بخش چهارم «هذلولی»

۱- معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی $F=(۲,۷)$ و $F'=(۲,۱)$ برابر ۴ باشد کدام است؟

۱) $\frac{(x-۲)^۲}{۴}-\frac{(y-۴)^۲}{۵}=۱$
۲) $\frac{(y-۴)^۲}{۵}-\frac{(x-۲)^۲}{۴}=۱$
۳) $\frac{(x-۲)^۲}{۵}-\frac{(y-۴)^۲}{۴}=۱$
۴) $\frac{(y-۴)^۲}{۴}-\frac{(x-۲)^۲}{۵}=۱$

۲- معادله‌ی هذلولی‌ای که نقاط $F=(۲,-۲)$ و $F'=(۲,۴)$ کانون‌ها و نقطه‌ی $A=(۲,۲)$ یک رأس آن باشد کدام است؟

۱) $\frac{(x-۲)^۲}{۸}-(y-۱)^۲=۱$
۲) $(y-۱)^۲-\frac{(x-۲)^۲}{۸}=۱$
۳) $(x-۲)^۲-\frac{(y-۱)^۲}{۸}=۱$
۴) $\frac{(y-۱)^۲}{۸}-(x-۲)^۲=۱$

۳- نقاط $F=(۳,۰)$ و $F'=(-۳,۰)$ کانون‌های یک هذلولی هستند و نقطه‌ی $M=(۲\sqrt{۶},۵)$ روی این هذلولی قرار دارد. معادله‌ی این هذلولی کدام است؟

۱) $۵y^۲-۴x^۲=۲۹$
۲) $۴x^۲-۵y^۲=۴۰$
۳) $۵x^۲-۴y^۲=۲۰$
۴) $۵x^۲-۴y^۲=۱$

۴- به ازای کدام m، $۳x^۲-۱۲x-۴y^۲+۲۰y=m$ معادله‌ی یک هذلولی قائم است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۳
۳) ۱۵
۴) ۱۷

* ۵- معادله‌ی مکان هندسی مراکز دوایری که از نقطه‌ی $F=(۸,۰)$ گذشته و بر دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱۲$ مماس‌اند کدام است؟

۱) $\frac{(x-۴)^۲}{۳}-\frac{y^۲}{۱۳}=۱$
۲) $\frac{y^۲}{۱۳}-\frac{(x-۴)^۲}{۳}=۱$
۳) $\frac{(x-۴)^۲}{۱۳}-\frac{y^۲}{۳}=۱$
۴) $\frac{y^۲}{۳}-\frac{(x-۴)^۲}{۱۳}=۱$

۶- فرض کنید F و F' کانون‌های هذلولی $۳y^۲-۴x^۲+۱۲y=۰$ باشند و $O=(۰,۰)$. قدر مطلق تفاضل فواصل O از F و F' برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۴

* ۷- فرض کنید A و A' رأس‌های یک هذلولی، M نقطه‌ای از آن، H تصویر M بر محور کانونی باشد و $s=\frac{|MH|^۲}{|AH||A'H|}$. کدام گزینه درست است؟

۱) مقدار s به موقعیت نقطه‌ی M بستگی ندارد
۲) حداکثر مقدار s تنها وقتی به دست می‌آید که H بر کانون هذلولی منطبق شود
۳) هر چه M به A نزدیک‌تر باشد مقدار s به صفر نزدیک‌تر است
۴) هر چه M از A دورتر باشد مقدار s به صفر نزدیک‌تر است

۸- به ازای هر نقطه از یک هذلولی مانند M فاصله‌ی M از نقطه‌ی $F=(۰,۳)$ دو برابر فاصله‌ی این نقطه از محور x است. فاصله‌ی بین کانون‌های این هذلولی برابر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۴
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۸

۹- نقطه‌ی M روی یک هذلولی طوری حرکت می‌کند که در لحظه‌ی t در نقطه‌ی $(۱+\frac{۵}{\cos t},-۳+۲\sqrt{۵}\tan t)$ قرار دارد. فاصله‌ی کانون‌های این هذلولی از یک‌دیگر برابر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $۶\sqrt{۲}$ ۲۹
۳) $۶\sqrt{۵}$
۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۱۰- نقاط M و N هر یک روی یکی از شاخه‌های هذلولی $۳x^۲+۶x-۴y^۲-۱۶y=۶۱$ قرار دارند. کم‌ترین فاصله‌ی M و N از یک‌دیگر برابر کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۱۱- مختصات یکی از کانون‌های هذلولی $\frac{(x+1)^2}{13}-\frac{(y-2)^2}{3}=1$ کدام است؟

۱) $(3,2)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(-1,-2)$ ۴) $(-1,0)$

۱۲- نقطه‌ی $F=(-2,1)$ یکی از کانون‌های هذلولی $\frac{(x-3)^2}{m}-\frac{(y-n)^2}{19}=1$ است. حاصل $m+n$ برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۳- مختصات یکی از رأس‌های هذلولی $4y^2+8y-x^2-6x=21$ کدام است؟

۱) $(-3,1)$ ۲) $(-3,3)$ ۳) $(-1,-1)$ ۴) $(1,-1)$

۱۴- بیضی $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ بر کدام هذلولی مماس نیست؟

۱) $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=1$ ۲) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

۳) $(x-1)^2-(y-2)^2=4$ ۴) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$

۱۵- فاصله‌ی هر نقطه از یک هذلولی از نقطه‌ی $F=(2,5)$ سه برابر فاصله‌اش از خط $y=1$ است. مختصات مرکز این هذلولی کدام است؟

۱) $(2,0)$ ۲) $(2,\frac{1}{2})$ ۳) $(2,1)$ ۴) $(2,\frac{3}{2})$

۱۶- نقطه‌ی (m,n) روی منحنی $2x^2-4x-3y^2+12y=1$ قرار دارد. کدام نقطه قطعاً روی این منحنی قرار دارد؟

۱) $(m,2-n)$ ۲) $(m,-4-n)$ ۳) $(2-m,n)$ ۴) $(-2-n,m)$

۱۷- نقطه‌ی $A=(2,1)$ رأسی از یک هذلولی و خط $x+4y=23$ یکی از محورهای تقارن این هذلولی است. مختصات رأس دیگر این هذلولی کدام است؟

۱) $(3,5)$ ۲) $(4,9)$ ۳) $(5,13)$ ۴) $(6,17)$

۱۸- فرض کنید $F=(2,5)$ و $F'=(4,3)$ کانون‌های یک هذلولی باشند. کدام خط یکی از محورهای تقارن این هذلولی است؟

۱) $y=x+1$ ۲) $y=2x-2$ ۳) $2y-x=5$ ۴) $3x-2y=1$

۱۹- به ازای هر نقطه از یک هذلولی مانند M حاصل ضرب ضریب زاویه‌های خطوط حاصل از اتصال M به نقاط $P=(0,3)$ و $Q=(4,-3)$ برابر ۳ است. فاصله‌ی کانون‌های این هذلولی از یک‌دیگر برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۰- فرض کنید $O=(0,0)$ مرکز یک هذلولی باشد و رئوس این هذلولی به ترتیب روی خطوط $y=x+1$ و $y=3x+5$ قرار داشته باشند. فاصله‌ی رئوس این هذلولی از یک‌دیگر برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۱- فرض کنید F یکی از کانون‌های هذلولی $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ باشد. از F خطی بر محور کانونی عمود کرده‌ایم. این خط هذلولی را در نقاط M و N قطع کرده است (MN وتر کانونی هذلولی گفته می‌شود). طول پاره‌خط MN برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۲۲- فرض کنید خط $x=8$ هذلولی $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ را در نقطه‌ی M قطع کند. فاصله‌ی M از کانون نزدیک‌تر برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۳- فرض کنید F یکی از کانون‌های هذلولی $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ و M نقطه‌ای روی این هذلولی باشد. حداقل فاصله‌ی M از F برابر کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{16}{9}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) ۲

۲۴- کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $M=(1,2)$ از نقاط منحنی $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

مجانب‌های هذلولی

۲۵- معادله‌ی یکی از مجانب‌های هذلولی $۹y^۲ - ۴x^۲ - ۳۶y - ۸x = ۴$ کدام است؟

۱) $۳y - ۲x = ۴$ ۲) $۲x + ۳y = ۸$ ۳) $۲x + ۳y = ۴$ ۴) $۲x - ۳y = ۸$

۲۶- خطوط $y = ۲x - ۱$ و $y = mx + ۱۱$ مجانب‌های یک هذلولی قائم هستند. مجموع مختصات مرکز این هذلولی کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۴ ۴) ۱۷

۲۷- خط $y = ۲x - ۷$ یکی از مجانب‌های هذلولی $\frac{(x-m)^۲}{۶} - \frac{(y+۱)^۲}{n} = ۱$ است. حاصل $m+n$ برابر کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۲۸- فرض کنید خطوط $y = ۲x$ و $y = -۲x$ مجانب‌های یک هذلولی قائم باشند و فاصله‌ی بین رئوس این هذلولی برابر $۴\sqrt{۵}$ باشد. مختصات یکی از کانون‌های این هذلولی کدام است؟

۱) $(۰,۵)$ ۲) $(۰,۱۰)$ ۳) $(۰,۱۵)$ ۴) $(۰,۲۰)$

۲۹- معادله‌ی هذلولی‌ای که نقطه‌ی $O=(۰,۰)$ مرکز، $A=(۰,۶)$ یک رأس و خط $y = \frac{۳}{۲}x$ یکی از مجانب‌های آن باشد کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{۳۶} - \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$ ۲) $\frac{x^۲}{۱۶} - \frac{y^۲}{۳۶} = ۱$ ۳) $\frac{y^۲}{۳۶} - \frac{x^۲}{۱۶} = ۱$ ۴) $\frac{y^۲}{۱۶} - \frac{x^۲}{۳۶} = ۱$

۳۰- معادله‌ی هذلولی‌ای که از نقطه‌ی $M=(\sqrt{۶},۳)$ گذشته و خطوط $y = ۲x - ۱$ و $y = -۲x - ۱$ مجانب‌های آن باشند کدام است؟

۱) $۴y^۲ + ۸y - x^۲ = ۵۴$ ۲) $۴x^۲ - y^۲ - ۲y = ۹$ ۳) $۴x^۲ - y^۲ + ۲y = ۲۱$ ۴) $۴y^۲ - ۸y - x^۲ = ۶$

۳۱- حاصل ضرب فواصل هر نقطه از هذلولی $\frac{y^۲}{۶} - \frac{x^۲}{۹} = ۱$ از دو خط مجانب برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱۸}{۵}$ ۴) $\frac{۴۸}{۵}$

۳۲- فرض کنید $F=(۳,۵)$ کانونی از یک هذلولی قائم و خط $y = ۲x - ۴$ یکی از مجانب‌های این هذلولی باشد. مجموع مختصات مرکز این هذلولی چند است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۳- فرض کنید $A=(۲,-۱)$ رأسی از یک هذلولی افقی و خط $y = ۲x + ۱$ یکی از مجانب‌های این هذلولی باشد. فاصله‌ی کانون‌های این هذلولی از یک‌دیگر برابر کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۶}$

۳۴- فاصله‌ی کانون یک هذلولی از مرکز و خط مجانب به ترتیب برابر ۷ و ۳ است. فاصله‌ی بین رأس‌های این هذلولی برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) $۴\sqrt{۱۰}$

۳۵- فرض کنید $F=(۵,۱)$ کانونی از یک هذلولی افقی و خط $۳x + ۴y = ۴$ یکی از مجانب‌های این هذلولی باشد. مختصات یکی از رأس‌های این هذلولی کدام است؟

۱) $(۴,۱)$ ۲) $(۳,۱)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۱,۱)$

* ۳۶- فرض کنید $F=(۸,۳)$ و $F'=(۰,۳)$ کانون‌های یک هذلولی باشند و ضریب زاویه‌ی یکی از مجانب‌های این هذلولی برابر $\sqrt{۳}$ باشد. مختصات یکی از رأس‌های این هذلولی کدام است؟

۱) $(۷,۳)$ ۲) $(۶,۳)$ ۳) $(۵,۳)$ ۴) $(۴+\sqrt{۳},۳)$

* ۳۷- خط $x = ۲$ محور تقارنی از یک هذلولی است که آن را قطع نمی‌کند، خط $y = ۲x$ یکی از مجانب‌های این هذلولی است و فاصله‌ی کانون‌های این هذلولی از یک‌دیگر برابر $۴\sqrt{۵}$ است. مختصات یکی از رأس‌های این هذلولی کدام است؟

۱) $(۲,۲)$ ۲) $(۴,۴)$ ۳) $(۵,۴)$ ۴) $(۶,۴)$

۳۸- فرض کنید $F=(۳,۳)$ و $F'=(-۱,۷)$ کانون‌های یک هذلولی باشند و ضریب زاویه‌ی یکی از مجانب‌ها برابر ۲ باشد. فاصله‌ی بین رأس‌های این هذلولی برابر کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $۶\sqrt{۶}$

* ۳۹- فاصله‌ی کانون‌های یک هذلولی از یک‌دیگر برابر ۱۲ و فاصله‌ی رأس‌های این هذلولی از یک‌دیگر برابر $۴\sqrt{۵}$ است. هم‌چنین محور x یکی از مجانب‌های این هذلولی است. کدام نقطه می‌تواند یکی از کانون‌های این هذلولی باشد؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(۰,۳)$ ۴) $(۰,۴)$

۴۰- خطوط $3x+2y=1$ و $2x+3y=-6$ مجانب‌های یک هذلولی هستند. معادله‌ی خط گذرا از کانون‌های این هذلولی کدام می‌تواند باشد؟

۱) $x+y=-1$ ۲) $2x+y=2$ ۳) $2x-y=10$ ۴) $4x+3y=0$

۴۱- به ازای کدام m مجانب‌های هذلولی $\frac{(x-1)^2}{m^2-2}+\frac{y^2}{m}=1$ بر هم عمودند؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۴۲- مساحت مستطیلی که قطرهای آن مجانب‌های هذلولی $x^2-4x-4y^2=8$ باشند و دو ضلع آن بر هذلولی مماس باشند چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) $12\sqrt{2}$ ۳) $12\sqrt{3}$ ۴) ۲۴

خروج از مرکز هذلولی

۴۳- ضریب زاویه‌ی یکی از مجانب‌های هذلولی قائمی برابر ۲ است. خروج از مرکز این هذلولی چند است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۴۴- زاویه‌ی بین مجانب‌های یک هذلولی برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. خروج از مرکز این هذلولی چند است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۴۵- فرض کنید $F=(2,2)$ و $F'=(10,2)$ کانون‌های یک هذلولی با خروج از مرکز $\frac{4}{3}$ باشند. مختصات یکی از رأس‌های این هذلولی کدام است؟

۱) $(9,2)$ ۲) $(8,2)$ ۳) $(\frac{17}{2},2)$ ۴) $(7,2)$

۴۶- فرض کنید مرکز، رأس و کانون یک هذلولی افقی به ترتیب روی خطوط $y=x$، $y=2x$ و $y=3x$ قرار داشته باشند. خروج از مرکز این هذلولی چند است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۴۷- فرض کنید نقاط $F=(0,2)$ و $F'=(8,-6)$ کانون‌های یک هذلولی باشند و $M=(3,6)$ نقطه‌ای روی این هذلولی باشد. خروج از مرکز این هذلولی چند است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

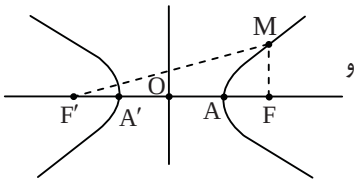
* ۴۸- فرض کنید $O=(2,1)$ و $A=(3,5)$ به ترتیب مرکز و رأسی از یک هذلولی باشند و خط $y=3x$ از یکی از کانون‌های این هذلولی بگذرد. خروج از مرکز این هذلولی چند است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل تشریحی تست‌های بخش چهارم

A ۱- گزینه‌ی (۴)

هذولی: فرض کنید F و F' دو نقطه‌ی ثابت در صفحه به فاصله‌ی $2c$ از یک‌دیگر باشند و $a < c$ یک عدد حقیقی ثابت باشد. مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل فواصل آن‌ها از F و F' برابر $2a$ باشد هذولی نام دارد.



پس برای هر نقطه مانند M روی هذولی داریم:

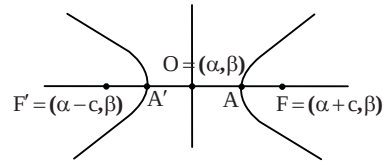
$$\| MF | - | MF' \| = 2a$$

نقاط F و F' کانون‌های هذولی نام دارند. فرض کنید نقطه‌ی O وسط پاره‌خط FF' باشد. به O مرکز هذولی گفته می‌شود و در واقع مرکز تقارن هذولی است. به خط گذرا از F و F' محور کانونی و به خط عمود منصف پاره‌خط FF' محور غیر کانونی هذولی گفته می‌شود و این دو خط محورهای تقارن هذولی هستند.

محور کانونی، هذولی را در دو نقطه‌ی A و A' قطع می‌کند. به A و A' رأس‌های هذولی گفته می‌شود. فاصله‌ی بین رأس‌های هذولی برابر $2a$ است. محور غیر کانونی، هذولی را قطع نمی‌کند.

نتیجه: اولاً همواره $a > 0$ و $c > 0$ و ثانیاً هر رأس هذولی از مرکز آن فاصله‌ای برابر a و هر کانون آن از مرکز، فاصله‌ای برابر c دارد.

معادله‌ی استاندارد هذولی افقی: فرض کنید $F = (\alpha + c, \beta)$ و $F' = (\alpha - c, \beta)$. در این صورت معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل فواصل آن‌ها از F و F' برابر $2a$ باشد به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ است که در آن $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

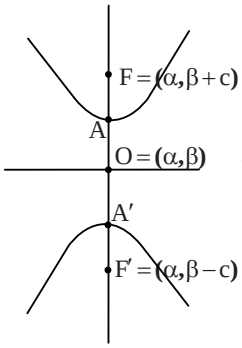


در هذولی افقی نقاط $A = (\alpha + a, \beta)$ و $A' = (\alpha - a, \beta)$ رأس‌های هذولی هستند.

نتیجه: ۱- در هذولی افقی، محور کانونی افقی است، و دو کانون، دو رأس و مرکز همه عرضی یکسان دارند.

۲- در معادله‌ی استاندارد هذولی افقی، کسر شامل x علامتی مثبت و کسر شامل y علامتی منفی دارد.

معادله‌ی استاندارد هذولی قائم: فرض کنید $F = (\alpha, \beta + c)$ و $F' = (\alpha, \beta - c)$. در این صورت معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل فواصل آن‌ها از F و F' برابر $2a$ باشد به صورت $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$ است که در آن $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.



در هذولی قائم نقاط $A = (\alpha, \beta + a)$ و $A' = (\alpha, \beta - a)$ رأس‌های هذولی هستند.

نتیجه: ۱- در هذولی قائم، محور کانونی عمودی است، و دو کانون، دو رأس و مرکز همه طولی یکسان دارند.

۲- در معادله‌ی استاندارد هذولی قائم، کسر شامل y علامتی مثبت و کسر شامل x، علامتی منفی دارد.

نکته: در معادله‌ی استاندارد هر هذولی قائم یا افقی، از بین دو کسر، مخرج کسر مثبت، a^2 است.

چون نقاط $F = (2,7)$ و $F' = (2,1)$ روی یک خط قائم قرار دارند، پس هذولی مورد نظر قائم است. نقطه‌ی $O = \frac{1}{2}(F + F') = (2,4)$ مرکز هذولی است، هم‌چنین طبق فرض $2a = 4$ و $2c = |FF'| = 6$، پس $a = 2$ و $c = 3$، لذا $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5}$. در نتیجه معادله‌ی هذولی به صورت $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1$ است.

A **۲- گزینه‌ی (۲)**

چون نقاط $F=(2,-2)$ و $F'=(2,4)$ روی یک خط قائم قرار دارند، پس هذلولی مورد نظر یک هذلولی قائم است و لذا معادله‌ی آن به صورت $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ است. مرکز هذلولی بر وسط پاره خط FF' منطبق است، لذا $O=(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(F+F')=(2,1)$. هم‌چنین $2c=|FF'|=6$ و $a=|OA|=1$، پس $b=\sqrt{c^2-a^2}=8$. لذا معادله‌ی هذلولی به صورت $(y-1)^2-\frac{(x-2)^2}{8}=1$ است.

B **۳- گزینه‌ی (۳)**

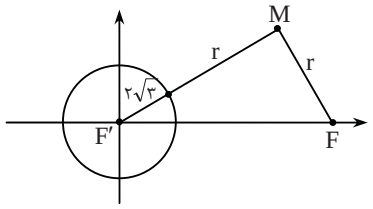
چون نقاط $F=(3,0)$ و $F'=(-3,0)$ روی یک خط افقی قرار دارند، پس هذلولی مورد نظر یک هذلولی افقی است و لذا معادله‌ی آن به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ است. مرکز هذلولی بر وسط پاره خط FF' منطبق است، لذا $O=(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(F+F')=(0,0)$. هم‌چنین $2c=|FF'|=6$، پس $a^2+b^2=c^2=9$. چون نقطه‌ی $M=(2\sqrt{6},5)$ روی هذلولی قرار دارد، پس $\frac{(2\sqrt{6})^2}{a^2}-\frac{5^2}{b^2}=1$. با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases}a^2+b^2=9\\ \frac{24}{a^2}-\frac{25}{b^2}=1\end{cases}$ نتیجه می‌گیریم $a^2=4$ و $b^2=5$. پس معادله‌ی هذلولی به صورت $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ است.

B **۴- گزینه‌ی (۱)**

معادله‌ی $3x^2-12x-4y^2+20y=m$ را به صورت $3(x-2)^2-4(y-\frac{5}{2})^2=m+12-25=m-13$ بازنویسی می‌کنیم. می‌دانیم معادله‌ی یک هذلولی قائم به صورت $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ است یا معادل آن $b^2(y-\beta)^2-a^2(x-\alpha)^2=a^2b^2$، پس در صورتی معادله‌ی مورد نظر، معادله‌ی یک هذلولی قائم است که ضریب جمله‌ی شامل y و عدد ثابت سمت راست هر دو، هم علامت باشند. یعنی: $m-13>0$. در بین ۴ عدد داده شده فقط $m=11$ در این نابرابری صدق می‌کند.

D **۵- گزینه‌ی (۱)**

فرض کنید M مرکز دایره‌ای مانند C باشد که از نقطه‌ی $F=(8,0)$ گذشته و بر دایره‌ی $x^2+y^2=12$ مماس است. نقطه‌ی $F'=(0,0)$ مرکز دایره‌ی $x^2+y^2=12$ و شعاع این دایره برابر $r'=2\sqrt{3}$ است. فرض کنید شعاع دایره‌ی C برابر r باشد، لذا $|MF|=r$. اگر C و دایره‌ی $x^2+y^2=12$ مماس خارج باشند، آن‌گاه $|MF'|=r+r'=r+2\sqrt{3}$ و لذا $|MF'|-|MF|=2\sqrt{3}$ و اگر این دو دایره مماس داخل باشند، آن‌گاه $|MF'|=r-r'=r-2\sqrt{3}$، لذا $|MF|-|MF'|=2\sqrt{3}$. پس قدر مطلق تفاضل فواصل M از F و F' برابر $2\sqrt{3}$ است، لذا M روی هذلولی به کانون‌های F و F' قرار دارد که در آن $2a=2\sqrt{3}$. چون نقاط F و F' روی یک خط افقی قرار دارند، پس این هذلولی یک هذلولی افقی است و لذا معادله‌ی آن به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ است.



مرکز هذلولی بر وسط پاره‌خط FF' منطبق است، لذا $O=(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(F+F')=(4,0)$. هم‌چنین $2c=|FF'|=8$ و لذا $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13}$. پس معادله‌ی هذلولی به صورت $\frac{(x-4)^2}{3}-\frac{y^2}{13}=1$ است.

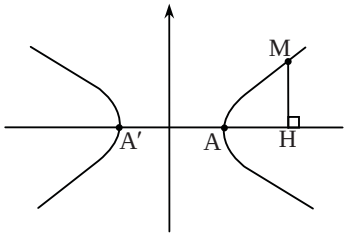
B **۶- گزینه‌ی (۴)**

توجه کنید که نقطه‌ی $O=(0,0)$ در معادله‌ی $3y^2-4x^2+12y=0$ صدق می‌کند، پس O روی این هذلولی قرار دارد، لذا قدر مطلق تفاضل فواصل O از F و F' برابر $2a$ است. برای محاسبه‌ی a باید معادله‌ی هذلولی را به صورت استاندارد درآوریم. معادله‌ی هذلولی را به صورت $3(y+2)^2-4x^2=12$ بازنویسی می‌کنیم، لذا معادله‌ی استاندارد هذلولی به صورت $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ است، پس در این هذلولی $a^2=4$، لذا $2a=4=||OF|-|OF'||$.

D **۷- گزینه‌ی (۱)**

دستگاه مختصات را به گونه‌ای می‌گیریم که معادله‌ی هذلولی در آن به صورت $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ باشد. در این صورت $A=(a,۰)$ و $A'=(-a,۰)$. فرض کنید $M=(x_۰,y_۰)$، لذا $H=(x_۰,۰)$. پس:

$$s=\frac{|MH|^۲}{|AH||A'H|}=\frac{y_۰^۲}{(x_۰-a)(x_۰+a)}=\frac{y_۰^۲}{x_۰^۲-a^۲}$$



چون نقطه‌ی M روی هذلولی قرار دارد، پس $\frac{x_۰^۲}{a^۲}-\frac{y_۰^۲}{b^۲}=۱$، لذا

$$y_۰^۲=b^۲(\frac{x_۰^۲}{a^۲}-۱)=\frac{b^۲}{a^۲}(x_۰^۲-a^۲)$$

در نتیجه $s=\frac{y_۰^۲}{x_۰^۲-a^۲}=\frac{b^۲}{a^۲}$. پس مقدار s به موقعیت نقطه‌ی M بستگی ندارد.

C **۸- گزینه‌ی (۴)**

فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $M=(x,y)$ از نقطه‌ی $F=(۰,۳)$ دو برابر فاصله‌ی آن از محور x باشد، در این صورت $\sqrt{x^۲+(y-۳)^۲}=۲|y|$، لذا $x^۲+(y-۳)^۲=۴y^۲$. در نتیجه $x^۲-۳y^۲-۶y+۹=۰$، لذا $x^۲-۳(y+۱)^۲=-۱۲$، پس معادله‌ی استاندارد هذلولی به صورت $\frac{(y+۱)^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۱۲}=۱$ است. در این هذلولی $a^۲=۴$ و $b^۲=۱۲$، پس $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۴$، لذا فاصله‌ی بین کانون‌های هذلولی برابر ۸ است.

C **۹- گزینه‌ی(۳)**

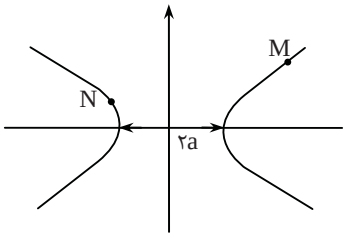
فرض کنید $M=(x,y)$، در این صورت $x=۱+\frac{۵}{\cos t}$, $y=-۳+۲\sqrt{۵}\tan t$

در نتیجه: $\frac{(x-۱)^۲}{۲۵}=\frac{۱}{\cos^۲ t}=۱+\tan^۲ t$, $\frac{(y+۳)^۲}{۲۰}=\tan^۲ t$

پس $\frac{(x-۱)^۲}{۲۵}-\frac{(y+۳)^۲}{۲۰}=۱$، لذا در این هذلولی $a^۲=۲۵$ و $b^۲=۲۰$، پس $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۳\sqrt{۵}$، لذا فاصله‌ی بین کانون‌های این هذلولی برابر $۶\sqrt{۵}$ است.

B **۱۰- گزینه‌ی (۴)**

چنان‌چه نقاط M و N هر یک روی یکی از شاخه‌های یک هذلولی قرار داشته باشند، در این صورت کم‌ترین فاصله‌ی بین M و N برابر $۲a$ است.



معادله‌ی $۳x^۲+۶x-۴y^۲-۱۶y=۶۱$ را به صورت $۳(x+۱)^۲-۴(y+۲)^۲=۴۸$ بازنویسی می‌کنیم، لذا معادله‌ی استاندارد هذلولی به صورت $\frac{(x+۱)^۲}{۱۶}-\frac{(y+۲)^۲}{۱۲}=۱$ است. در این هذلولی $a^۲=۱۶$، پس کم‌ترین فاصله‌ی بین M و N برابر $۲a=۸$ است.

B **۱۱- گزینه‌ی (۱)**

نقطه‌ی $O=(-۱,۲)$ مرکز هذلولی $\frac{(x+۱)^۲}{۱۳}-\frac{(y-۲)^۲}{۳}=۱$ است. این هذلولی یک هذلولی افقی است و در آن $a^۲=۱۳$ و $b^۲=۳$، پس $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۴$. در نتیجه دو کانون هذلولی از حرکت افقی به سمت راست یا چپ رأس O به فاصله‌ی $c=۴$ واحد به دست می‌آیند، یعنی نقاط $F=(-۱+c,۲)=(۳,۲)$ و $F'=(-۱-c,۲)=(-۵,۲)$ کانون‌های این هذلولی هستند.

B **۱۲- گزینه‌ی (۳)**

هذلولی $\frac{(x-۳)^۲}{m}-\frac{(y-n)^۲}{۱۹}=۱$ یک هذلولی افقی است، نقطه‌ی $O=(۳,n)$ مرکز هذلولی است و در این هذلولی $a^۲=m$ و $b^۲=۱۹$. چون هذلولی افقی است، پس نقاط $O=(۳,n)$ و $F=(-۲,۱)$ روی یک خط افقی قرار دارند، لذا $n=۱$. در این هذلولی $c=|OF|=۵$، پس

$$m=a^۲=c^۲-b^۲=۲۵-۱۹=۶$$

در نتیجه:

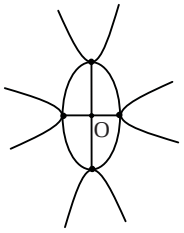
$$m+n=۷$$

B **۱۳- گزینه‌ی (۱)**

معادله‌ی $۴y^۲+۸y-x^۲-۶x=۲۱$ را به صورت $۴(y+۱)^۲-(x+۳)^۲=۱۶$ بازنویسی می‌کنیم. لذا معادله‌ی استاندارد هذلولی به صورت $\frac{(y+۱)^۲}{۴}-\frac{(x+۳)^۲}{۱۶}=۱$ است. این هذلولی یک هذلولی قائم است، نقطه‌ی $O=(-۳,-۱)$ مرکز این هذلولی است و در این هذلولی $a^۲=۴$. رأس‌های این هذلولی قائم، در بالا و پایین مرکز آن به فاصله‌ی $a=۲$ واحد از آن قرار دارند، پس نقاط $A=(-۳,-۱+a)=(-۳,۱)$ و $A'=(-۳,-۱-a)=(-۳,-۳)$ رئوس این هذلولی هستند.

C **۱۴- گزینه‌ی (۲)**

نقطه‌ی $O=(۱,۲)$ مرکز بیضی و هذلولی‌های داده شده است. هم‌چنین بیضی داده شده یک بیضی قائم است که طول قطر کوچک آن برابر ۴ و طول قطر بزرگ آن برابر ۶ است. لذا با توجه به شکل زیر اگر در یک هذلولی افقی فاصله‌ی بین رئوس برابر ۴ یا در یک هذلولی قائم فاصله‌ی بین رئوس برابر ۶ باشد، آن‌گاه هذلولی بر بیضی مماس می‌شود. هذلولی $\frac{(y-۲)^۲}{۹}-\frac{(x-۱)^۲}{۴}=۱$ یک هذلولی قائم است و فاصله‌ی بین رأس‌های آن برابر ۶ است، هذلولی $(x-۱)^۲-(y-۲)^۲=۴$ یک هذلولی افقی است و فاصله‌ی بین رأس‌های آن برابر ۴ است و هذلولی $\frac{(x-۱)^۲}{۴}-\frac{(y-۲)^۲}{۵}=۱$ نیز یک هذلولی افقی است و فاصله‌ی بین رأس‌های آن برابر ۴ است. پس این ۳ هذلولی بر بیضی داده شده مماس‌اند.



C **۱۵- گزینه‌ی (۲)**

فرض کنید $M=(x,y)$ نقطه‌ای از هذلولی باشد، در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی M از نقطه‌ی $F=(۲,۵)$ سه برابر فاصله‌ی آن از خط $y=۱$ است، لذا $\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۵)^۲}=۳|y-۱|$، پس $(x-۲)^۲+(y-۵)^۲=۹(y-۱)^۲$. در نتیجه $(x-۲)^۲-۸y^۲+۸y+۱۶=۰$ و لذا $(x-۲)^۲-۸(y-\frac{۱}{۲})^۲=-۱۴$. پس نقطه‌ی $O=(۲,\frac{۱}{۲})$ مرکز این هذلولی است.

روش دوم:

نکته: برای به‌دست آوردن مختصات مرکز هذلولی به معادله‌ی $F(x,y)=۰$، می‌توانید مانند مقاطع قبلی دستگاه شامل $F'_x=۰$ و $F'_y=۰$ را حل کنید.

مثلاً در این جا داریم:

$$F(x,y)=(x-۲)^۲-۸y^۲+۸y+۱۶$$

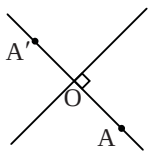
$$\left.\begin{array}{l}F'_x=۰\Rightarrow -۱۶y+۸=۰\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\\ F'_y=۰\Rightarrow ۲(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\end{array}\right\}\Rightarrow O=(۲,\frac{۱}{۲})$$

C **۱۶- گزینه‌ی (۳)**

معادله‌ی $۲x^۲-۴x-۳y^۲+۱۲y=۱$ را به صورت $۲(x-۱)^۲-۳(y-۲)^۲=-۹$ بازنویسی می‌کنیم، لذا نقطه‌ی $O=(۱,۲)$ مرکز و خطوط $x=۱$ و $y=۲$ محورهای تقارن این هذلولی هستند. حال اگر (m,n) نقطه‌ای روی هذلولی باشد، آن‌گاه قرینه‌ی این نقطه نسبت به مرکز و محورهای تقارن یعنی نقاط $(۲-m,۴-n)$، $(۲-m,n)$ و $(m,۴-n)$ نیز روی هذلولی قرار دارند.

B **۱۷- گزینه‌ی (۲)**

چون نقطه‌ی $A=(۲,۱)$ روی خط $x+۴y=۲۳$ قرار ندارد، پس این خط محور غیر کانونی هذلولی است. محور کانونی هذلولی از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر محور غیر کانونی عمود است. ضریب زاویه‌ی خط $x+۴y=۲۳$ برابر $-\frac{۱}{۴}$ است، لذا معادله‌ی محور کانونی به صورت $y-۱=۴(x-۲)$ یا به طور ساده‌تر به صورت $y=۴x-۷$ است. می‌دانیم محل برخورد محورهای کانونی و غیر کانونی مرکز هذلولی است. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}x+۴y=۲۳\\ y=۴x-۷\end{cases}$ نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $O=(۳,۵)$ مرکز هذلولی است. اگر رأس دیگر هذلولی را A' بنامیم، آن‌گاه O وسط پاره‌خط AA' است، پس $A'=۲O-A=(۴,۹)$.



B ۱۸- گزینه‌ی (۱)

یکی از محورهای تقارن هذلولی خط گذرا از F و F' و دیگری خط عمود منصف پاره‌خط FF' است. معادله‌ی خط گذرا از نقاط $F=(۲,۵)$ و $F'=(۴,۳)$ به صورت $y-۵=\frac{۵-۳}{۲-۴}(x-۲)$ یا به طور ساده‌تر به صورت $y=-x+۷$ است. چون ضریب زاویه‌ی این خط برابر ۱- است، لذا ضریب زاویه‌ی خط عمود منصف FF' برابر ۱ است، هم‌چنین نقطه‌ی $O=\frac{۱}{۲}(F+F')=(۳,۴)$ روی این عمود منصف قرار دارد، پس معادله‌ی آن به صورت $y-۴=x-۳$ یا به طور ساده‌تر به صورت $y=x+۱$ است. پس خطوط $y=-x+۷$ و $y=x+۱$ محورهای تقارن هذلولی هستند.

C ۱۹- گزینه‌ی (۲)

فرض کنید $M=(x,y)$ نقطه‌ای روی هذلولی باشد. ضریب زاویه‌ی خط گذرا از نقاط M و $P=(۰,۳)$ برابر $\frac{y-۳}{x}$ و ضریب زاویه‌ی خط گذرا از نقاط M و $Q=(۴,-۳)$ برابر $\frac{y+۳}{x-۴}$ است. با توجه به فرض $\frac{y-۳}{x}\times\frac{y+۳}{x-۴}=۳$، در نتیجه $y^۲-۹=۳x^۲-۱۲x$، لذا $۳(x-۲)^۲-y^۲=۳$، پس معادله‌ی استاندارد هذلولی به صورت $(x-۲)^۲-\frac{y^۲}{۳}=۱$ است. در این هذلولی $a^۲=۱$ و $b^۲=۳$، پس $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۲$، لذا فاصله‌ی بین کانون‌های این هذلولی از یک‌دیگر برابر ۴ است.

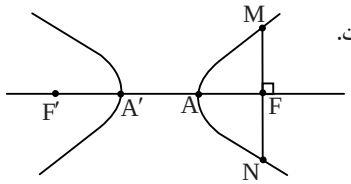
C ۲۰- گزینه‌ی (۳)

چون رئوس هذلولی روی خطوط $y=x+۱$ و $y=۳x+۵$ قرار دارند، پس اعداد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ وجود دارند که به ازای آن‌ها نقاط $A=(x_۱,x_۱+۱)$ و $A'=(x_۲,۳x_۲+۵)$ رئوس هذلولی هستند. چون نقطه‌ی O وسط پاره‌خط AA' است، پس $A+A'=۲O=(۰,۰)$، لذا:

$$\begin{cases}x_۱+x_۲=۰\\(x_۱+۱)+(۳x_۲+۵)=۰\end{cases}$$

با حل این دستگاه معادلات نتیجه می‌گیریم $x_۱=۳$ و $x_۲=-۳$، پس $A=(۳,۴)$ و $A'=(-۳,-۴)$، لذا $|AA'|=۱۰$.

C ۲۱- گزینه‌ی (۴)

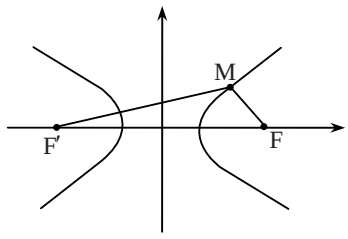


با روشی مشابه روش اثبات ارائه شده در بیضی، ثابت می‌شود که طول وتر کانونی هذلولی برابر $\frac{۲b^۲}{a}$ است.

در هذلولی $\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۱۲}=۱$، $a^۲=۴$ و $b^۲=۱۲$، پس طول وتر کانونی برابر $\frac{۲b^۲}{a}=۱۲$ است.

C ۲۲- گزینه‌ی (۲)

در هذلولی $\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۵}=۱$، $a^۲=۴$ و $b^۲=۵$، پس $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۳$.



نقطه‌ی $O=(۰,۰)$ مرکز هذلولی است و با توجه به ضریب مثبت $x^۲$، هذلولی افقی می‌باشد. چون $c=۳$، کانون‌های هذلولی، $F=(۳,۰)$ و $F'=(-۳,۰)$ خواهند بود و حال می‌خواهیم فاصله‌ی نقطه‌ی M به طول ۸ را از F پیدا کنیم. M روی هذلولی است، پس:

$$\frac{۶۴}{۴}-\frac{y^۲}{۵}=۱\Rightarrow y^۲=۱۵\times۵\Rightarrow y=\mp۵\sqrt{۳}\Rightarrow M=(۸,۵\sqrt{۳})$$

$$|FM|=\sqrt{۵^۲+(۵\sqrt{۳})^۲}=۱۰$$

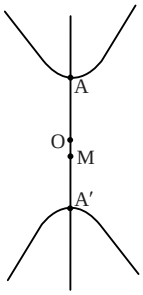
یادداشت: در حالت کلی می‌توان با همین روش نشان داد که اگر $M=(x_۰,y_۰)$ نقطه‌ای روی هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ باشد و نقاط F و F' کانون‌های این هذلولی باشند، در این صورت $|MF|=|\frac{c}{a}x_۰-a|$ و $|MF'|=|\frac{c}{a}x_۰+a|$.

B **۲۳- گزینه‌ی (۴)**

فرض کنید F کانونی از یک هذلولی و M نقطه‌ای روی این هذلولی باشد. در این صورت حداقل فاصله‌ی M از F برابر $c-a$ است و این حداقل زمانی رخ می‌دهد که M بر رأس هذلولی منطبق باشد.

در هذلولی $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$، $a^۲=۹$ و $b^۲=۱۶$، پس $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۵$. با توجه به نکته‌ی فوق حداقل فاصله‌ی M از F برابر $c-a=۲$ است.

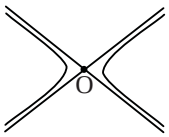
C **۲۴- گزینه‌ی (۲)**



در هذلولی $\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}-\frac{(x-۱)^۲}{۹}=۱$ نقطه‌ی $O=(۱,۳)$ مرکز است و $a^۲=۱۶$. در ضمن این هذلولی یک هذلولی قائم است، پس نقاط $A=(۱,۷)$ و $A'=(۱,-۱)$ رأس‌های این هذلولی هستند. حال نقطه‌ی $M=(۱,۲)$ روی پاره‌خط AA' به فاصله‌ی ۵ از A و به فاصله‌ی ۳ از A' قرار دارد. پس نقطه‌ی A' نزدیک‌ترین نقطه‌ی هذلولی به نقطه‌ی M است و لذا کم‌ترین فاصله‌ی M از نقاط هذلولی برابر ۳ است.

B **۲۵- گزینه‌ی (۳)**

مجانب‌های هذلولی: هر هذلولی دو مجانب دارد که از مرکز هذلولی می‌گذرند.



مجانب‌های هذلولی را می‌توان با استفاده از مفهوم مجانب مایل در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیدا کرد. ولی نتایج آن به سادگی قابل حفظ کردن هستند! برای یافتن مجانب‌های یک هذلولی از روی معادله‌ی استاندارد آن، کافی است سمت متغیرها را به صورت تجزیه‌ی اتحاد مزدوج بنویسید و صفر بودن هر پرانتز یکی از مجانب‌ها را حاصل می‌کند. مثلاً در هذلولی افقی:

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow(\frac{x-\alpha}{a}+\frac{y-\beta}{b})(\frac{x-\alpha}{a}-\frac{y-\beta}{b})=۱$$

معادله‌ی دو مجانب هذلولی فوق را با صفر کردن هر پرانتز می‌توان به دست آورد:

مجانب اول: $\frac{x-\alpha}{a}+\frac{y-\beta}{b}=۰\Rightarrow y-\beta=-\frac{b}{a}(x-\alpha)$

مجانب دوم: $\frac{x-\alpha}{a}-\frac{y-\beta}{b}=۰\Rightarrow y-\beta=\frac{b}{a}(x-\alpha)$

به همین ترتیب در هذلولی قائم $\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱$، دو مجانب آن دارای معادلات $y-\beta=\mp\frac{a}{b}(x-\alpha)$ هستند.

تذکر: روش یافتن مجانب‌ها بر اساس تجزیه‌ی اتحاد مزدوج، در مواردی که معادله به فرم استاندارد نیست، باز هم معتبر است. یعنی اگر توانستید معادله‌ی هذلولی را به صورت ضرب دو عبارت بنویسید که نتیجه‌ی حاصل‌ضرب یک عدد ثابت شده باشد، صفر بودن هر یک از پرانتزها، یک مجانب را نشان می‌دهد.

معادله‌ی $۹y^۲-۴x^۲-۳۶y-۸x=۴$ را به صورت $۹(y-۲)^۲-۴(x+۱)^۲=۳۶$ بازنویسی می‌کنیم، و این معادله را می‌توان با استفاده از اتحاد مزدوج به صورت زیر نوشت:

$$(۳y-۶+۲x+۲)(۳y-۶-۲x-۲)=۳۶\Rightarrow(۳y+۲x-۴)(۳y-۲x-۸)=۳۶$$

پس دو مجانب هذلولی $۳y+۲x-۴=۰$ و $۳y-۲x-۸=۰$ خواهند بود.

B **۲۶- گزینه‌ی (۱)**

از توضیحات تست قبل نتیجه می‌گیریم که در هذلولی قائم (و هم‌چنین افقی) ضریب زاویه‌های دو خط مجانب، قرینه‌ی یک‌دیگرند.

حال اگر خطوط $y=۲x-۱$ و $y=mx+۱۱$ مجانب‌های یک هذلولی قائم باشند، آن‌گاه $m=-۲$. چون هر دو مجانب از مرکز هذلولی می‌گذرند، لذا با حل دستگاه معادلات $\begin{cases}y=۲x-۱\\y=-۲x+۱۱\end{cases}$ نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $O=(۳,۵)$ مرکز هذلولی است و لذا مجموع مختصات آن برابر ۸ است.

B **۲۷- گزینه‌ی(۴)**

مجانب‌های این هذلولی دارای معادلات $\frac{x-m}{\sqrt{6}} \mp \frac{y+1}{\sqrt{n}} = 0$ هستند، یا معادل آن $y+1 = \mp\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{6}}(x-m)$ که شیبی برابر $\mp\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{6}}$ دارند، در واقعاز توضیحات تست ۲۵ نتیجه می‌گیریم در هذلولی افقی ضریب زاویه‌ی خطوط مجانب برابر $\mp\frac{b}{a}$ است. لذا اگر خط $y = 2x - 7$ یکی از مجانب‌های هذلولی باشد، آن‌گاه $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{6}} = 2$، پس $n = 24$. نقطه‌ی $O = (m, -1)$ مرکز هذلولی است و چون مرکز هذلولی روی خطوط مجانب قرار دارد، پس $2m - 7 = -1$، لذا $m = 3$، پس $m + n = 27$.

C **۲۸- گزینه‌ی(۱)**

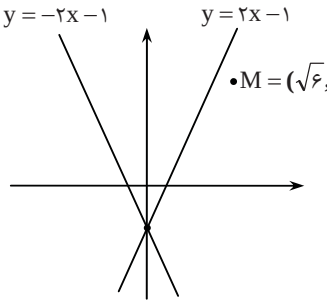
چون خطوط $y = \mp 2x$ مجانب‌های هذلولی هستند، پس محل برخورد این دو خط یعنی نقطه‌ی $O = (0, 0)$ مرکز این هذلولی است. چون فاصله‌ی بین رئوس هذلولی برابر $4\sqrt{5}$ است، پس $2a = 4\sqrt{5}$ و چون هذلولی مورد نظر یک هذلولی قائم است، پس ضریب زاویه‌ی مجانب‌های آن برابر $\mp\frac{a}{b}$ است، لذا $\frac{a}{b} = 2$، پس $b = \sqrt{5}$. در نتیجه $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. پس نقاط $(0, \mp 5)$ کانون‌های این هذلولی هستند.

B **۲۹- گزینه‌ی (۳)**

چون نقاط $O = (0, 0)$ و $A = (0, 6)$ روی یک خط قائم قرار دارند، پس هذلولی مورد نظر یک هذلولی قائم است، لذا ضریب زاویه‌ی مجانب‌های این هذلولی برابر $\mp\frac{a}{b}$ است. حال چون خط $y = \frac{3}{2}x$ یکی از مجانب‌های هذلولی است، پس $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$. در ضمن $a = |OA| = 6$، پس $b = 4$ و لذا معادله‌ی هذلولی به صورت $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$ است.

روش دوم: مختصات رأس هذلولی $A(0, 6)$ فقط در معادله‌ی گزینه‌ی (۳) صدق می‌کند!

C **۳۰- گزینه‌ی(۲)**



با توجه به وضعیت نقطه‌ی M نسبت به دو خط مجانب که در شکل روبرو نشان داده شده است نتیجه می‌گیریم هذلولی مورد نظر یک هذلولی افقی است.

پس معادله‌ی هذلولی به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ است و ضریب زاویه‌ی مجانب‌ها برابر $\mp\frac{b}{a}$ است، لذا $\frac{b}{a} = 2$.

از حل دستگاه $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $O = (0, -1)$ مرکز هذلولی است، پس $\alpha = 0$ و $\beta = -1$. در نتیجه معادله‌ی هذلولی به صورت $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$ است و چون نقطه‌ی $M = (\sqrt{6}, 3)$ روی هذلولی قرار دارد، پس $\frac{6}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} b = 2a \\ \frac{6}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \end{cases}$ نتیجه می‌گیریم $a^2 = 2$ و $b^2 = 8$، پس معادله‌ی هذلولی به صورت $\frac{x^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{8} = 1$ یا به طور ساده‌تر به صورت $4x^2 - y^2 - 2y = 9$ درمی‌آید.

روش دوم:

نکته: اگر $mx + ny + p = 0$ و $m'x + n'y + p' = 0$ دو مجانب یک هذلولی باشند، معادله‌ی هذلولی به صورت $(mx + ny + p)(mx' + n'y + p') = k$ است که در آن k یک عدد ثابت می‌باشد.

این نکته از توضیحات پاسخ تست ۲۵، به راحتی قابل نتیجه‌گیری است. زیرا همان طور که در آن‌جا توضیح داده‌ایم، مثلاً در هذلولی افقی، معادله‌ی آن به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\left(\frac{x-\alpha}{a} + \frac{y-\beta}{b}\right)\left(\frac{x-\alpha}{a} - \frac{y-\beta}{b}\right) = 1 \Rightarrow (bx + ay - \alpha b - \beta a)(bx - ay - \alpha b + \beta a) = a^2 b^2$$

می‌دانیم صفر بودن هر پرانتز بیانگر معادله‌ی خط یکی از مجانب‌ها است و مشاهده می‌کنید که به همان صورتی تبدیل شده است که در ابتدای نکته بیان کرده‌ایم.

در این تست دو مجانب $y-2x+1=0$ و $y+2x+1=0$ هستند و طبق نکته، معادله‌ی هذلولی به فرم $(y-2x+1)(y+2x+1)=k$ می‌شود، که معادل است با: $(y+1)^2-4x^2=k$، برای یافتن مقدار k کافی است مختصات نقطه‌ی $M=(\sqrt{6},3)$ را در معادله صدق دهیم:

$$(3+1)^2-4\times 6=k\Rightarrow k=-8$$

پس معادله‌ی هذلولی عبارت است از:

$$(y+1)^2-4x^2=-8\Rightarrow 4x^2-y^2-2y=9$$

C **۳۱- گزینه‌ی (۳)**

معادله‌ی هذلولی به صورت $9y^2-6x^2=54$، یا معادل آن $(3y-\sqrt{6}x)(3y+\sqrt{6}x)=54$ قابل بازنویسی است. پس دو مجانب آن $3y-\sqrt{6}x=0$ و $3y+\sqrt{6}x=0$ هستند.

نقطه‌ی $M=(x_0,y_0)$ را روی هذلولی در نظر می‌گیریم، فاصله‌ی M از دو مجانب برابر است با: $\frac{|3y_0-\sqrt{6}x_0|}{\sqrt{9+6}}$ و $\frac{|3y_0+\sqrt{6}x_0|}{\sqrt{9+6}}$ و حاصل‌ضرب این دو فاصله برابر می‌شود با:

$$\frac{|3y_0+\sqrt{6}x_0||3y_0-\sqrt{6}x_0|}{15}$$

صورت کسر حاصل برابر ۵۴ است، زیرا مختصات M در معادله‌ی هذلولی صدق می‌کند و بنابراین مقدار حاصل‌ضرب فاصله‌ها برابر می‌شود با:

$$\frac{54}{15}=\frac{18}{5}$$

تذکر: با همین شیوه در حالت کلی ثابت می‌شود حاصل ضرب فواصل هر نقطه از هذلولی، از خطوط مجانب آن، برابر $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ است، یا به بیان دیگر $(\frac{ab}{c})^2$.

B **۳۲- گزینه‌ی(۴)**

چون نقطه‌ی $F=(3,5)$ کانونی از یک هذلولی قائم است، پس خط $x=3$ محور کانونی این هذلولی است.

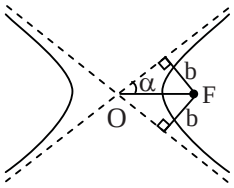
چون مرکز هذلولی هم روی محورهای تقارن و هم روی خطوط مجانب قرار دارد، پس از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}x=3\\y=2x-4\end{cases}$ نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $O=(3,2)$ مرکز هذلولی است و لذا مجموع مختصات آن برابر ۵ است.

C **۳۳- گزینه‌ی (۲)**

چون $A=(2,-1)$ رأسی از یک هذلولی افقی است، پس خط $y=-1$ محور کانونی این هذلولی است و چون مرکز هذلولی روی محورهای تقارن و خطوط مجانب قرار دارد، پس از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}y=-1\\y=2x+1\end{cases}$ نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $O=(-1,-1)$ مرکز هذلولی است، لذا $a=|OA|=3$. چون هذلولی مورد نظر افقی است، پس ضریب زاویه‌ی مجانب‌های آن برابر $\mp\frac{b}{a}$ است، لذا $\frac{b}{a}=2$، پس $b=6$. در نتیجه $c=\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{5}$ و لذا فاصله‌ی کانون‌های هذلولی برابر $6\sqrt{5}$ است.

C **۳۴- گزینه‌ی (۴)**

در هذلولی فاصله‌ی هر کانون از خطوط مجانب برابر b است.



زیرا مثلاً در هذلولی افقی شکل، شیب خطوط مجانب $\mp\frac{b}{a}$ است، پس $\tan\alpha=\frac{b}{a}$ و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHF، طول وتر $OF=c$ می‌باشد. با توجه به آن که در هذلولی $c^2=a^2+b^2$ و در مثلث OHF داریم:

$$c^2=HF^2+OH^2$$

و می‌دانیم: $\tan\alpha=\frac{HF}{HO}=\frac{b}{a}$، از مقایسه‌ی نتایج، به دست می آوریم: $HF=b$ و $OH=a$.

طبق فرض فاصله‌ی کانون از مرکز و خط مجانب به ترتیب برابر ۷ و ۳ است، پس $c=7$ و $b=3$. در نتیجه $a=\sqrt{c^2-b^2}=2\sqrt{10}$ و لذا فاصله‌ی بین رأس‌های هذلولی برابر $4\sqrt{10}$ است.

C ۳۵- گزینه‌ی (۱)

فاصله‌ی نقطه‌ی $F=(۵,۱)$ از خط $۳x+۴y=۴$ برابر $\frac{|۱۵+۴-۴|}{\sqrt{۲۵}}=۳$ است. چون در هذلولی فاصله‌ی هر کانون از خطوط مجانب برابر b است، پس در این هذلولی $b=۳$. هم‌چنین در هذلولی افقی شیب مجانب‌ها برابر $\mp\frac{b}{a}$ است. چون شیب خط $۳x+۴y=۵$ برابر $-\frac{۳}{۴}$ است، لذا $\frac{b}{a}=\frac{۳}{۴}$، پس $a=۴$. چون هذلولی مورد نظر افقی است و $F=(۵,۱)$ کانونی از آن است، پس خط $y=۱$ محور کانونی این هذلولی است، لذا محل تقاطع این خط و خط $۳x+۴y=۴$ یعنی نقطه‌ی $O=(۰,۱)$ مرکز هذلولی است. نتیجه می‌گیریم نقاط $A=(۴,۱)$ و $A'=(-۴,۱)$ رأس‌های این هذلولی هستند.

D ۳۶- گزینه‌ی (۲)

چون نقاط $F=(۸,۳)$ و $F'=(۰,۳)$ روی یک خط افقی قرار دارند، پس هذلولی مورد نظر افقی است. نقطه‌ی $O=\frac{۱}{۲}(F+F')=(۴,۳)$ مرکز این هذلولی است و $۲c=|FF'|=۸$. در هذلولی افقی ضریب زاویه‌ی مجانب‌ها برابر $\mp\frac{b}{a}$ است، پس $\frac{b}{a}=\sqrt{۳}$. از $a^۲+b^۲=c^۲$ نتیجه می‌گیریم $a^۲+۳a^۲=۱۶$، لذا $a=۲$. در نتیجه نقاط $A=(۶,۳)$ و $A'=(۲,۳)$ رأس‌های هذلولی هستند.

D ۳۷- گزینه‌ی (۲)

محل برخورد خطوط $x=۲$ و $y=۲x$ یعنی نقطه‌ی $O=(۲,۴)$ مرکز هذلولی است. چون خط $x=۲$ محور تقارنی از هذلولی است که آن را قطع نمی‌کند، پس محور غیر کانونی هذلولی خطی قائم است و لذا هذلولی داده شده افقی است، پس ضریب زاویه‌ی مجانب‌ها برابر $\mp\frac{b}{a}$ است، لذا $\frac{b}{a}=۲$. چون فاصله‌ی بین کانون‌ها برابر $۴\sqrt{۵}$ است، پس $۲c=۴\sqrt{۵}$. از رابطه‌ی $a^۲+b^۲=c^۲$ نتیجه می‌گیریم $a^۲+۴a^۲=۲۰$، لذا $a=۲$. پس نقاط $A=(۴,۴)$ و $A'=(۰,۴)$ رئوس هذلولی هستند.

C ۳۸- گزینه‌ی (۲)

توجه کنید که نقاط $F=(۳,۳)$ و $F'=(-۱,۷)$ نه روی یک خط افقی و نه روی یک خط قائم قرار دارند. پس هذلولی مورد نظر نه افقی و نه قائم است. نقطه‌ی $O=\frac{۱}{۲}(F+F')=(۱,۵)$ مرکز هذلولی است. چون هر مجانب از مرکز هذلولی می‌گذرد، پس معادله‌ی یکی از مجانب‌ها به صورت $y-۵=۲(x-۱)$ یا به طور ساده‌تر به صورت $۲x-y+۳=۰$ است. می‌دانیم فاصله‌ی هر کانون از خطوط مجانب برابر b است. فاصله‌ی $F=(۳,۳)$ از خط $۲x-y+۳=۰$ برابر $\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$ است، لذا $b=\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$. هم‌چنین $c=|OF|=۲\sqrt{۲}$. در نتیجه $a=\sqrt{c^۲-b^۲}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ و لذا فاصله‌ی بین رئوس هذلولی برابر $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$ است.

D ۳۹- گزینه‌ی (۴)

چون فاصله‌ی بین کانون‌ها برابر ۱۲ و فاصله‌ی بین رئوس برابر $۴\sqrt{۵}$ است، پس $۲c=۱۲$ و $۲a=۴\sqrt{۵}$، پس $b=\sqrt{c^۲-a^۲}=۴$.
می‌دانیم فاصله‌ی هر کانون از خطوط مجانب برابر b است. چون محور x مجانبی از هذلولی است، پس هر کانون روی یکی از دو خط $y=\mp۴$ قرار دارد. در بین ۴ نقطه‌ی داده شده فقط $(۰,۴)$ این ویژگی را دارد.

C ۴۰- گزینه‌ی(۱)

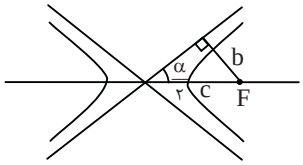
در هذلولی محورهای کانونی و غیر کانونی محورهای تقارن شکل‌اند، پس محور کانونی نیمساز زاویه‌ی بین خطوط مجانب است. معادله‌ی نیمسازهای خطوط $۳x+۲y=۱$ و $۲x+۳y=-۶$ عبارت است از:

$$\frac{۳x+۲y-۱}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}}=\mp\frac{۲x+۳y+۶}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}$$

که پس از ساده کردن نتیجه می‌گیریم محور کانونی یکی از دو خط $x+y=-۱$ و $x-y=۷$ است.

C **۴۱- گزینه‌ی (۲)**

زاویه‌ی بین مجانب‌های یک هذلولی: اگر زاویه‌ی بین مجانب‌های یک هذلولی برابر α باشد، آن‌گاه طبق شکل:



$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{b}{c}\ ,\ \cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{a}{c}\ ,\ \tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{b}{a}$$

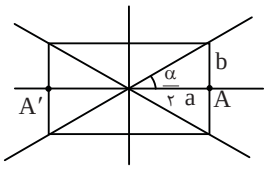
در هذلولی $\frac{(x-۱)^۲}{m^۲-۲}-\frac{y^۲}{-m}=۱$، $a^۲=m^۲-۲$ و $b^۲=-m$. اگر مجانب‌های این هذلولی بر هم عمود باشد، آن‌گاه با توجه به نکته‌ی فوق $\tan\frac{\pi}{۴}=\frac{b}{a}$. چون $\tan\frac{\pi}{۴}=۱$، لذا $a=b$ و در نتیجه $m^۲-۲=-m$، پس $m^۲+m-۲=۰$، لذا $m=۱$ یا $m=-۲$. (دقت کنید که در حالت $m=۱$، در واقع $a^۲=m$ و $b^۲=۲-m^۲$)

C **۴۲- گزینه‌ی(۴)**

چون دو ضلع مستطیل بر هذلولی مماس‌اند، لذا اندازه‌ی یک ضلع از مستطیل برابر فاصله‌ی بین دو رأس از هذلولی یعنی برابر $۲a$ است.

هم‌چنین با توجه به شکل زیر و نکته‌ای که در راه حل سؤال قبل گفتیم $\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{b}{a}$، پس اندازه‌ی ضلع دیگر مستطیل نیز برابر $۲b$ است، لذا مساحت مستطیل برابر $۴ab$ است.

معادله‌ی $x^۲-۴x-۴y^۲=۸$ را به صورت $(x-۲)^۲-۴y^۲=۱۲$ بازنویسی می‌کنیم. لذا معادله‌ی استاندارد هذلولی به صورت $\frac{(x-۲)^۲}{۱۲}-\frac{y^۲}{۳}=۱$ است، لذا در این هذلولی $a^۲=۱۲$ و $b^۲=۳$، پس مساحت مستطیل برابر $۴ab=۲۴$ است.



B **۴۳- گزینه‌ی (۲)**

خروج از مرکز: به نسبت $\frac{c}{a}$ که با e نشان داده می‌شود خروج از مرکز هذلولی گفته می‌شود. با توجه به آن که $c^۲=a^۲+b^۲$، پس $c>a$ و در نتیجه در هر هذلولی $e>۱$. مقدار e هر چه بیش‌تر باشد دهانه‌های هذلولی بازترند (زاویه‌ی بین مجانب‌ها بیش‌تر است).

می‌دانیم در هذلولی قائم ضریب زاویه‌ی مجانب‌ها برابر $\mp\frac{a}{b}$ است، پس $\frac{a}{b}=۲$. در نتیجه:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a}=\sqrt{۱+\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

C **۴۴- گزینه‌ی (۲)**

قبلاً دیدیم که اگر زاویه‌ی بین دو مجانب برابر α باشد، آن‌گاه:

$$\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{a}{c}=\frac{۱}{e}$$

در نتیجه:

$$e=\frac{۱}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۳}}=۲$$

B **۴۵- گزینه‌ی (۱)**

چون $F=(۲,۲)$ و $F'=(۱۰,۲)$ کانون‌های هذلولی هستند، پس نقطه‌ی $O=(۶,۲)$ مرکز هذلولی است و در این هذلولی $|FF'|=۸=۲c$.

چون $\frac{c}{a}=\frac{۴}{۳}$، پس $a=۳$. هم‌چنین نقاط F و F' روی یک خط افقی قرار دارند، پس هذلولی مورد نظر افقی است و لذا نقاط $A=(۹,۲)$ و $A'=(۳,۲)$ رأس‌های این هذلولی هستند.