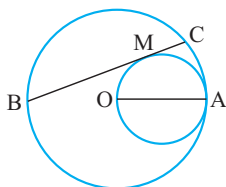
۴۱. **مسئله** نقطه P درون دایره‌ای به شعاع ۱۰ قرار دارد و فاصله‌اش تا مرکز دایره ۶ است، وتر AB از نقطه P می‌گذرد به طوری

که $AB = 20$ ، طول PA کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

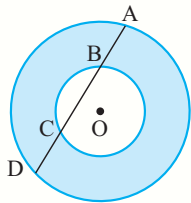
۴۲. **مسئله** در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \cdot MC$ برابر کدام است؟

(سراسری قارچ از کشور ریاضی - ۹۴)



- (۱) MO^2 (۲) MA^2 (۳) OA^2 (۴) $MA \cdot MO$

۴۳. **رسور** در شکل روبه‌رو، وتر AD از دایره بزرگ‌تر، دایره کوچک‌تر را در نقاط C و B قطع کرده است. اگر $AB=4$ و



$BC=5$ ، آن‌گاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۱) 20π

(۲) 36π

(۳) 16π

(۴) 25π

۴۴. **نکته‌ر** نقطه P به روی وتر AB به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کرده است.

(سراسری ریاضی - ۸۲)

طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه P کدام است؟

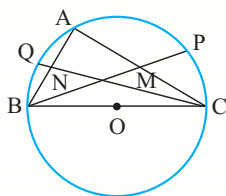
(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

۴۵. **رسور** در شکل روبه‌رو، $BC=6$ قطر دایره و میانه‌های BM و CN در مثلث ABC امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط P و Q قطع کنند. مقدار $BM \cdot MP + CN \cdot NQ$ برابر با کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۹

(۳) ۱۶

(۴) ۳۶

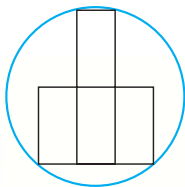
۴۶. **رسور** چهار تا مستطیل 2×4 مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟

(۱) $\sqrt{84}$

(۲) $\sqrt{85}$

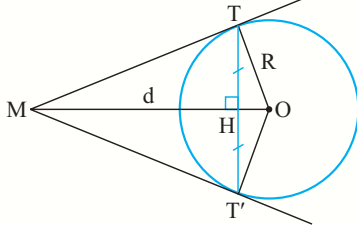
(۳) $\sqrt{86}$

(۴) $\sqrt{87}$



مماس بر دایره و حالت‌های دو دایره نسبت به هم

از نقطه M خارج دایره، می‌توان دو مماس بر دایره رسم کرد. طول این دو مماس با هم برابر هستند.

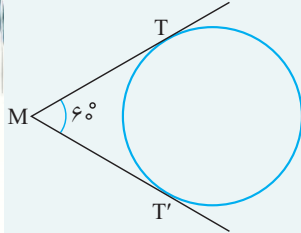


$$MT = MT' = \sqrt{d^2 - R^2}$$

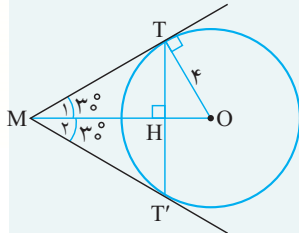
MO نیمساز زاویه‌های M و O است.

MO عمودمنصف TT' است.

مثال شعاع دایره برابر با ۴ و $\widehat{M} = 60^\circ$ است. MT، TT' و OM را محاسبه کنید.



پاسخ OM نیمساز \widehat{M} است. پس:



$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 30^\circ$$

$$\triangle OTM: \sin \widehat{M}_1 = \frac{OT}{OM} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{4}{OM} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{OM} \Rightarrow OM = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} OM = 8 \\ OT = 4 \\ OT^2 + TM^2 = OM^2 \end{array} \right\} \Rightarrow TM^2 = 48 \Rightarrow TM = 4\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle MTH: \sin \widehat{M}_1 = \frac{TH}{MT} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{TH}{MT} \\ MT = 4\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow TH = 2\sqrt{3}$$

OM عمودمنصف TT' است، پس $TT' = 2TH$.

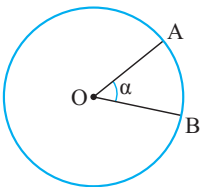
$$TT' = 2TH \xrightarrow{TH=2\sqrt{3}} TT' = 4\sqrt{3}$$

قطاع دایره

اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره برابر α درجه باشد:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\alpha}{360^\circ} (\pi R^2)$$

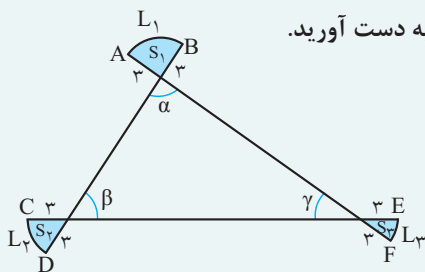
$$\text{طول کمان AB} = \frac{\alpha}{360^\circ} (2\pi R)$$



مثال

S_1 ، S_2 و S_3 مساحت قطاع‌هایی از دایره هستند. $S_1 + S_2 + S_3$ را به دست آورید.

L_1 ، L_2 و L_3 طول کمان‌های AB، CD و EF هستند. $L_1 + L_2 + L_3$ را به دست آورید.



پاسخ

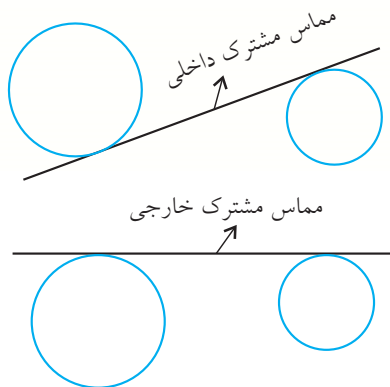
لرف

ب

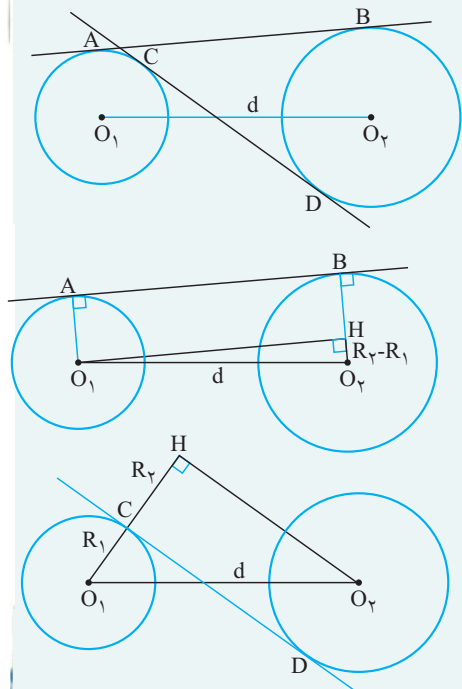
$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\alpha}{360^\circ} (\pi R^2) = \frac{9\pi\alpha}{360^\circ} \\ S_2 &= \frac{\beta}{360^\circ} (\pi R^2) = \frac{9\pi\beta}{360^\circ} \\ S_3 &= \frac{\gamma}{360^\circ} (\pi R^2) = \frac{9\pi\gamma}{360^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = \frac{9\pi(\alpha + \beta + \gamma)}{360^\circ} \left. \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = \frac{9\pi \times 180^\circ}{360^\circ} = 4.5\pi$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{\alpha}{360^\circ} (2\pi R) = \frac{6\pi\alpha}{360^\circ} \\ L_2 &= \frac{\beta}{360^\circ} (2\pi R) = \frac{6\pi\beta}{360^\circ} \\ L_3 &= \frac{\gamma}{360^\circ} (2\pi R) = \frac{6\pi\gamma}{360^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow L_1 + L_2 + L_3 = \frac{6\pi(\alpha + \beta + \gamma)}{360^\circ} \left. \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow L_1 + L_2 + L_3 = 3\pi$$

مماس مشترک: خطی است که بر دو دایره مماس باشد. اگر هر دو دایره در یک طرف خط باشند، خط را مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در طرفین خط باشند، آن را مماس مشترک داخلی می‌نامند.



مثال برای دو دایره $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ ، طول مماس مشترک داخلی و خارجی را بر حسب d (فاصله بین مرکزهای دو دایره)، R_1 و R_2 به دست آورید.



$$\left. \begin{aligned} O_1H &= AB \\ O_1H &= \sqrt{d^2 - (R_2 - R_1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = \sqrt{d^2 - (R_2 - R_1)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} O_2H &= CD \\ O_2H &= \sqrt{d^2 - (R_2 + R_1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow CD = \sqrt{d^2 - (R_2 + R_1)^2}$$

پاسخ