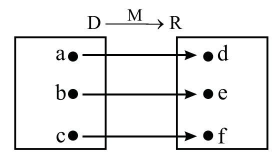
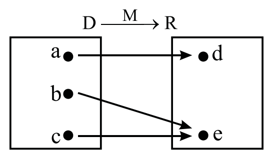
فصل سوم: تبدیل‌ها

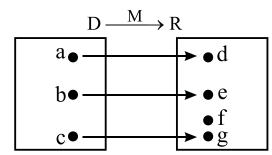
پرسش‌های چهار گزینه‌ای

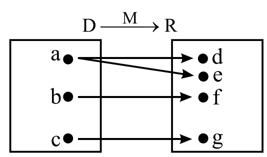
نگاشت

۱- در کدام‌یک از موارد زیر، نظیرسازی M، نگاشتی از D به R <u>نیست</u>؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲- نگاشت $F(x,y)=(x+y\,,\,۲x-y)$ نقطه‌ی $A(\frac{۲}{۳},-\frac{۵}{۳})$ را به کدام نقطه تصویر می‌کند؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۴) $(۱,۱)$

۳- نگاشت $T(x\,,\,y)=(۲y+۱,\,۳x-۲)$ مفروض است. اگر تصویر نقطه‌ی $A(۲,m)$ تحت این نگاشت نقطه‌ی $B(۱,n)$ باشد، آن‌گاه $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- مختصات نقطه‌ای که تصویر آن تحت تبدیل $T(x,y)=(x-۳y,\,۳x-۲y)$ نقطه‌ی $(-۴,۲)$ است، کدام می‌باشد؟

۱) $(۳,۲)$ ۲) $(۲,۲)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۳,۱)$

۵- تصویر دو نقطه‌ی $A(۲,۴)$ و $B(-۶,۲)$ را تحت تبدیل $D(x\,,\,y)=(-\frac{۱}{۲}y\,,\,\frac{۱}{۲}x+۱)$، A' و B' می‌نامیم. زاویه‌ی بین دو خط AB و $A'B'$ چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸۰

۶- تبدیل‌های $T(x\,,\,y)=(x\,,\,y-۲)$ و $F(x\,,\,y)=(x-y\,,\,۲y)$ مفروضند. اگر $T(A)=B$، $F(B)=C$ و $C(-۵,۲)$، آن‌گاه فاصله‌ی A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{۲۹}$

۷- تصویر چهارضلعی $PQRS$ با رئوس $S(۰,۰), R(-۱,۳), Q(۰,۲), P(۱,-۱)$ در اثر نگاشت $T(x\,,\,y)=(y\,,\,x-۱)$ کدام است؟

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) ذوزنقه

۸- اگر $T(x,y)=(ax+by,\,cx+dy)$ یک تبدیل باشد و داشته باشیم $T(۲,۱)=(۴,۱)$ و $T(۳,-۲)=(۶,۵)$، آن‌گاه $T(۲,۲)$ کدام است؟

۱) $(۶\,,\,-۱)$ ۲) $(۲\,,\,۰)$ ۳) $(۴\,,\,۰)$ ۴) $(۳\,,\,-۲)$

۹- اگر مبدأ مختصات، تصویر نقطه‌ی A تحت تبدیل $T(x,y)=(۳x-۱,\,۲y+۳)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی A می‌تواند روی کدام‌یک از خطوط زیر قرار داشته باشد؟

۱) $۹x-۲y=۰$ ۲) $۳y-x=۰$ ۳) $۳y+x=۰$ ۴) $۲y+۹x=۰$

۱۰- اگر $A(۱,۱)$، $B(۳,۱)$ و $C(۵,۲)$ رأس‌های مثلث ABC باشند. تصویر مثلث ABC تحت تبدیل $T(x,y)=(x-۳y,\,y-۲)$ چه مساحتی دارد؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۱- اگر $F(x,y)=(3x,y+2)$ و $G(x,y)=(2y+1,2x)$، آن‌گاه تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $(3,-1)$ ابتدا تحت تبدیل G و سپس تحت تبدیل F کدام است؟

۱) $(21,0)$ ۲) $(-3,8)$ ۳) $(3,18)$ ۴) $(4,-16)$

۱۲- کدام نگاشت $T:R^2 \to R^2$ با ضابطه‌ی داده شده یک تبدیل است؟

۱) $T(x,y)=(x+3y,2)$ ۲) $T(x,y)=(x^2-1,y+3)$

۳) $T(x,y)=(5,y^2+1)$ ۴) $T(x,y)=(x+y,x)$

۱۳- نگاشت M با ضابطه‌ی $M(x,y)=(x,0)$ روی نقاط صفحه، تعریف شده است. کدام گزینه درباره‌ی نگاشت M همواره درست است؟

۱) ایزومتری است. ۲) شیب خطوط را حفظ می‌کند.

۳) یک‌به‌یک نیست. ۴) مساحت را ثابت نگه می‌دارد.

۱۴- کدام‌یک از نگاشت‌های زیر یک تبدیل نیست؟

۱) $T(x,y)=(x^3,y^3)$ ۲) $T(x,y)=(y,x)$

۳) $T(x,y)=(x^3-x,y)$ ۴) $T(x,y)=(x^2+y,x)$

۱۵- کدام‌یک از نگاشت‌های زیر تبدیل نمی‌باشد؟

۱) $T(x,y)=(2x-y,2y-4x)$ ۲) $F(x,y)=(x^3,x^2+y^3)$

۳) $H(x,y)=(x+y,x-y)$ ۴) $G(x,y)=(y+1,3x^5+\sin y)$

۱۶- نگاشت M به هر نقطه‌ی واقع بر خط ثابت L، خود آن نقطه را نسبت می‌دهد و به هر نقطه‌ی غیر واقع بر خط L، تصویر قائم آن روی خط L را نسبت می‌دهد. در مورد نگاشت M کدام گزینه درست است؟

۱) نه یک‌به‌یک است، نه ایزومتری. ۲) یک‌به‌یک و غیر ایزومتری است.

۳) غیر یک‌به‌یک و ایزومتری است. ۴) یک‌به‌یک و ایزومتری است.

۱۷- کدام توصیف برای نگاشت $T(x,y)=(0,y)$ درست است؟

۱) T ایزومتری است. ۲) T نقاط را روی محور yها تصویر می‌کند.

۳) T شیب خطوط را حفظ می‌کند. ۴) T نقاط را روی محور xها تصویر می‌کند.

۱۸- نگاشت $F(x,y)=(x,x)$ کدام ویژگی را دارد؟

۱) ثابت است. ۲) یک‌به‌یک است.

۳) ایزومتری است. ۴) هر نقطه از صفحه را روی نیمساز ربع اول و سوم می‌نگارد.

۱۹- کدام تبدیل زیر ایزومتری است؟

۱) $T(x,y)=(2x,3y)$ ۲) $T(x,y)=(2x,\frac{1}{3}y)$

۳) $T(x,y)=(x+y,x-y)$ ۴) $T(x,y)=(-y+2,x-1)$

۲۰- به ازای کدام مقدار m تبدیل $T(x,y)=(mx+1\ ,\ my+2)$ ایزومتری است؟

۱) ± 1 ۲) فقط ۱ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

۲۱- به ازای کدام مقادیر a تبدیل $T(x,y)=(ax+ay,ax-ay)$ ایزومتری است؟

۱) ± 1 ۲) $\pm\sqrt{2}$ ۳) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ± 2

۲۲- اگر تبدیل $T(x,y)=(ax+by,bx-ay)$ ایزومتری باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $a-b=1$ ۲) $a^2+b^2=1$ ۳) $a^2-b^2=1$ ۴) $a+b=1$

۲۳- اگر نگاشت $T(x,y)=((m-1)x+m,-y+m)$ یک تبدیل ایزومتری باشد، آن‌گاه m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۲۴- کدام تبدیل شیب خط را حفظ می‌کند؟

۱) $T(x,y)=(-y,7+x)$ ۲) $T(x,y)=(-2x+3,2y+1)$

۳) $T(x,y)=(-3x+1,-3y-4)$ ۴) $T(x,y)=(-x+1,-2y+1)$

۲۵- تصویر محور x ها تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۳y,x-y)$ کدام است؟

۱) $x=۲y$ ۲) $۲x+y=۰$ ۳) $۳x+۲y=۰$ ۴) $x=y$

۲۶- تبدیل $T(x,y)=(۲x+y,۲y+x)$ خط $x+y=۱$ را بر کدام خط تصویر می‌کند؟

۱) $x+y=۳$ ۲) $y-x=۱$ ۳) $x+y=۱$ ۴) $x-y=۱$

۲۷- اگر $F(x,y)=(۲x-y,x+y)$ ، تصویر منحنی $x^۲-۲x+y=۱-y^۲-۲xy$ تحت این تبدیل کدام است؟

۱) $x^۲-y=۱$ ۲) $x=y^۲+۱$ ۳) $y^۲=x+۱$ ۴) $xy-y^۲=۱$

۲۸- کدام نقطه از خط $d:y=x+۲$ تحت تبدیل $T(x,y)=(mx+۲y,mx+y-۴)$ منطبق بر تصویر خود است؟

۱) $(-۸,-۶)$ ۲) $(۳,۵)$ ۳) $(-۳,-۱)$ ۴) $(۵,۷)$

۲۹- اگر تبدیل‌یافته‌ی خط $d:y-۳x+۳=۰$ تحت تبدیل $T(x,y)=(۲y-a,x+۳)$ از نقطه‌ی $(۶,۱)$ بگذرد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۱۲ ۳) -۱۸ ۴) -۲۴

۳۰- به ازای کدام مقدار m خط d به معادله‌ی $y=(m-۳)x+۲$ بر تصویر خود توسط تبدیل $T(x,y)=(x+y,x-y)$ عمود است؟

۱) $۴\pm\sqrt{۲}$ ۲) ±۲ ۳) $۲\pm\sqrt{۲}$ ۴) ±۴

۳۱- به ازای کدام مقدار m خط به معادله‌ی $d:y-(m+۱)x-۱=۰$ با تصویر خود تحت تبدیل $T(x,y)=(x,x-y)$ موازی است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) ۲

۳۲- تبدیل $T(x,y)=(x+y,x)$ خط $D:y=mx$ را روی خط D' تصویر می‌کند. اگر $D\perp D'$، آن‌گاه m کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۳- خط d به معادله‌ی $y=(m-۱)x+۱$ با تصویر خود توسط تبدیل $T(x,y)=(x+y,x-y)$ موازی است. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۴- تبدیل یافته‌ی خط $d:x+y-۱=۰$ ابتدا تحت تبدیل $T(x,y)=(x+y,\frac{۱}{۲}y)$ و سپس تحت تبدیل $F(x,y)=(x-۲y,۲y)$ کدام است؟

۱) $۲x-۳y-۱=۰$ ۲) $x+y-۱=۰$ ۳) $x-y+۱=۰$ ۴) $۳x-۲y+۱=۰$

۳۵- L' تصویر خط $L:۲x+۳y=۶$ تحت تبدیل $f(x,y)=(-y,x)$ است. اگر L'' تصویر L' تحت تبدیل نقطه‌ی $g(x,y)=(x-۱,y+۱)$ باشد، خط L'' از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(۲,\frac{۵}{۲})$ ۲) $(-۲,\frac{۵}{۲})$ ۳) $(۳,۱)$ ۴) $(۳,-۱)$

۳۶- تبدیل‌های $T(x,y)=(y,x)$ و $T'(x,y)=(-y,x)$ مفروضند. تصویر خط $d:۲x-y-۲=۰$ در اثر تبدیل $T'OT$ محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

انتقال

۳۷- کدام‌یک از تبدیل‌های زیر ضابطه‌ی یک انتقال است؟

۱) $F(x,y)=(۵-x,۳+y)$ ۲) $F(x,y)=(y+۳,x-۱)$

۳) $F(x,y)=(\frac{x-۱}{۲},\frac{y+۲}{۴})$ ۴) $F(x,y)=(\frac{۲x+۳}{۲},\frac{۳y+۱}{۳})$

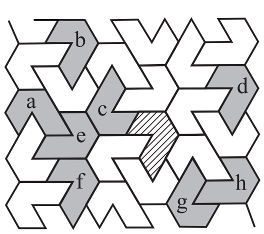
۳۸- در شکل مقابل، چند تصویر از تصویرهای مشخص شده، تصویر انتقال یافته‌ی شکل هاشورخورده هستند؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴



فصل سوم: تبدیل‌ها

پاسخ‌های تشریحی

Ⓐ **۱- گزینه‌ی ۴** طبق تعریف، یک نگاشت از D به R، یک عمل نظیرسازی است که به هر عضو مجموعه‌ی D یک و تنها یک عضو از مجموعه‌ی R را نظیر کند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نگاشت هستند. اما گزینه‌ی (۴) نگاشت نیست، زیرا یکی از عضوهای D یعنی a به دو عضو مختلف R یعنی d و e نظیر شده است. لذا شرط نگاشت بودن را ندارد.

Ⓐ **۲- گزینه‌ی ۲** در ضابطه‌ی F کافی است به جای x، عدد $\frac{۲}{۳}$ و به جای y عدد $-\frac{۵}{۳}$ را قرار دهیم:

$$F(A)=F(\frac{۲}{۳},-\frac{۵}{۳})=(\frac{۲}{۳}-\frac{۵}{۳},\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۳})=(-۱,۳)$$

Ⓑ **۳- گزینه‌ی ۴** از آن‌جا که نقطه‌ی B تصویر نقطه‌ی A تحت T است لذا $T(A)=B$، پس داریم:

$$T(A)=B\Rightarrow T(۲,m)=(۱,n)\Rightarrow(۲m+۱,۶-۲)=(۱,n)\Rightarrow\begin{cases}۲m+۱=۱\Rightarrow m=۰\\ ۴=n\end{cases}\Rightarrow m+n=۴$$

Ⓑ **۴- گزینه‌ی ۲** با توجه به متن سؤال باید x و yای را به دست آوریم که در آن $T(x,y)=(-۴,۲)$. پس:

$$\begin{cases}x-۳y=-۴\\ ۳x-۲y=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۳x+۹y=۱۲\\ ۳x-۲y=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=۲\\ x=۲\end{cases}$$

Ⓑ **۵- گزینه‌ی ۳** تصاویر دو نقطه‌ی A و B را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{array}{l}A(۲,۴)\xrightarrow{D}A'(-۲,۲)\\ B(-۶,۲)\xrightarrow{D}B'(-۱,-۲)\end{array}\quad و\quad \begin{array}{l}m_{AB}=\frac{۴-۲}{۲+۶}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\\ m_{A'B'}=\frac{۲+۲}{-۲+۱}=-۴\end{array}\Rightarrow m_{AB}=\frac{-۱}{m_{A'B'}}\Rightarrow AB\perp A'B'$$

Ⓑ **۶- گزینه‌ی ۳** با داشتن مختصات C مختصات نقاط B و A را به‌دست می‌آوریم.

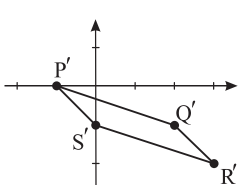
$$F(B)=C\Rightarrow(x-y,۲y)=(-۵,۲)\Rightarrow\begin{cases}x-y=-۵\\ ۲y=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۴\\ y=۱\end{cases}\Rightarrow B(-۴,۱)$$

$$T(A)=B\Rightarrow(x,y-۲)=(-۴,۱)\Rightarrow\begin{cases}x=-۴\\ y-۲=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۴\\ y=۳\end{cases}\Rightarrow A(-۴,۳)$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ را محاسبه می‌کنیم:

$$OA=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

Ⓑ **۷- گزینه‌ی ۳** تصویر چهارضلعی $PQRS$ تحت تبدیل T چهارضلعی $P'Q'R'S'$ با رئوس $S'(۰,-۱)$ ، $R'(۳,-۲)$ ، $Q'(۲,-۱)$ و $P'(-۱,۰)$ است، دیده می‌شود $P'+R'=Q'+S'$ پس اقطار چهارضلعی $P'Q'R'S'$ منصف یک‌دیگرند پس $P'Q'R'S'$ متوازی‌الاضلاع است.



$$m_{P'Q'}=\frac{-۱-۰}{۲+۱}=-\frac{۱}{۳},\ m_{P'S'}=\frac{-۱-۰}{۰+۱}=-۱\Rightarrow P'Q'\not\perp P'S'$$

$$\begin{cases}P'Q'=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}\\ P'S'=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow P'Q'\neq P'S'$$

بنابراین چهارضلعی $P'Q'R'S'$ نه مستطیل و نه لوزی می‌تواند باشد پس $P'Q'R'S'$ متوازی‌الاضلاع است.

B **۸- گزینه‌ی ۳** تبدیل موردنظر خطی به فرم $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$T(۲,۱)=(۲a+b,۲c+d)=(۴,۱)\Rightarrow\begin{cases}۲a+b=۴\\ ۲c+d=۱\end{cases}$$

$$T(۳,-۲)=(۳a-۲b,۳c-۲d)=(۶,۵)\Rightarrow\begin{cases}۳a-۲b=۶\\ ۳c-۲d=۵\end{cases}$$

حال کافی است دستگاه معادله‌ی روبه‌رو را حل کنیم:

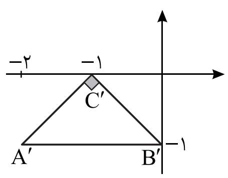
$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}۲a+b=۴\\ ۳a-۲b=۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=۰\end{cases}\\ \begin{cases}۲c+d=۱\\ ۳c-۲d=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=۱\\ d=-۱\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow T(x,y)=(۲x,x-y)\Rightarrow T(۲,۲)=(۴,۰)$$

B **۹- گزینه‌ی ۴** ابتدا مختصات نقطه‌ی $A(x,y)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$T(x,y)=(۳x-۱,۲y+۳)=(۰,۰)\Rightarrow\begin{cases}۳x-۱=۰\\ ۲y+۳=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{۳}\\ y=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow A=(\frac{۱}{۳},-\frac{۳}{۲})$$

در بین گزینه‌ها نقطه‌ی A می‌تواند روی خط $۲y+۹x=۰$ قرار بگیرد.

C **۱۰- گزینه‌ی ۱** ابتدا تصویر نقاط A، B و C را تحت تبدیل T به‌دست می‌آوریم:



$$A'=T(A)=T(۱,۱)=(-۲,-۱)$$
$$B'=T(B)=T(۳,۱)=(۰,-۱)$$
$$C'=T(C)=T(۵,۲)=(-۱,۰)$$

مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الساقین بوده و در رأس C' قائم است. بنابراین داریم:

$$S_{\underset{A'B'C'}{\Delta}}=\frac{A'C'\times B'C'}{۲}=\frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۲}=۱$$

یا این‌که ارتفاع وارد بر ضلع $A'B'$ برابر یک می‌باشد و $A'B'=۲$، پس داریم:

$$S_{\underset{A'B'C'}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}h\times A'B'=\frac{۱}{۲}(۱)(۲)=۱$$

B **۱۱- گزینه‌ی ۲** **راه‌حل اول:** ابتدا $G(۳,-۱)$ را به‌دست آورده، سپس حاصل را در تبدیل F قرار می‌دهیم:

$$G(۳,-۱)=(۲(-۱)+۱,۲(۳))=(-۱,۶)$$

$$F(-۱,۶)=(۳(-۱),۶+۲)=(-۳,۸)$$

راه‌حل دوم: ابتدا ضابطه‌ی FOG را به دست می‌آوریم و سپس حاصل $FOG(۳,-۱)$ را به دست می‌آوریم.

$$FOG(x,y)=F(G(x,y))=F(۲y+۱,۲x)=(۶y+۳,۲x+۲)\Rightarrow FOG(۳,-۱)=(-۳,۸)$$

B **۱۲- گزینه‌ی ۴** می‌دانیم تبدیل نگاشـتی یک‌به‌یک از صفحه بر روی خودش اسـت. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) تبدیل نیسـتند، زیرا شرط یک‌به‌یک بودن را ندارند.

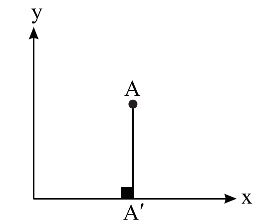
گزینه‌ی (۱): $T(x,y)=(x+۳y,۲)\Rightarrow T(۱,۱)=T(۴,۰)=(۴,۲)$

گزینه‌ی (۲): $T(x,y)=(x^۲-۱,y+۳)\Rightarrow T(۱,۰)=T(-۱,۰)=(۰,۳)$

گزینه‌ی (۳): $T(x,y)=(۵,y^۲+۱)\Rightarrow T(۱,۱)=T(۱,-۱)=(۵,۲)$

حال به بررسی تبدیل بودن گزینه‌ی (۴) می‌پردازیم و آن را ثابت می‌کنیم.

$$T(x,y)=T(x',y')\Rightarrow(x+y,x)=(x'+y',x')\Rightarrow\begin{cases}x+y=x'+y'\xrightarrow{(۱)}\boxed{y=y'}\\ \boxed{x=x'}\quad(۱)\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(x',y')$$



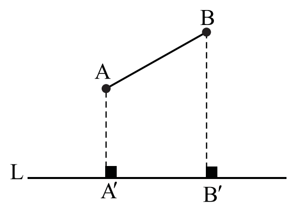
A **۱۳- گزینه‌ی ۳** این نگاشت هر نقطه مانند $A(x,y)$ را به نقطه‌ی $A'(x,۰)$ تصویر می‌کند. بنابراین هر نقطه روی پاره‌خطی مانند AA' در شکل (یا امتداد آن) به نقطه‌ی A' تصویر می‌شود. لذا این نگاشت یک‌به‌یک نیست.

A **۱۴- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم تبدیل، نگاشتی یک‌به‌یک از صفحه بر روی خودش است. اما گزینه‌ی (۳) شرط یک‌به‌یک بودن را دارا نیست، زیرا:
$T(۰,۱)=T(۱,۱)=T(-۱,۱)=(۰,۱)$

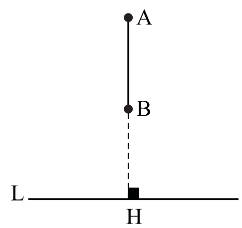
C **۱۵- گزینه‌ی ۱** می‌دانیم تبدیل نگاشتی یک‌به‌یک از صفحه بر روی خودش است ولی گزینه‌ی (۱) شرط یک‌به‌یک بودن را دارا نیست، زیرا:
$T(۱,۲)=T(۲,۴)=(۰,۰)$

تذکر: می‌توان برای بررسی تبدیل بودن یا نبودن نگاشت‌هایی مانند گزینه‌ی (۱) و (۳) از نکته‌ی زیر نیز استفاده کرد:
نگاشت T با ضابطه‌ی $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ با شرط $ad\neq bc$ همواره یک تبدیل است.

B **۱۶- گزینه‌ی ۱** مطابق شکل (۱) نقاطی که روی خطوط عمود بر L قرار دارند، به یک نقطه تصویر می‌شوند، پس نگاشت داده شده یک‌به‌یک نیست. در ضمن این نگاشت ایزومتری نیست زیرا مطابق شکل (۲)، $A'B'$ تصویر AB روی خط L است ولی طول AB و $A'B'$ برابر نیست.

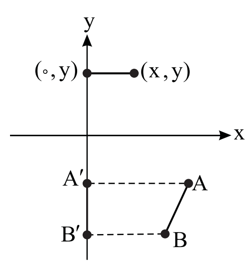


(۲)



(۱)

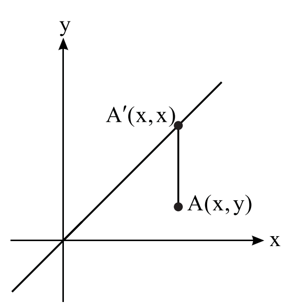
A **۱۷- گزینه‌ی ۲** با توجه به شکل، این نگاشت نقاط روی صفحه را بر محور yها تصویر می‌کند. در ضمن در شکل $A'B'$ تصویر AB تحت نگاشت T است. به وضوح دیده می‌شود که $AB\neq A'B'$ و $AB \nparallel A'B'$، پس سایر گزینه‌ها درست نیستند.



C **۱۸- گزینه‌ی ۴** بررسی گزینه‌ی (۱): F ثابت نیست، زیرا $F(۱,۲)=(۱,۱)$ و $F(۳,۲)=(۳,۳)$ پس همه‌ی نقاط به یک نقطه تصویر نمی‌شوند.
بررسی گزینه‌ی (۲): F یک‌به‌یک نیست، زیرا $F(۱,۲)=(۱,۱)$ و $F(۱,۳)=(۱,۱)$. در حقیقت تصویر دو نقطه، یک نقطه شده است، پس F یک‌به‌یک نیست.
بررسی گزینه‌ی (۳): F ایزومتری نیست، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} A(۱,۲)\xrightarrow{F}A'(۱,۱)\\ B(۳,۲)\xrightarrow{F}B'(۳,۳)\end{array}\right.\xrightarrow[A'B'=۲\sqrt{۲}]{AB=۲}AB\neq A'B'$$

بررسی گزینه‌ی (۴): با توجه به تعریف F هر نقطه از صفحه مثل $A(x,y)$ به نقطه‌ی $A'(x,x)$ که روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، تصویر می‌شود.



A **۱۹- گزینه‌ی ۴** طبق تعریف، تبدیل ایزومتری، تبدیلی است که فاصله‌ی بین نقاط را حفظ می‌کند و تنها گزینه‌ی (۴) تبدیلی ایزومتری می‌باشد، زیرا:

$$\begin{cases} A(x,y)\\ B(x',y')\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A'=T(A)=(-y+۲,x-۱)\\ B'=T(B)=(-y'+۲,x'-۱)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}|AB|=\sqrt{(x-x')^{۲}+(y-y')^{۲}}\\ |A'B'|=\sqrt{((-y+۲)-(-y'+۲))^{۲}+((x-۱)-(x'-۱))^{۲}}=\sqrt{(x-x')^{۲}+(y-y')^{۲}}\end{array}\right\}\Rightarrow|AB|=|A'B'|$$

Ⓐ **۲۰- گزینه‌ی ۱** با توجه به گزینه‌ها ممکن است این تبدیل ایزومتری نباشد بنابراین برای هر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ داریم:

$$A'=T(A)=(mx_۱+۱,my_۱+۲)$$

$$B'=T(B)=(mx_۲+۱\ ,my_۲+۲)$$

$$|A'B'|=\sqrt{(mx_۲-mx_۱)^۲+(my_۲-my_۱)^۲}=\sqrt{m^۲(x_۲-x_۱)^۲+m^۲(y_۲-y_۱)^۲}=|m|\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$|AB|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$|A'B'|=|AB|\Rightarrow|m|=۱\Rightarrow m=\pm۱$$

Ⓑ **۲۱- گزینه‌ی ۳** با توجه به این‌که تصویر مبدأ مختصات تحت تبدیل T بر خودش منطبق است، می‌توان گفت که اندازه‌ی هر پاره‌خط OA $(O(۰,۰),A(x,y))$ باید با اندازه‌ی پاره‌خط تصویرش (OA') برابر باشد، بنابراین داریم:

$$A'=T(A)=(ax+ay,ax-ay)$$

$$|OA|=|OA'|\Rightarrow\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{(ax+ay)^۲+(ax-ay)^۲}=|a|\sqrt{۲}\ \sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow|a|\sqrt{۲}=۱\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

Ⓑ **۲۲- گزینه‌ی ۲** تصویر مبدأ مختصات تحت تبدیل T بر خودش منطبق است. لذا برای این‌که تبدیل T ایزومتری باشد، می‌توان طول هر پاره‌خط OA $(O(۰,۰),A(x,y))$ را با طول تصویرش یعنی OA' $(O(۰,۰),A'(ax+by\ ,\ bx-ay))$ برابر قرار داد، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|OA|=\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{x^۲+y^۲}\\ |OA'|=\sqrt{(ax+by-۰)^۲+(bx-ay-۰)^۲}=\sqrt{(a^۲+b^۲)\ (x^۲+y^۲)}\end{array}\right\}\xrightarrow{|OA|=|OA'|}\sqrt{a^۲+b^۲}=۱\Rightarrow a^۲+b^۲=۱$$

Ⓑ **۲۳- گزینه‌ی ۲** تصاویر دو نقطه‌ی دلخواه $A(۰,۰)$ و $B(۱,۰)$ را به‌دست آورده، سپس فاصله‌ی آن‌ها را با AB برابر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{l}A(۰,۰)\xrightarrow{T}A'(m,m)\\ B(۱,۰)\xrightarrow{T}B'(۲m-۱,m)\end{array}\xrightarrow{AB=A'B'}۱=\sqrt{(m-۱)^۲+۰}\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\ m=۰\end{cases}$$

Ⓑ **۲۴- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم شیب خطی که نقطه‌ی $A(x,y)$ را به نقطه‌ی $A'(x',y')$ وصل می‌کند، برابر است با:

$$m_{AA'}=\frac{y-y'}{x-x'}$$

برای تک‌تک گزینه‌ها شیب پاره‌خط OA $(O(۰,۰),A(x,y))$ را با شیب تصویر آن تحت تبدیل T که آن را $O'A'$ می‌نامیم، مقایسه می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $T(x,y)=(-y,۷+x)$

$$O'=T(۰,۰)=(۰,۷)\ ,\ A'=T(x,y)=(-y,۷+x)$$

$$m_{OA}=\frac{y-۰}{x-۰}=\frac{y}{x}\ ,\ m_{O'A'}=\frac{۷+x-۷}{-y-۰}=\frac{-x}{y}\Rightarrow m_{OA}\neq m_{O'A'}$$

گزینه‌ی (۲): $T(x,y)=(-۲x+۳,۲y+۱)$

$$O'=T(۰,۰)=(۳,۱)\ ,\ A'=T(x,y)=(-۲x+۳\ ,\ ۲y+۱)$$

$$m_{OA}=\frac{y-۰}{x-۰}=\frac{y}{x}\ ,\ m_{O'A'}=\frac{۲y+۱-۱}{-۲x+۳-۳}=\frac{-y}{x}\Rightarrow m_{OA}\neq m_{O'A'}$$

گزینه‌ی (۳): $T(x,y)=(-۳x+۱,-۳y-۴)$

$$O'=T(۰,۰)=(۱,-۴)\ ,\ A'=T(x,y)=(-۳x+۱,-۳y-۴)$$

$$m_{OA}=\frac{y-۰}{x-۰}=\frac{y}{x}\ ,\ m_{O'A'}=\frac{-۳y-۴-(-۴)}{-۳x+۱-۱}=\frac{y}{x}\Rightarrow m_{OA}=m_{O'A'}$$

گزینه‌ی (۴): $T(x,y)=(-x+۱,-۲y+۱)$

$$O'=T(۰,۰)=(۱,۱)\ ,\ A'=T(x,y)=(-x+۱,-۲y+۱)$$

$$m_{OA}=\frac{y-۰}{x-۰}=\frac{y}{x}\ ,\ m_{O'A'}=\frac{-۲y+۱-۱}{-x+۱-۱}=\frac{۲y}{x}\Rightarrow m_{OA}\neq m_{O'A'}$$

بنابراین فقط گزینه‌ی (۳) شیب خطوط را حفظ می‌کند.

(B) **۲۵- گزینه‌ی ۴** معادله‌ی محور xها به صورت $y=0$ است، لذا خواهیم داشت:

$$T(x,y)=(x+3y,x-y)=(x',y') \Rightarrow \begin{cases} x+3y=x' \\ x-y=y' \end{cases} \Rightarrow -4y=y'-x' \xrightarrow{y=0} y'-x'=0 \Rightarrow x'=y' \text{ یا } x=y$$

(B) **۲۶- گزینه‌ی ۱** معادله‌ی تصویر خط $x+y=1$ را تحت تبدیل T به‌دست می‌آوریم:

$$T(x,y)=(x',y')=(2x+y,2y+x) \Rightarrow \begin{cases} x'=2x+y \\ y'=2y+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2x'-y'}{3} \\ y=\dfrac{2y'-x'}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y=\frac{2x'-y'}{3}+\frac{2y'-x'}{3} \xrightarrow{x+y=1} \frac{2x'-y'+2y'-x'}{3}=1 \Rightarrow x'+y'=3 \text{ یا } x+y=3$$

روش تستی: با روش تغییر متغیر داریم:

$$\begin{cases} 2x+y=x' \\ 2y+x=y' \end{cases} \xrightarrow{+} 3(x+y)=x'+y' \xrightarrow{x+y=1} x'+y'=3$$

(C) **۲۷- گزینه‌ی ۳** معادله‌ی منحنی مورد نظر را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^2-2x+y=1-y^2-2xy \Rightarrow x^2+y^2+2xy=(2x-y)+1 \Rightarrow (x+y)^2=(2x-y)+1$$

حال با توجه به ضابطه‌ی تبدیل F خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2x-y=x' \\ x+y=y' \end{cases} \xrightarrow{(x+y)^2=(2x-y)+1} y'^2=x'+1$$

(C) **۲۸- گزینه‌ی ۱** مختصات هر نقطه از خط d به صورت $M(\alpha,\alpha+2)$ است، بنابراین کافی است تصویر این نقطه را تحت تبدیل T پیدا کنیم و آن را مساوی مختصات نقطه‌ی M قرار دهیم:

$$M'=T(M)=T(\alpha\ ,\alpha+2) \Rightarrow M'=(m\alpha+2\alpha+4\ ,\ m\alpha+\alpha-2)$$

$$M=M' \Rightarrow (m\alpha+2\alpha+4\ ,\ m\alpha+\alpha-2)=(\alpha,\alpha+2) \Rightarrow \begin{cases} m\alpha+2\alpha+4=\alpha \\ m\alpha+\alpha-2=\alpha+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\alpha+\alpha+4=0 \\ m\alpha-4=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=-8$$

$$M=(\alpha,\alpha+2)=(-8,-6)$$

(C) **۲۹- گزینه‌ی ۴** ابتدا معادله‌ی خط d' تبدیل یافته‌ی d تحت تبدیل T را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x'=2y-a \\ y'=x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a+x'}{2} \\ x=y'-3 \end{cases} \xrightarrow{d:y-3x+3=0} \frac{a+x'}{2}-3(y'-3)+3=0 \Rightarrow d':x'-6y'+24+a=0$$

حال مختصات نقطه‌ی $(1\ ,\ 6)$ را در معادله‌ی خط d' جایگذاری می‌کنیم:

$$d':x-6y+24+a=0 \xrightarrow[y=1]{x=6} 6-6+24+a=0 \Rightarrow a=-24$$

تذکر: می‌توانستیم مختصات نقطه‌ای را به دست آوریم که تصویر آن $(6,1)$ است و سپس آن نقطه‌ی به دست آمده را در معادله‌ی d قرار دهیم.

(C) **۳۰- گزینه‌ی ۱** به روش تغییر متغیر معادله‌ی تبدیل یافته‌ی خط را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

$$\begin{cases} x+y=x' \\ x-y=y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'+y'}{2} \\ y=\dfrac{x'-y'}{2} \end{cases}$$

حال معادله‌ی d' (تصویر خط d) را می‌نویسیم:

$$d:y=(m-3)x+2 \Rightarrow \frac{x'-y'}{2}=(m-3)\frac{(x'+y')}{2}+2 \Rightarrow y'=(\frac{4-m}{m-2})x'-\frac{4}{m-2}$$

می‌دانیم دو خط بر هم عمودند هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 باشد داریم:

$$m_d.m_{d'}=-1 \Rightarrow \frac{4-m}{m-2}=\frac{-1}{m-3} \Rightarrow m-2=m^2-7m+12 \Rightarrow m=4\pm\sqrt{2}$$

Ⓑ **۳۱- گزینه‌ی ۱** ضابطه‌ی تصویر را به‌دست می‌آوریم:

$$T(x,y)=(x,x-y)\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\x-y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\y=x'-y'\end{cases}\xrightarrow{\text{در خط } d \text{ قرار می‌دهیم}}x'-y'=(m+۱)x'+۱\Rightarrow d':y'+mx'+۱=۰$$

شیب خط d' و شیب خط d باید مساوی باشد. بنابراین داریم: $m+۱=-m\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$

Ⓑ **۳۲- گزینه‌ی ۳** ابتدا معادله‌ی D' را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}x+y=x'\\x=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x'-y'\\x=y'\end{cases}\xrightarrow{\text{در خط } D \text{ قرار می‌دهیم}}x'-y'=my'\Rightarrow y'=\frac{۱}{m+۱}x'$$

$$D\perp D'\Rightarrow\frac{۱}{m+۱}\times m=-۱\Rightarrow m+۱=-m\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

Ⓑ **۳۳- گزینه‌ی ۳** ابتدا تصویر خط را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}x+y=x'\\x-y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x'+y'}{۲}\\y=\frac{x'-y'}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{در خط } d \text{ جای‌گذاری می‌کنیم}}\frac{x'-y'}{۲}=(m-۱)(\frac{x'+y'}{۲})+۱\Rightarrow x'-y'=(m-۱)(x'+y')+۲$$

$$\Rightarrow x'-y'=(m-۱)x'+(m-۱)y'+۲\Rightarrow d':my'+(m-۲)x'+۲=۰$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{شیب خط } d=m-۱\\\text{شیب خط } d'=\frac{۲-m}{m}\end{array}\right\}\xrightarrow{d\parallel d'}m-۱=\frac{۲-m}{m}\Rightarrow m^۲-m=۲-m\Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$$

Ⓒ **۳۴- گزینه‌ی ۲** باید معادله‌ی خط d را تحت تبدیل $FOT(x,y)$ به‌دست آوریم، بنابراین ضابطه‌ی این تبدیل را می‌نویسیم:

$$FOT(x,y)=F(T(x,y))=F(x+y,\frac{۱}{۲}y)=(x+y-۲(\frac{۱}{۲}y),۲(\frac{۱}{۲}y))=(x,y)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تبدیل یافته‌ی هر نقطه‌ی $A(x,y)$ تحت تبدیل $(FOT)(x,y)$ بر خودش منطبق است. بنابراین معادله‌ی تصویر خط d تحت تبدیل مورد نظر با معادله‌ی خط d یکسان است، یعنی: $d':x+y-۱=۰$

Ⓑ **۳۵- گزینه‌ی ۲** ابتدا معادله‌ی تصویر خط L را تحت تبدیل f به‌دست می‌آوریم:

$$f(x,y)=(-y,x)\Rightarrow\begin{cases}-y=x'\\x=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x'\\x=y'\end{cases}\xrightarrow[\text{جای‌گذاری می‌کنیم}]{\text{در } L}۲y'-۳x'=۶\Rightarrow L':۲y-۳x=۶$$

حال تصویر خط L' را تحت تبدیل g به‌دست می‌آوریم:

$$g(x,y)=(x-۱,y+۱)\Rightarrow\begin{cases}x-۱=x'\\y+۱=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'+۱\\y=y'-۱\end{cases}\xrightarrow[\text{جای‌گذاری می‌کنیم}]{\text{در } L'}۲(y'-۱)-۳(x'+۱)=۶\Rightarrow ۲y'-۳x'=۱۱$$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه‌ی $(-۲,\frac{۵}{۲})$ در خط L'' صدق می‌کند.

Ⓑ **۳۶- گزینه‌ی ۲** ابتدا ضابطه‌ی $T'OT$ را به‌دست می‌آوریم.

$$(T'OT)(x,y)=T'(T(x,y))=T'(y,x)=(-x,y)$$

$$\begin{cases}-x=x'\\y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-x'\\y=y'\end{cases}\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در خط } d}-۲x'-y'-۲=۰\Rightarrow ۲x'+y'+۲=۰\xrightarrow{y'=۰}x'=-۱$$

Ⓐ **۳۷- گزینه‌ی ۴** می‌دانیم ضابطه‌ی هر انتقال به صورت $T(x,y)=(x+a,y+b)$ اســت و تنها گزینه‌ای که می‌توان آن را به این صورت نوشت، گزینه‌ی (۴) می‌باشد، زیرا:

$$F(x,y)=(\frac{۲x+۳}{۲},\frac{۳y+۱}{۳})\Rightarrow F(x,y)=(x+\frac{۳}{۲},y+\frac{۱}{۳})$$