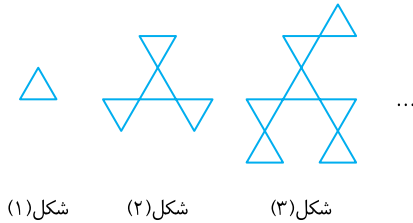


فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس سوم: الگو و دنباله

الگو



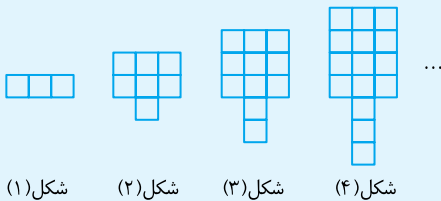
شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

به شکل‌های روبه‌رو توجه کنید: شکل (۱) با یک مثلث ساخته شده است. شکل (۲) با اضافه کردن سه مثلث به شکل (۱) ساخته شده است. به همین ترتیب، شکل (۳) با اضافه شدن سه مثلث دیگر به شکل (۲) ساخته شده است. پس می‌توان حدس زد

که در شکل n ام، $1+3(n-1)$ مثلث وجود دارد. در اصطلاح می‌گوییم شکل‌ها براساس یک الگو ساخته شده‌اند و اگر a_n تعداد مثلث‌های شکل n ام باشد، $a_n = 1+3(n-1)$ را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامیم. بنابراین $a_1 = 1$ ، $a_2 = 4$ ، $a_3 = 7$ و ... به ترتیب تعداد مثلث‌ها در شکل‌های اول، دوم، سوم و ... هستند.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

در الگوی مقابل در شکل بیستم چند مربع کوچک وجود دارد؟

۷۹ (۲)	۷۸ (۱)
۸۱ (۴)	۸۰ (۳)

تست ۱

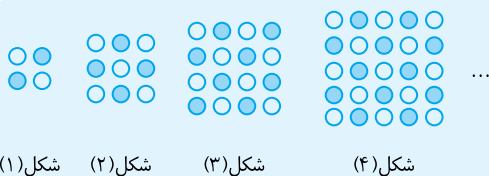
پاسخ: شکل اول از ۳ مربع کوچک تشکیل شده و هر شکل از اضافه کردن ۴ مربع کوچک به شکل قبلی ساخته می‌شود. یعنی اگر a_n تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام باشد، آنگاه

$$a_4 = 3 + 4 \times 3, \quad a_3 = 3 + 4 \times 2, \quad a_2 = 3 + 4 \times 1, \quad a_1 = 3$$

بنابراین

$$a_n = 3 + (n-1) \times 4$$

و در نتیجه شکل n ام، $4n-1$ مربع کوچک دارد. پس شکل بیستم از ۷۹ مربع کوچک تشکیل شده است.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

در الگوی مقابل در شکلی که ۷۲ دایره سفید دارد، چند دایره وجود دارد؟

۱۴۴ (۲)	۱۲۵ (۱)
۲۲۵ (۴)	۱۶۹ (۳)

تست ۲

پاسخ: به جدول زیر توجه کنید:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	...
تعداد دایره‌ها	۴	۹	۱۶	۲۵	...
تعداد دایره‌های سفید	۲	۵	۸	۱۳	...

در شکل n ام، $(n+1)^2$ دایره وجود دارد. اگر n فرد باشد، $\frac{(n+1)^2}{2}$ دایره‌ی سفید و اگر n زوج باشد،

$\frac{(n+1)^2+1}{2}$ دایره‌ی سفید وجود دارد. هیچ عددی طبیعی مانند n وجود ندارد که

$$\frac{(n+1)^2+1}{2} = 72$$

و اگر

$$\frac{(n+1)^2}{2} = 72$$

آن‌گاه $n=11$. بنابراین شکل ۱۱ ام است که ۷۲ دایره‌ی سفید دارد و در این شکل $(11+1)^2$ یعنی ۱۴۴ دایره وجود دارد.

الگوی خطی

الگوهایی که در آن‌ها اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی عدد ثابتی باشد، **الگوهای خطی** نامیده می‌شوند. در این الگوها جمله‌ی عمومی به شکل $t_n = an + b$ است.

در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهارم و شانزدهم به ترتیب برابر ۱۶ و ۲۸ هستند. جمله‌ی دوم این الگو کدام است؟

تست ۳

۱۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۰ (۴)

پاسخ: جمله‌ی عمومی الگو $t_n = an + b$ است، پس

$$\begin{cases} t_4 = 16 \\ t_{16} = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 16 \\ 16a + b = 28 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به دست می‌آید

$$a = 1, \quad b = 12$$

بنابراین




$$t_n = n + 12 \Rightarrow t_7 = 14$$

جمله‌ی عمومی هر الگویی لزوماً خطی نیست.

تذکر

مثلاً الگوهایی که جمله‌ی عمومی آن‌ها $t_n = n^2 + n$ یا $t_n = 2^n$ باشد، خطی نیستند.

در الگوی مقابل، چند مربع رنگی کوچک در شکل هجدهم وجود دارد؟

شکل (۱)	شکل (۲)	شکل (۳)	...	۳۶۰ (۲)	۳۶۱ (۱)
				۲۸۸ (۴)	۲۸۷ (۳)

تست ۴

پاسخ: شکل n ام از $(n+2)^2$ مربع کوچک تشکیل شده است که اگر n زوج باشد، $2(n+2)$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد، $2n+3$ مربع کوچک سفید در این شکل وجود دارد. بنابراین در شکل هجدهم، $(20)^2$ مربع کوچک وجود دارد که ۴۰ تا آن‌ها سفید هستند. پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

نکته



به کمک الگوی زیر می توان مجموع اعداد ۱ تا n را حساب کرد:
 در شکل n ام الگوی مقابل، $n(n+1)$ دایره وجود دارد که نصف آن ها رنگ شده اند. پس تعداد دایره های رنگ شده $\frac{n(n+1)}{2}$ است. از طرف دیگر، تعداد دایره های رنگی برابر $1+2+3+\dots+n$ است، پس

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تست ۵

حاصل $A = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{n}{n+1}$ (۲) $\frac{n+1}{n}$ (۳) $\frac{2n-1}{2n}$ (۴) $\frac{3n-2}{3n}$

پاسخ: ابتدا مجموع اعداد زوج را حساب می کنیم:

$$2+4+6+\dots+2n = 2(1+2+3+\dots+n) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

حالا مجموع اعداد فرد را به کمک مجموع فوق به دست می آوریم:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = (2-1) + (4-1) + (6-1) + \dots + (2n-1)$$

$$= 2+4+6+\dots+2n - \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n}$$

$$= n(n+1) - n = n^2$$

بنابراین

$$A = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

دنباله

ردیفی از عددها که دارای ترتیب باشند، **دنباله** نامیده می شود. عدد اول را جمله ی اول دنباله (a_1) ، عدد

دوم را جمله ی دوم دنباله (a_2) ، ... و عدد n ام را جمله ی n ام دنباله (a_n) می نامند. در دنباله ی

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

a_n را **جمله ی عمومی دنباله** می نامند.

تست ۶

در دنباله ای با جمله ی عمومی $a_n = n^2 + kn$ ، جمله ی دهم برابر صفر است. جمله ی هفتم کدام است؟

- (۱) -۲۱ (۲) -۲۳ (۳) -۱۹ (۴) -۱۷

پاسخ: چون $a_{10} = 0$ پس

$$100 + 10k = 0 \Rightarrow k = -10$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 - 10n$$

بنابراین

$$a_7 = 7^2 - 10 \times 7 = -21$$

تست ۷

اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که در هر دسته به تعداد دو برابر شماره‌ی آن دسته، عدد وجود داشته باشد. عدد اول دسته‌ی یازدهم کدام است؟		
دسته‌ی اول: $\{1, 2\}$		
دسته‌ی دوم: $\{3, 4, 5, 6\}$		
دسته‌ی سوم: $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	۱۰۳ (۲)	۱۰۱ (۱)
:	۱۱۳ (۴)	۱۱۱ (۳)

پاسخ: تعداد اعداد در ده دسته‌ی اول برابر است با

$$2+4+6+\dots+20=2(1+2+\dots+10)$$

$$=2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$$

پس اولین عدد دسته‌ی یازدهم، صد و یازدهمین عدد طبیعی است که همان ۱۱۱ است.

تست ۸

در یک دنباله، $a_1=4$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه‌ی $a_{n+1}=9-a_n$ برقرار است. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

- ۷۰ (۱) ۸۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

پاسخ: به چند جمله‌ی اول دنباله توجه کنید:

$$a_1=4, \quad a_2=9-4=5, \quad a_3=9-5=4, \quad a_4=9-4=5$$

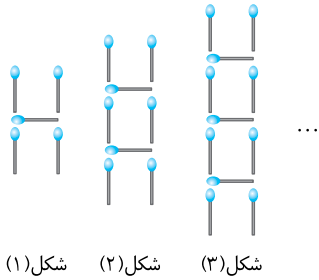
بنابراین جملات شماره‌ی فرد این دنباله برابر ۴ و جملات شماره‌ی زوج دنباله برابر ۵ هستند. در نتیجه مجموع هر دو جمله‌ی متوالی برابر ۹ است و مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله برابر ۹۰ می‌شود.

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل اول

درس سوم:
الگو و دنباله

۶۴- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل دهم الگوی زیر کدام است؟



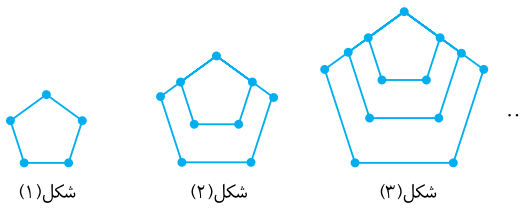
- (۱) ۳۰
(۲) ۳۲
(۳) ۳۴
(۴) ۳۶

۶۵- شکل‌های زیر به کمک تعدادی چوب کبریت درست شده‌اند. تعداد چوب کبریت‌ها در شکل n ام کدام است؟



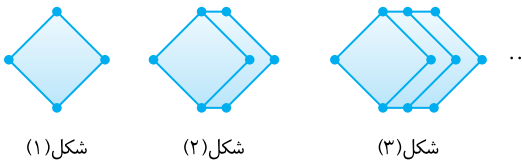
- (۱) $2n+1$
(۲) $n+2$
(۳) $3n$
(۴) $4n-1$

۶۶- تعداد نقاط رنگی روی شکل دهم از الگوی مقابل کدام است؟



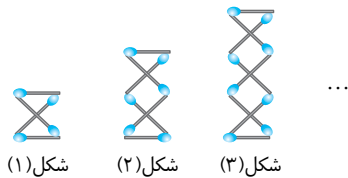
- (۱) ۴۰
(۲) ۴۱
(۳) ۵۰
(۴) ۵۱

۶۷- تعداد نقاط رنگی روی شکل n ام در الگوی زیر چندتا است؟



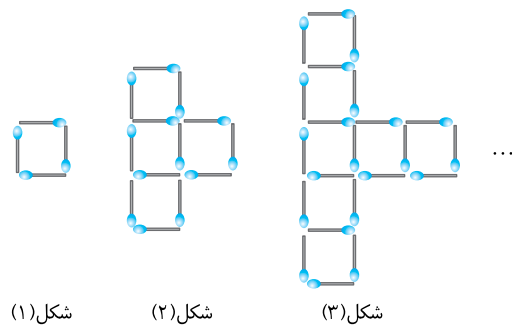
- (۱) $3n$
(۲) $3n+1$
(۳) $3n+2$
(۴) $3n+3$

۶۸- در الگوی زیر، در شکل ۲۱ ام چندتا چوب کبریت به کار رفته است؟

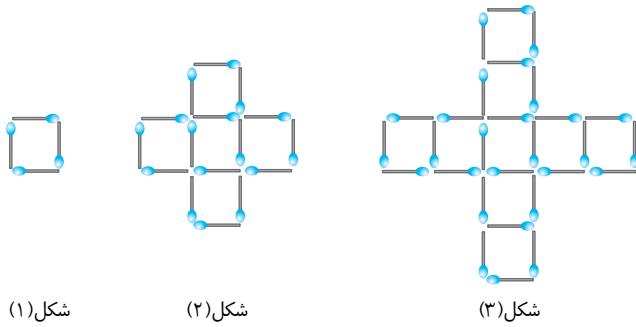


- (۱) ۴۲
(۲) ۴۴
(۳) ۴۶
(۴) ۴۰

۶۹- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل یازدهم در الگوی زیر چندتا است؟



- (۱) ۸۴
(۲) ۹۲
(۳) ۹۴
(۴) ۹۶



۷۰- در الگوی زیر، در کدام شکل تفاضل تعداد مربعها از تعداد چوب کبریتها برابر ۱۰۷ می شود؟

- ۸ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۴ (۴)

شکل (۱) شکل (۲)

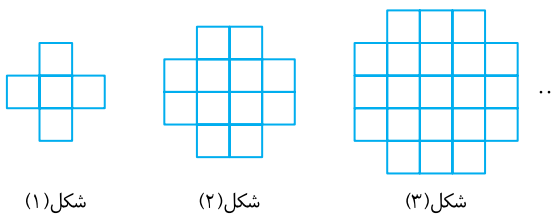
شکل (۳)



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

۷۱- در الگوی زیر، تعداد دایره های رنگ شده در شکل سیزدهم چندتا است؟

- ۹۸ (۱)
- ۹۹ (۲)
- ۱۱۲ (۳)
- ۱۱۳ (۴)



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۷۲- الگوی زیر از مربع های ۱×۱ ساخته شده است. مساحت شکل n ام کدام است؟

- n^2 (۱)
- $n^2 - 4$ (۲)
- $n^2 + 4n$ (۳)
- $(n+2)^2$ (۴)

۷۳- حاصل مجموع $2n + 4 + 6 + \dots + 2n$ کدام است؟

- $n^2 + n$ (۱)
- $n^2 + 2$ (۲)

- $2n^2 - n$ (۴)
- $2n^2$ (۳)

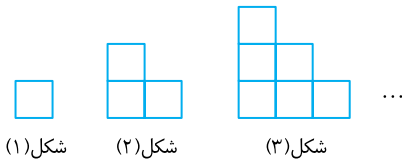
۷۴- حاصل مجموع $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ کدام است؟

- n^2 (۱)
- $2n^2 - 1$ (۲)

- $\frac{n^2 + n}{2}$ (۳)
- $\frac{n^2 + 1}{2}$ (۴)

۷۵- الگوی زیر از مربع های ۱×۱ تشکیل شده است. تعداد این مربعها در شکل یازدهم چندتا از تعداد آنها در شکل دهم بیش تر است؟

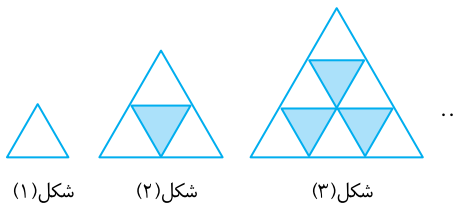
- ۹ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۱ (۳)
- ۱۲ (۴)



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۷۶- در الگوی زیر، شکل چندم شامل ۵۵ مثلث رنگ شده است؟

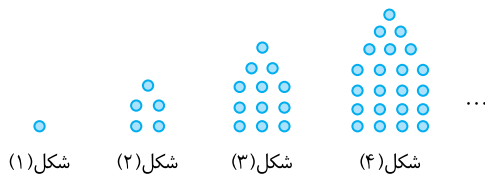
- ۹ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۱ (۳)
- ۱۲ (۴)



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۷۷- تعداد نقاط در شکل دهم از الگوی زیر چندتا است؟

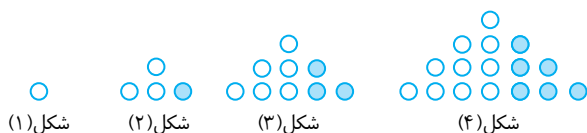
- ۱۴۵ (۱)
- ۱۵۰ (۲)
- ۱۵۵ (۳)
- ۱۶۰ (۴)



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

۷۸- در الگوی روبه رو، در چه شکلی نسبت تعداد گویهای رنگی به تعداد کل گویها برابر با $\frac{9}{19}$ است؟

- ۱۸ (۱)
- ۱۹ (۲)
- ۲۰ (۳)
- ۲۱ (۴)

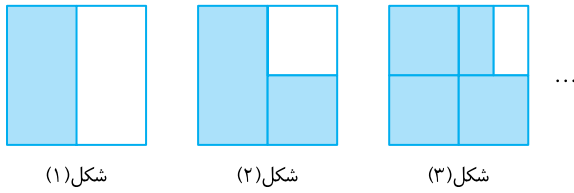


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

۷۹- مقدار عبارت $A = 1/0.1 + 1/0.2 + 1/0.3 + \dots + 1/99$ کدام است؟

- ۱۴۷ (۱) ۱۴۷/۵ (۲) ۱۴۸/۵ (۳) ۱۴۹ (۴)

۸۰- در الگوی مقابل، مساحت مربع بزرگ یک واحد است. مقدار مساحت رنگی اضافه شده در شکل n ام چقدر از مساحت رنگی اضافه شده در شکل قبلی آن کم تر است؟ ($n > 1$)

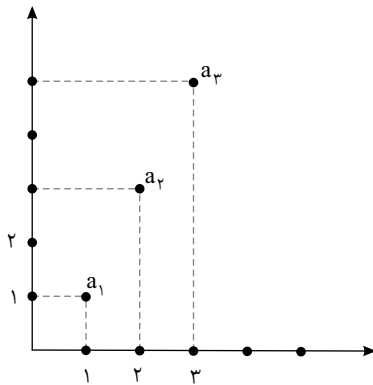


- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{2n}$ (۲)
 $\frac{1}{2^{n-1}}$ (۳) $\frac{1}{2^{n+1}}$ (۴)

۸۱- در یک الگوی خطی $t_7 = 4$ و $t_8 = -4$. مقدار t_9 کدام است؟

- $\frac{8}{3}$ (۱) $-\frac{8}{3}$ (۲) $-\frac{28}{3}$ (۳) $\frac{28}{3}$ (۴)

۸۲- شکل مقابل بخشی از نمودار یک الگوی خطی را نشان می‌دهد. اگر d تفاضل دو عضو متوالی این الگوی خطی باشد، حاصل $\frac{a_1}{d}$ چند است؟



- $\frac{1}{3}$ (۱)
 ۲ (۲)
 $\frac{1}{2}$ (۳)
 ۳ (۴)

۸۳- یک بالن در ارتفاع ۲۰ متری قرار دارد و یک ثانیه بعد در ارتفاع ۴۲ متری قرار می‌گیرد. اگر ارتفاع بالن الگویی خطی را تشکیل دهد، کدام گزینه ارتفاع بالن را n ثانیه پس از آغاز حرکت درست نشان می‌دهد؟

- $h_n = 24n - 4$ (۱) $h_n = 22n - 2$ (۲) $h_n = 20n + 2$ (۳) $h_n = 19n + 1$ (۴)

۸۴- اگر a_n جمله عمومی الگویی خطی با جمله‌های متمایز باشد، کدام گزینه برابر با جمله ۱۷ام نیست؟

- $5a_8 - 4a_7$ (۱) $\frac{a_9 + a_{25}}{2}$ (۲) $\frac{5a_{20} - a_{32}}{4}$ (۳) $\frac{5a_8 + a_{38}}{6}$ (۴)

۸۵- اگر $a_n = \begin{cases} 2n^2 - 1 & n = 0, 3, 6, \dots \\ 2n & n = 1, 4, 7, \dots \\ n - 3 & n = 2, 5, 8, \dots \end{cases}$ حاصل $a_8 + a_9 + a_{10}$ چند است؟

- ۲۱۶ (۱) ۱۹۱ (۲) ۱۸۶ (۳) ۲۱۲ (۴)

۸۶- جمله عمومی دنباله‌ی زیر کدام می‌تواند باشد؟

۱, ۳, ۷, ۱۳, ...

- $2n - 1$ (۱) $2^n - 1$ (۲) $2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}$ (۳) $n^2 - n + 1$ (۴)

۸۷- کدام یک نمی‌تواند جمله عمومی دنباله‌ی زیر باشد؟

۰, ۲, ۶, ...

- $n^2 - n$ (۱) $2n - 2$ (۲) $(n-1)(n^2 - 4n + 6)$ (۳) $(n-1)(n-4)(3-2n)$ (۴)

۸۸- کدام جمله از دنباله‌ی با جمله عمومی $a_n = \frac{n^2 + 1}{91n^2 + 9}$ برابر $\frac{1}{90}$ است؟

- a_9 (۱) a_8 (۲) a_9 (۳) a_{10} (۴)

- ۸۹- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = 2n - 5$ ، چند جمله‌ی منفی وجود دارد؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵
- ۹۰- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = 100n - n^2$ ، چند جمله‌ی مثبت وجود دارد؟
 (۱) ۱۰۰ (۲) ۹۹ (۳) ۹۰ (۴) ۸۹
- ۹۱- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{3n-1}{n+6}$ ، چند جمله‌ی کوچک‌تر از $\frac{2}{9}$ وجود دارد؟
 (۱) ۱۸۲ (۲) ۱۸۳ (۳) ۱۸۴ (۴) ۱۸۵
- ۹۲- اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که در هر دسته به تعداد شماره‌ی آن دسته، عدد متوالی وجود داشته باشد. عدد اول دسته‌ی بیستم کدام است؟
 $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, ...
 دسته‌ی سوم دسته‌ی دوم دسته‌ی اول
 (۱) ۱۹۰ (۲) ۱۹۱ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۰۱
- ۹۳- اعداد فرد طبیعی را طوری دسته‌بندی کرده‌ایم که در هر دسته به تعداد دو برابر شماره‌ی آن دسته عدد وجود دارد:
 $\{1, 3\}$, $\{5, 7, 9, 11\}$, $\{13, 15, 17, 19, 21, 23\}$, ...
 دسته‌ی سوم دسته‌ی دوم دسته‌ی اول
 عدد اول دسته‌ی سی و یکم کدام است؟
 (۱) ۱۸۵۹ (۲) ۱۸۶۱ (۳) ۱۸۶۳ (۴) ۱۸۶۵
- ۹۴- عددهای طبیعی فرد را به شکل زیر دسته‌بندی کرده‌ایم:
 (1) , $(3, 5)$, $(7, 9, 11)$, ...
 مجموع جملات اول و آخر دسته‌ی ۲۰ام کدام است؟
 (۱) ۱۲۱۹ (۲) ۸۰۰ (۳) ۸۰۲ (۴) ۷۹۸
- ۹۵- مجموع اعداد سه رقمی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر ۲ است، کدام است؟
 (۱) ۱۵۴۷۵۰ (۲) ۱۵۴۹۰۰ (۳) ۱۶۵۵۰ (۴) ۱۶۴۸۵۰
- ۹۶- دنباله‌ای از عدد ۷۷۷ شروع می‌شود و هر جمله‌ی بعدی، ۷ واحد از جمله‌ی قبل از آن کم‌تر است. چند جمله‌ی نخست این دنباله ۷۷۷، ۷۷۰، ۷۶۳، ... هستند. کدام عدد جمله‌ای از این دنباله است؟
 (۱) ۴۵ (۲) ۴۴ (۳) ۴۳ (۴) ۴۲
- ۹۷- در یک دنباله با جمله‌ی عمومی a_n ، $a_1 = 3$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه‌ی $a_{n+1}a_n = 2$ برقرار است. حاصل ضرب بیست و یک جمله‌ی اول دنباله کدام است؟
 (۱) ۱۰۲۴ (۲) ۳۰۷۲ (۳) ۱۵۳۶ (۴) ۶۱۴۴
- ۹۸- در یک دنباله با جمله‌ی عمومی a_n ، $a_1 = 3$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه‌ی $a_{n+1} = a_n + 2$ برقرار است. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟
 (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۱ (۳) ۱۲۲ (۴) ۱۲۳
- ۹۹- در یک دنباله با جمله‌ی عمومی a_n ، $a_1 = 1$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه‌ی $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ برقرار است. مقدار a_{100} کدام است؟
 (۱) ۹۹ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۰۱ (۴) ۱۰۲
- ۱۰۰- در یک دنباله با جمله‌ی عمومی a_n ، $a_1 = 1$ و به ازای هر $n \geq 2$ ،

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$
 جمله‌ی دهم دنباله کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{21}$ (۳) $\frac{11}{20}$ (۴) $\frac{10}{21}$