فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

یکی از شکل‌های مهم هندسی دایره است. در سال‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های دایره آشنا شده‌اید. هدف از این درس، یادآوری آنچه خوانده‌اید و تکمیل مطالب سال‌های قبل است.

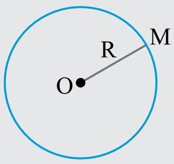
دایره

برای تعریف کردن دقیق دایره نیاز به دانستن مفهوم «**مکان هندسی**» است. چون مفهوم مکان هندسی خارج از برنامه‌ی این درس است، ما هم یک تعریف شهودی از دایره می‌آوریم.

تعریف

فرض کنید O نقطه‌ای ثابت و R عددی حقیقی و مثبت باشد. دایره‌ی به مرکز O و شعاع R مجموعه‌ی تمام نقطه‌هایی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی O برابر R باشد.

M روی دایره است $\Leftrightarrow OM = R$



توجه دایره‌ی C به مرکز O و شعاع R را به‌صورت $C(O, R)$ نمایش می‌دهیم.

نکته دو دایره با شعاع‌های مساوی با هم برابرند.

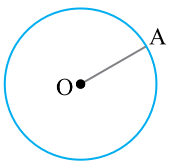
وضع نقطه و دایره

نقطه‌ی A و دایره‌ی $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. وضعیت این نقطه نسبت به دایره، به یکی از سه حالت زیر است:

۱) نقطه‌ی A **روی** دایره‌ی $C(O, R)$ است.

به مجموعه‌ی نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره برابر اندازه‌ی شعاع دایره باشد، نقطه‌های «روی دایره» می‌گوییم.

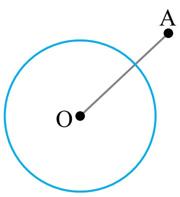
نقطه‌های روی دایره $= \{A \mid OA = R\}$



۲) نقطه‌ی A **بیرون** دایره‌ی $C(O, R)$ است.

به مجموعه‌ی نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره بزرگ‌تر از اندازه‌ی شعاع دایره باشد، نقطه‌های «بیرون دایره» می‌گوییم.

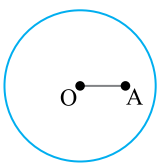
نقطه‌های بیرون دایره $= \{A \mid OA > R\}$



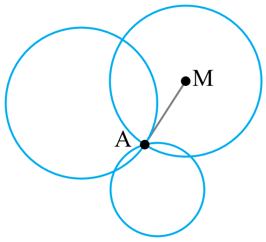
۳) نقطه‌ی A **درون** دایره‌ی $C(O, R)$ است.

به مجموعه‌ی نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره کمتر از اندازه‌ی شعاع دایره باشد، نقطه‌های «درون دایره» می‌گوییم.

نقطه‌های درون دایره $= \{A \mid OA < R\}$

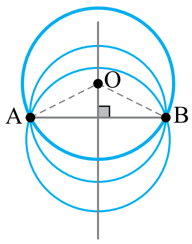


مسئله ۱ **نقطه‌ی ثابت A در صفحه مفروض است. از نقطه‌ی A چند دایره می‌گذرد؟ مرکز این دایره‌ها کجا قرار دارند؟**



راه‌حل: از یک نقطه مانند A نامتناهی دایره می‌گذرد و مرکز این دایره‌ها هر نقطه در صفحه غیر از نقطه‌ی A می‌تواند باشد.
توضیح: نقطه‌ی دلخواه M در صفحه را در نظر بگیرید. اگر به مرکز M و شعاع MA دایره‌ای رسم کنیم این دایره از نقطه‌ی A می‌گذرد.

مسئله ۲ **دو نقطه‌ی متمایز A و B در صفحه مفروض‌اند. از این دو نقطه چند دایره می‌گذرد؟ مرکز این دایره‌ها را در صورت وجود پیدا کنید.**

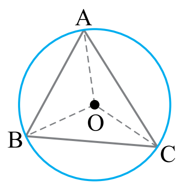


راه‌حل: از دو نقطه‌ی متمایز A و B نامتناهی دایره می‌گذرد. مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد و بر عکس، یعنی هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB می‌تواند مرکز دایره‌ای باشد که از A و B می‌گذرد.
توضیح: اگر O مرکز دایره‌ای باشد که از A و B می‌گذرد، آن‌گاه

$$\text{شعاع دایره} = OA = OB$$

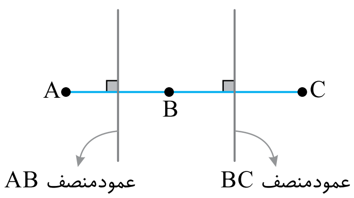
پس O از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است، یعنی O روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

مسئله ۳ **از سه نقطه‌ی A، B و C چند دایره می‌گذرد؟ مرکز این دایره یا دایره‌ها در صورت وجود کجا قرار دارد؟**



راه‌حل: این مسئله را باید در دو حالت بررسی کنیم.
حالت اول سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط قرار ندارند.
اگر سه نقطه روی یک خط قرار نداشته باشند، فقط یک دایره از آن‌ها می‌گذرد و مرکز این دایره محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است.

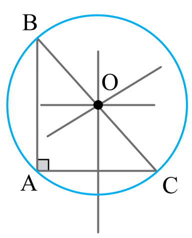
توجه به این دایره، دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گوییم. در بخش‌های بعدی در مورد این دایره بیشتر بحث می‌کنیم.



حالت دوم سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست قرار دارند.
از سه نقطه‌ی واقع بر یک خط دایره‌ای عبور نمی‌کند، زیرا عمودمنصف‌های پاره‌خط‌هایی که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند، موازی‌اند. پس نقطه‌ای که از این سه نقطه به یک فاصله باشد وجود ندارد.

تست ۱ **در مثلث قائم‌الزاویه که طول ضلع‌های قائمه‌ی آن ۶ و ۸ است، شعاع دایره‌ی محیطی کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۰



پاسخ: از سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC یک دایره عبور می‌کند و مرکز این دایره نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های ضلع‌های این مثلث است. از طرفی نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر است. بنابراین مرکز این دایره وسط وتر و شعاع آن نصف وتر است.

$$\Delta ABC: BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$$

$$BC = ۱۰ \Rightarrow ۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۲ **دو نقطه‌ی M و N به فاصله‌ی ۵ از یکدیگر قرار دارند. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که از این دو نقطه عبور می‌کند کدام است؟**

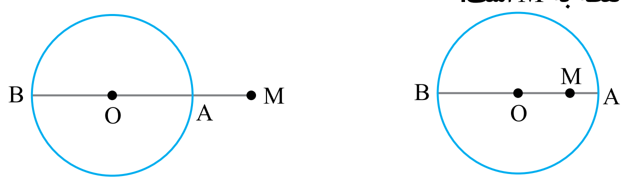
۱) ۵ **۲)** ۲/۵ **۳)** ۱۰ **۴)** ۷/۵

پاسخ: از دو نقطه‌ی M و N نامتناهی دایره می‌گذرد و کوچک‌ترین دایره‌ی گذرنده از آن‌ها دایره‌ای به قطر MN است. بنابراین

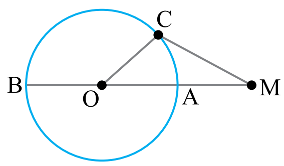
$$2R = MN = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مسئله ۴ **با توجه به شکل‌ها، ثابت کنید در هر دو حالت در بین نقطه‌های روی دایره، A نزدیک‌ترین نقطه به M و B دورترین نقطه به M است.**



راه‌حل: **حالت اول** M بیرون دایره است. نقطه‌ی C را روی دایره در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم



$$MC < MB \,,\; MA < MC$$

نقطه‌ی C را به M و O وصل می‌کنیم. در مثلث OMC بنابر نابرابری مثلث،

$$OM - OC < MC < OM + OC$$

چون $OC = OA = OB = R$، پس

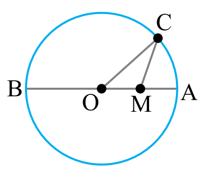
$$OM - OA < MC < OM + OB$$

یعنی

$$MA < MC < MB$$

حالت دوم نقطه‌ی M درون دایره است.

با استدلالی مشابه حالت اول، نقطه‌ی C را روی دایره در نظر می‌گیریم.



در مثلث OMC بنابر نابرابری مثلث،

$$OC - OM < MC < OM + OC$$

چون $OC = OA = OB = R$، پس

$$OA - OM < MC < OM + OB$$

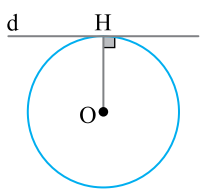
در نتیجه

$$MA < MC < MB$$

اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. بر اساس تعداد نقطه‌های مشترک خط d و دایره‌ی $C(O,R)$، می‌توان وضعیت خط و دایره نسبت به هم را به سه حالت تقسیم کرد.

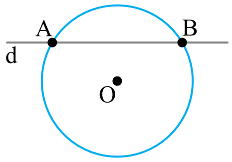
۱) خط d بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماس است.



در این حالت خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک‌اند. (شکل را ببینید).

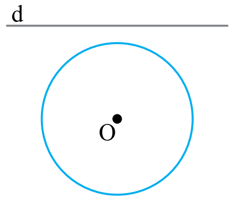
۲) خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ متقاطع‌اند.

در این حالت خط و دایره دو نقطه‌ی اشتراک دارند.



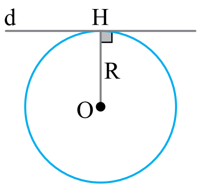
۳) خط d خارج دایره‌ی $C(O,R)$ است.

در این حالت، خط و دایره، هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.



توجه می‌توان ســه حالت وضعیت خط و دایره را با مقایســه‌ی فاصله‌ی مرکز دایره تا خط و شعاع دایره نیز بیان کرد.

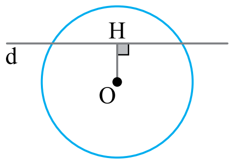
۱) اگــر فاصلــه‌ی مرکز دایره تا خط d برابر با شــعاع دایره باشــد، آن‌گاه خط و دایره یک نقطه‌ی اشــتراک دارنــد؛ یعنی خط بر دایره مماس است.



$OH = R \Leftrightarrow$ خط d مماس بر دایره است

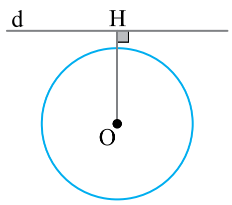
توجه اثبات این مطلب که «شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است» را بعداً می‌آوریم.

۲) اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا خط d کمتر از شعاع دایره باشد، آن‌گاه خط و دایره دو نقطه‌ی تماس دارند؛ یعنی خط، دایره را قطع می‌کند.



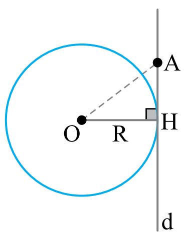
$OH < R \Leftrightarrow$ خط d دایره را قطع می‌کند

۳) اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا خط d ، بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، آن‌گاه خــط و دایره، هیچ نقطه‌ی مشــترکی ندارند؛ یعنی خط خارج دایره است.



$OH > R \Leftrightarrow$ خط d دایره را قطع نمی‌کند

مسئله ۵ **ثابت کنید اگر خطی در انتهای شــعاعی از دایره که روی دایره اســت، بر آن شعاع عمود باشد، آن‌گاه این خط بر دایره مماس است.**



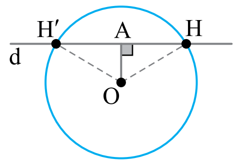
راه‌حل: در شــکل روبه‌رو خط d در نقطه‌ی H بر شعاع OH عمود است، باید ثابت کنیم خط d بر دایره مماس است.

برای این کار کافی است ثابت کنیم خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ فقط در نقطه‌ی H مشترک‌اند.

فرض کنید نقطه‌ی A نقطه‌ای غیر از H و روی خط d باشد. چون مثلث OAH قائم‌الزاویه است و OA وتر آن است. پس $OH < OA$، یعنی $R < OA$. بنابرایــن A خارج دایره اســت. در نتیجه خط d و دایره فقط در یک نقطه‌ی H مشترک هستند و این نتیجه می‌دهد که خط d بر دایره مماس است.

مسئله ۶ **ثابت کنید شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است.**

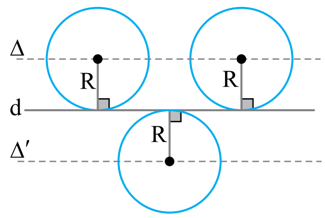
راه‌حل: فرض کنید خط d در نقطه‌ی H بر دایره‌ی $C(O, R)$ مماس باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم OH بر d عمود است. برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم.



(برهان خلف): فرض کنید OH بر d عمود نباشد. از مرکز دایره O عمود OA را بر خط d رسم می‌کنیم (شکل را ببینید). نقطه‌ی H' را مطابق شکل به‌گونه‌ای روی d انتخاب کرده‌ایم که $AH = AH'$.
دو مثلث AOH و AOH' همنهشت هستند ($AH = AH'$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $OA = OA$ ضلع مشترک)، در نتیجه $OH' = OH = R$، یعنی H' هم روی دایره است و این با مماس بودن خط d بر دایره تناقض دارد. بنابراین فرض خلف نادرست است، در نتیجه خط d در نقطه‌ی H بر OH عمود است.

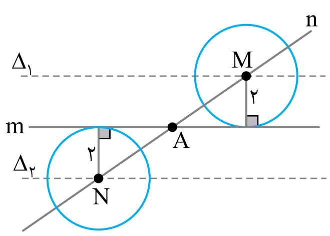
مسئله ۷ **خط d مفروض است. مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟**

راه‌حل: فرض کنید دایره‌های به شعاع R بر خط d مماس باشند. در این صورت، چون شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، پس فاصله‌ی مرکز این دایره‌ها از خط d مقدار ثابت R است. در نتیجه مرکز این دایره‌ها روی دو خط موازی d و به فاصله‌ی R از آن هستند. (دو خط Δ و Δ' در شکل)



مسئله ۸ **دو خط m و n در نقطه‌ی A متقاطع هستند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی n و شعاع آن ۲ سانتی‌متر باشد و بر m مماس باشد.**

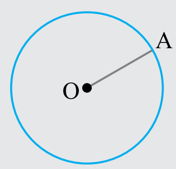
راه‌حل: بنابر مسئله‌ی قبل، مرکز دایره‌های به شعاع ۲ که بر خط m مماس هستند روی دو خط موازی m و به فاصله‌ی ۲ از آن قرار دارند (دو خط $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ در شکل).
پس محل برخورد خط‌های $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ با خط n مرکز این دایره‌ها است (نقطه‌های M و N در شکل).
اکنون کافی است به مرکزهای M و N و شعاع ۲ دایره‌هایی رسم کنیم. این دایره‌ها بر خط m مماس هستند.



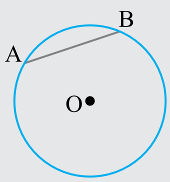
یادآوری:

برخی از مفاهیم اولیه

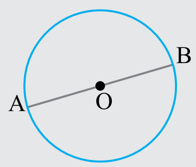
۱) شعاع دایره: پاره‌خطی را که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد **شعاع** دایره می‌گوییم.
مثلاً، پاره‌خط OA در شکل روبه‌رو شعاع دایره است.



۲) وتر دایره: پاره‌خطی را که دو سر آن روی محیط دایره قرار دارند **وتر** می‌نامیم.
مثلاً، پاره‌خط AB در شکل روبه‌رو وتر است.

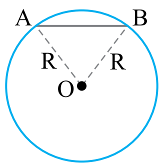


۳) قطر دایره: وتری از یک دایره را که از مرکز آن دایره می‌گذرد، **قطر** آن دایره می‌نامیم.
واضح است که اگر R اندازه‌ی شعاع دایره باشد، اندازه‌ی تمام وترها کوچک‌تر یا مساوی ۲R است.



تذکر هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که به آن کمان‌ها **نیم‌دایره** می‌گوییم.

مسئله ۹ **ثابت کنید قطر دایره بزرگ‌ترین وتری است که می‌توان در دایره رسم کرد.**



راه‌حل: وتر دلخواه AB را در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). در مثلث OAB،

$$AB < OA + OB$$

یعنی

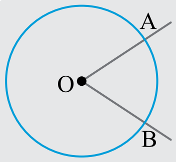
$$AB < R + R \Rightarrow AB < 2R$$

پس هر وتر دلخواه مانند AB از طول قطر دایره کوچک‌تر است.

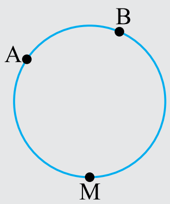
یادآوری:

۴) زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای را که رأس آن مرکز دایره باشد، زاویه‌ی مرکزی می‌گوییم.

در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است و زاویه‌ی AOB یک زاویه‌ی مرکزی است.

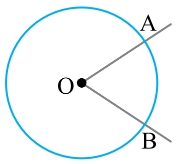


۵) کمان: دو نقطه‌ی A و B را روی محیط دایره در نظر بگیرید. این دو نقطه محیط دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که به آن کمان یا قوس می‌گوییم (شکل را ببینید).



توجه **کمان کوچک‌تر** ایجاد شده توسط دو نقطه‌ی A و B را با $\overset{\frown}{AB}$ نشان می‌دهیم و برای نشان دادن **کمان بزرگ‌تر** از نقطه‌ای کمکی مانند M روی محیط دایره استفاده می‌کنیم و آن را به صورت $\overset{\frown}{AMB}$ می‌نویسیم.

تذکر کمانی از دایره را که یک زاویه‌ی مرکزی روی محیط دایره ایجاد می‌کند «کمان نظیر آن زاویه» می‌نامیم.

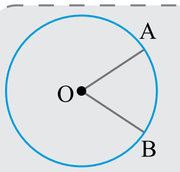


یادآوری:

۶) اندازه‌ی کمان: اندازه‌ی کمان، همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن کمان است و واحد آن درجه است.

در این حالت می‌نویسیم

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$

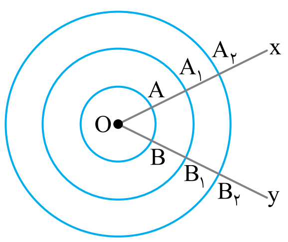


تذکر دقت کنید که نباید اندازه‌ی یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. برای درک این مطلب به شکل روبه‌رو نگاه کنید. در این شکل سه دایره‌ی هم‌مرکز رسم کرده‌ایم. با توجه به مطلب بالا، اندازه‌ی کمان‌های AB، A_1B_1 و A_2B_2 برابرند. یعنی

$$x\hat{O}y = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{A_2B_2}$$

اما طول این کمان‌ها با هم برابر نیستند:

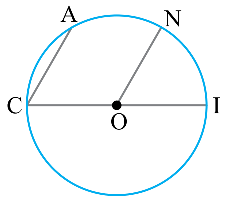
$$\text{طول کمان } AB < \text{طول کمان } A_1B_1 < \text{طول کمان } A_2B_2$$

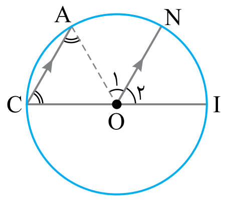


نکته **چون محیط دایره، کمانی به اندازه‌ی 360° است، می‌توان تناسب زیر را نوشت**

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{360^\circ}$$

مسئله ۱۰ **در شکل مقابل، O مرکز دایره، CI قطر دایره و $CA \parallel ON$. ثابت کنید** $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$.





راه‌حل: شعاع OA را رسم می‌کنیم. می‌دانیم، اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی، برابر با کمان مقابل به آن است. در نتیجه

$$\hat{O}_1 = \overset{\frown}{AN}, \quad \hat{O}_2 = \overset{\frown}{NI}$$

اگر ثابت کنیم $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ حکم ثابت می‌شود. چون $OA = OC$ (شعاع دایره)، پس مثلث OAC متساوی‌الساقین است. یعنی $\hat{A} = \hat{C}$. از طرف دیگر چون $ON \parallel CA$ و CI مورب است، پس

$$\hat{O}_2 = \hat{C}$$

با همین استدلال، چون $ON \parallel CA$ و OA مورب است، پس

$$\hat{O}_1 = \hat{A}$$

بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$، در نتیجه

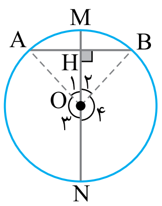
$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$$

چند مسئله مهم در مورد وتر و کمان نظیر آن

مسئله ۱۱ **ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.**

راه‌حل: قطر MN عمود بر وتر AB را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}, \quad \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}, \quad AH = BH$$



(شکل را ببینید). از نقطه‌ی O مرکز دایره به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. مثلث OAB متساوی‌الساقین است، چون $OA = OB$. در این مثلث OH ارتفاع وارد بر قاعده‌ی AB است، پس OH هم میانه و هم نیمساز است.

چون OH میانه است، پس $AH = BH$ و چون OH نیمساز است، پس

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

در نتیجه

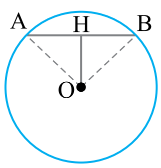
$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$$

همچنین $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$، بنابراین

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$$

مسئله ۱۲ **ثابت کنید خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.**

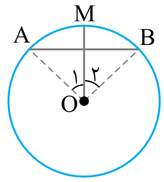
راه‌حل: از مرکز دایره به نقطه‌ی H وسط وتر AB وصل می‌کنیم. باید ثابت کنیم OH بر AB عمود است.



مثلث OAB متساوی‌الساقین است ($OA = OB$) و پاره‌خط OH میانه‌ی این مثلث متساوی‌الساقین است. در نتیجه OH ارتفاع هم است (در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر ساق بر هم منطبق‌اند)، یعنی

$$OH \perp AB$$

مسئله ۱۳ **ثابت کنید خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.**



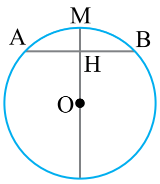
راه‌حل: در شکل روبه‌رو، M وسط کمان AB از دایره‌ی $C(O, R)$ است. می‌خواهیم ثابت کنیم OM بر وتر AB عمود است. چون M وسط کمان AB است، پس $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$. در نتیجه زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به این کمان‌ها با هم برابرند، یعنی $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$.

مثلث OAB متساوی‌الساقین است، چون $OA = OB = R$. پاره‌خط OM نیمساز زاویه‌ی رأس O در مثلث متساوی‌الساقین OAB است.

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز و ارتفاع نظیر رأس بر هم منطبق‌اند، بنابراین OM ارتفاع این مثلث هم است، یعنی

$$OM \perp AB$$

مسئله ۱۴ **ثابت کنید خطی که وسط یک کمان و وسط وتر متناظر آن کمان را به هم وصل می‌کند، از مرکز دایره می‌گذرد.**



راه‌حل: در شکل روبه‌رو نقطه‌ی H وسط وتر AB و نقطه‌ی M وسط کمان AB است. می‌خواهیم ثابت کنیم امتداد MH از نقطه‌ی O مرکز دایره می‌گذرد.

از نقطه‌ی O به نقطه‌ی H وصل می‌کنیم. چون H وسط AB است، پس

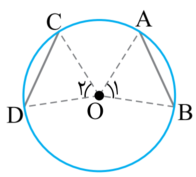
$$OH \perp AB$$

از طرف دیگر اگر از O به M وصل کنیم، چون M وسط کمان AB است، پس $OM \perp AB$.

می‌دانیم از یک نقطه، فقط یک عمود بر یک خط می‌توان رسم کرد. بنابراین OM و OH بر هم منطبق‌اند، در نتیجه نقطه‌های M، H و O روی یک خط قرار دارند، یعنی امتداد MH از O می‌گذرد.

چند مسئله‌ی مهم در مورد دو وتر از یک دایره

مسئله ۱۵ **ثابت کنید کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بر عکس.**



راه‌حل: اثبات دو بخش دارد.

بخش اول فرض می‌کنیم $AB = CD$ و ثابت می‌کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (شکل را ببینید). از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم.

دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی سه ضلع همنهشت‌اند:

$$OA = OC = R\,, \quad OB = OD = R\,, \quad AB = CD$$

بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$. در نتیجه $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

بخش دوم فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ و ثابت می‌کنیم

$$AB = CD$$

چون دو کمان AB و CD با هم برابرند، پس زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به آن‌ها با هم برابرند، یعنی $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$.

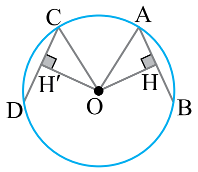
اکنون دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها با هم همنهشت‌اند:

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲\,, \quad OA = OC = R\,, \quad OB = OD = R$$

و در نتیجه

$$AB = CD$$

مسئله ۱۶ **ثابت کنید در هر دایره وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بر عکس.**



راه‌حل: فرض می‌کنیم $AB=CD$. می‌خواهیم ثابت کنیم $OH=OH'$ و بر عکس (شکل را ببینید).

از نقطه‌ی O مرکز دایره، عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH و OCH' بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\,,\quad OC^۲=OH'^۲+CH'^۲$$

یعنی

$$R^۲=OH^۲+\frac{AB^۲}{۴}\,,\quad R^۲=OH'^۲+\frac{CD^۲}{۴}$$

چون $AB=CD$، پس

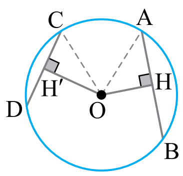
$$OH^۲=R^۲-\frac{AB^۲}{۴}=R^۲-\frac{CD^۲}{۴}=OH'^۲$$

در نتیجه

$$OH=OH'$$

با عمل بازگشتی می‌توان عکس این مطلب را ثابت کرد.

مسئله ۱۷ **ثابت کنید در یک دایره، اگر دو وتر نامساوی باشند، آن‌گاه وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.**



راه‌حل: در شکل روبه‌رو فرض می‌کنیم $AB>CD$.

از O مرکز دایره، عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم کرده‌ایم.

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$OH<OH'$$

می‌دانیم اگر از مرکز دایره عمودی بر وتر رسم کنیم، آن وتر را نصف می‌کند، پس

$$AH=\frac{۱}{۲}AB\,,\quad CH'=\frac{۱}{۲}CD$$

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH و OCH'،

$$AH^۲=OA^۲-OH^۲\,,\quad CH'^۲=OC^۲-OH'^۲$$

یعنی

$$\frac{AB^۲}{۴}=R^۲-OH^۲\,,\quad \frac{CD^۲}{۴}=R^۲-OH'^۲$$

چون $AB>CD$ پس $AB^۲>CD^۲$، در نتیجه

$$R^۲-OH^۲>R^۲-OH'^۲$$

$$-OH^۲>-OH'^۲$$

پس

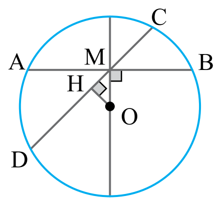
$$OH^۲<OH'^۲$$

بنابراین

$$OH<OH'$$

توجه دقت کنید که عکس مطلب بیان شده در مسئله‌ی بالا درست است.

مسئله ۱۸ **ثابت کنید کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.**



راه‌حل: نقطه‌ی M درون دایره به مرکز O را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم وتر AB که بر قطر گذرنده از OM عمود است کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است. برای اثبات این موضوع وتر دلخواه CD را از نقطه‌ی M عبور می‌دهیم و عمود OH را بر این وتر وارد می‌کنیم. می‌دانیم وتری که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، بزرگ‌تر است. پس

$$OMH : OM > OH \Rightarrow AB < CD$$ مثلث قائم‌الزاویه

بنابراین AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است. به AB وتر مینیمم گذرنده از M می‌گویند.

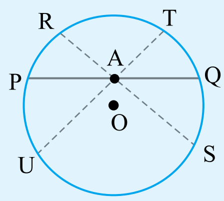
نتیجه

در مورد تعداد وترهـای گذرنده از نقطه‌ی A درون دایره‌ی $C(O,R)$ می‌توان گفت:

۱- فقط یک وتر به طول ۲R وجود دارد. (قطر گذرنده از A)

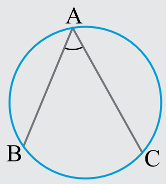
۲- فقـط یک وتر با طول مینیمم (L_{min}) وجود دارد. (وتر عمود بر قطر گذرنده از A)

۳- دو وتـر بـه طـول L، با انـدازه‌ای بین انـدازه‌ی وتر مینیمـم و قطر $(L_{min} < L < ۲R)$ وجود دارد مانند وترهای RS و TU در شکل.



یادآوری:

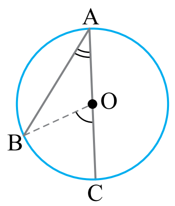
۷) زاویـه‌ی محاطی: **زاویه‌ای کـه رأس آن روی دایره و ضلع‌های آن دو وتر از دایره باشند، زاویه‌ی محاطی می‌نامند.**
مثلاً، زاویه‌ی BAC در شکل روبه‌رو، محاطی است.



قضیه **اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.**

اثبات: اثبات را در سه حالت می‌آوریم.

حالت اول در دایره‌ی به مرکز O، زاویه‌ی محاطی BAC را که ضلع AC در آن، قطر دایره اسـت در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). از نقطه‌ی B به O مرکز دایره وصل می‌کنیم.



مثلث OAB متساوی‌الساقین است $(OA = OB = \text{شعاع})$، پس

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A$$

زاویه‌ی مرکزی BOC زاویه‌ی خارجی مثلث متساوی‌الساقین OAB است. در نتیجه

$$B\hat{O}C = O\hat{A}B + O\hat{B}A = O\hat{A}B + O\hat{A}B = ۲O\hat{A}B$$

یعنی

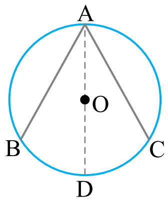
$$O\hat{A}B = \frac{۱}{۲} B\hat{O}C \quad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} \quad (۲)$$

با مقایسه‌ی تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



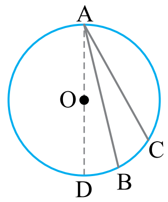
حالت دوم در شکل روبه‌رو زاویه‌ی BAC یک زاویه‌ی محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O مرکز دایره قرار دارند.
قطر AD را رسم می‌کنیم. با توجه به حالت اول،

$$B\hat{A}D=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$$

$$D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}$$

با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا، نتیجه می‌شود

$$B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC})=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$$



حالت سوم در شکل روبه‌رو زاویه‌ی BAC یک زاویه‌ی محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O مرکز دایره قرار گرفته‌اند.
قطر AD را رسم می‌کنیم. با توجه به حالت اول،

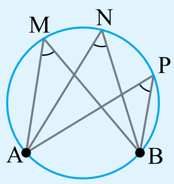
$$D\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DC}$$

$$D\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB}$$

با کم کردن دو طرف تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

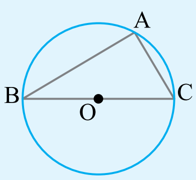
$$B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DC}-\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$$

نتیجه



۱) در هر دایره، اندازه‌ی زاویه‌های محاطی روبه‌روی یک کمان، با هم برابرند.
در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی زاویه‌های M، N و P با هم برابر است، چون همگی مقابل به یک کمان هستند

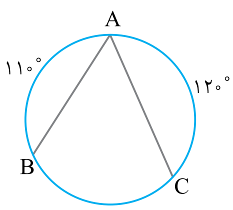
$$\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



۲) زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر دایره ۹۰° است. چون قطر دایره، دایره را به دو کمان ۱۸۰° تقسیم می‌کند.
به عبارت دیگر، در شکل روبه‌رو، اگر BC قطر دایره باشد، آن‌گاه

$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

مسئله ۱۹ **در دایره‌ی شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی A را به‌دست آورید.**



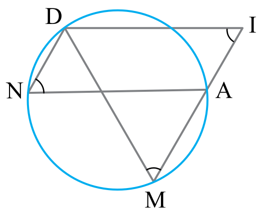
راه‌حل: دایــره در حالت کلی کمانی با اندازه‌ی ۳۶۰ درجه اســت. از این مطلب اســتفاده کرده و اندازه‌ی کمان BC را به‌دست می‌آوریم.

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۱۱۰^\circ+۱۲۰^\circ+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۳۰^\circ$$

از طرفی می‌دانیم اندازه‌ی یک زاویه‌ی محاطی نصف کمان مقابلش است، پس

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$$

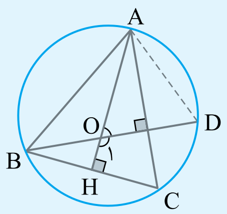
مسئله ۲۰ **در شکل روبه‌رو چهارضلعی DIAN متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I، A و M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM = DI$.**



راه‌حل: در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو به هم مساوی‌اند پس $\hat{N} = \hat{I}$. از طرفی دو زاویه‌ی M و N محاطی روبه‌روی یک کمان هستند، در نتیجه $\hat{M} = \hat{N}$. بنابراین در مثلث DIM، $\hat{M} = \hat{I}$. پس

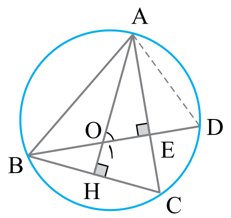
$$DM = DI$$

تست ۳ **در شــکل روبــه‌رو O محل تلاقــی ارتفاع‌های مثلث ABC اســت. زاویه‌ی AOD برابر کدام است؟**



۱) $O\hat{B}C$ ۲) $C\hat{A}D$
۳) $O\hat{A}C$ ۴) $A\hat{D}O$

پاسخ: مطابق شکل زیر در چهارضلعی OHCE دو زاویه قائمه هستند، بنابراین دو زاویه‌ی O_1 و C مکمل‌اند، بنابراین می‌توان نوشت



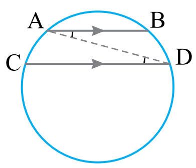
$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{C} = 180^\circ \\ A\hat{O}D + \hat{O}_1 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow A\hat{O}D = \hat{C}$$

از طرفی دو زاویه‌ی C و ADB محاطی روبه‌روی یک کمان هستند، پس مساوی‌اند. در نتیجه

$$A\hat{O}D = A\hat{D}O$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مسئله ۲۱ **ثابت کنید کمان‌های محصور بین دو وتر موازی از یک دایره برابرند.**



راه‌حل: در شکل روبه‌رو $AB \parallel CD$. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

وتر AD را رسم می‌کنیم. چون $AB \parallel CD$ و AD مورب است، پس

$$A\hat{D}C = D\hat{A}B$$

در نتیجه

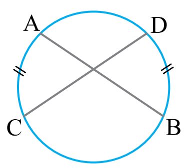
$$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$$

پس

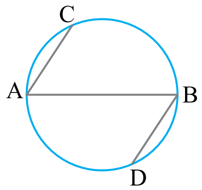
$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

توجه این مسئله را به عنوان نکته در خاطر داشته باشید.

تذکر دقت کنید، عکس مسئله‌ی بالا لزوماً درست نیست. یعنی در شکل روبه‌رو دو کمان AC و BD با هم برابرند، اما وترهای AB و CD موازی نیستند.



مسئله ۲۲ **در شکل زیر AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.** **ثابت کنید** $AC=BD$.



راه‌حل: چون AB قطر دایره است، پس

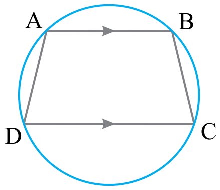
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AD}=۱۸۰^\circ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساوی‌اند، پس

$$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD} \qquad (۲)$$

با کم کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. می‌دانیم، وترهای نظیر کمان‌های برابر در یک دایره با هم مساوی‌اند، پس $AC=BD$.

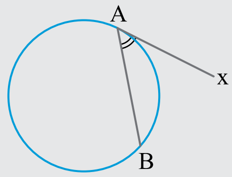
مسئله ۲۳ **اگر رأس‌های ذوزنقه‌ای بر روی یک دایره باشند، ثابت کنید ذوزنقه متساوی‌الساقین است.**



راه‌حل: فرض می‌کنیم **رأس‌های** ذوزنقه‌ی $ABCD$ روی یک دایره باشند، در این‌صورت چون دو وتر AB و CD موازی‌اند، بنابراین کمان‌های BC و AD مساوی‌اند. می‌دانیم اگر دو کمان از یک دایره با هم مساوی باشند وترهای نظیر آن‌ها نیز با هم مساوی‌اند، پس $AD=BC$. بنابراین ذوزنقه‌ی $ABCD$ متساوی‌الساقین است.

تعریف

زاویه‌ی ظلی: زاویه‌ای را که رأسش روی دایره است، یک ضلعش وتر دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، زاویه‌ی ظلی می‌نامند.
مثلاً، در شکل روبه‌رو زاویه‌ی BAx زاویه‌ی ظلی است.

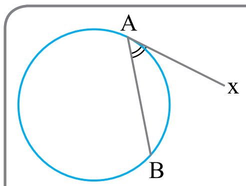


تذکر کمانی از دایره را که درون زاویه‌ی ظلی قرار دارد، **کمان نظیر** یا **کمان روبه‌رو** به زاویه‌ی ظلی می‌نامیم.
مثلاً، در شکل بالا کمان AB، کمان نظیر زاویه‌ی ظلی BAx است.

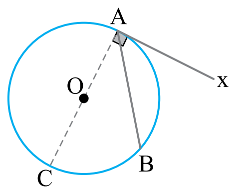
قضیه

اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است. به عبارت دیگر، در شکل روبه‌رو اگر BAx زاویه‌ی ظلی باشد، آن‌گاه

$$B\hat{A}x=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



اثبات: **روش اول** قطر AC را رسم می‌کنیم (شکل را ببینید).
چون شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، پس $C\hat{A}x=۹۰^\circ$. می‌توان نوشت



$$C\hat{A}x=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ABC} \qquad (۱)$$

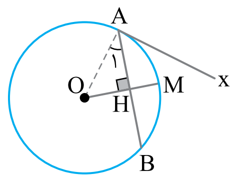
زاویه‌ی CAB، زاویه‌ای محاطی است، بنابراین

$$C\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CB} \qquad (۲)$$

با استفاده از شکل و تساوی‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$B\hat{A}x=C\hat{A}x-C\hat{A}B=۹۰^\circ-\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ABC}-\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CB}$$

$$=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{ABC}-\overset{\frown}{CB})=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



روش دوم از مرکز دایره، شعاع OM را عمود بر وتر AB رسم می‌کنیم تا این وتر را در نقطه‌ی H قطع کند (شکل را ببینید). می‌دانیم شـــعاع عمود بر وتر، کمـــان نظیر آن وتر را نصف می‌کند، یعنی

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AMB} \qquad (۱)$$

شـــعاع OA را رسم می‌کنیم. می‌دانیم شـــعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، یعنی

$$O\hat{A}x=۹۰^\circ \text{ یا } OA\perp Ax$$

چون زاویه‌های BAx و AOM متمم‌های زاویه‌ی $A_۱$ هستند، پس با هم برابرند،

$$B\hat{A}x=A\hat{O}M \qquad (۲)$$

زاویه‌ی AOM مرکزی است، در نتیجه

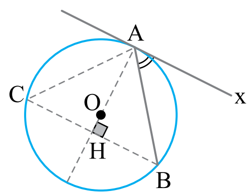
$$A\hat{O}M=\overset{\frown}{AM}$$

اکنون تساوی (۲) را این‌گونه می‌نویسیم

$$B\hat{A}x=\overset{\frown}{AM}$$

با توجه به تساوی (۱)،

$$B\hat{A}x=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AMB}$$



روش ســوم از نقطه‌ی B خطی موازی Ax رســم می‌کنیم تا دایــره را در نقطه‌ی C قطع کند. محل برخورد قطر گذرنده از A با وتر BC را H می‌نامیم (شکل را ببینید).

OA بر Ax عمود است و Ax با BC موازی است، پس AH بر BC عمود است.

می‌دانیم اگر از مرکز دایره، عمودی بر یک وتر رسم کنیم، آن وتر نصف می‌شود، یعنی

$$BH=CH$$

در مثلث ABC ، ارتفاع AH ، میانه هم است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است، یعنی

$$\hat{B}=\hat{C}$$

از طرف دیگر

$$Ax\,||\,BC$$

و AB مورب است، بنابراین

$$B\hat{A}x=\hat{B}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$B\hat{A}x=\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$

تذکر در اثبات‌های بالا، حالتی از زاویه‌ی ظلی را در نظر گرفتیم که مرکز دایره بیرون زاویه قرار دارد. برای اثبات کامل‌تر، باید مانند زاویه‌ی محاطی که آن را در سه حالت بررسی کردیم، زاویه‌ی ظلی را نیز در سه حالت بررسی کنیم (حالتی که مرکز دایره روی یک ضلع است و حالتی که مرکز دایره داخل زاویه است). البته کتاب درسی این موارد را بررسی نکرده است، پس لازم نیست شما آن‌ها را در امتحان‌ها بررسی کنید. اما بد نیست به عنوان تمرین آن‌ها را ثابت کنید.