

## فصل اول: هندسه‌ی تحلیلی و جبر

### درس دوم: معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه‌ی دوم

#### روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2+bx+c=0$ ، به شرط این‌که  $\Delta=b^2-4ac \geq 0$ ، عبارت‌اند از

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

در این صورت، اگر مجموع ریشه‌ها را با  $S$  و حاصل ضرب ریشه‌ها را با  $P$  نشان دهیم، آن‌گاه

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

همچنین، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر می‌شود با

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

اگر عددهای غیرصفر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (a+1)x + 3b = 0$  باشند، مقدار  $a-b$  چقدر است؟

۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

تست ۱

پاسخ: چون حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (a+1)x + 3b = 0$  برابر با  $3b$  است، پس  $ab = 3b$ ، و

چون  $b \neq 0$ ، پس  $a = 3$ . از طرف دیگر، مجموع ریشه‌ها برابر  $a+1$  است، پس

$$a + b = a + 1 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین  $a - b = 2$ .

به ازای چند مقدار  $m$  معادله‌ی  $mx^2 - (m^3 - 4m)x - m + 5 = 0$  دو جواب دارد که قرینه‌ی یکدیگرند؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴) صفر

تست ۲

پاسخ: اولاً باید حاصل ضرب جواب‌های معادله منفی باشد:

$$\frac{-m+5}{m} < 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 5$$

ثانیاً باید مجموع جواب‌های معادله برابر صفر باشد:

$$\frac{m^3 - 4m}{m} = 0 \Rightarrow m^3 - 4m = 0$$

$$\Rightarrow m(m^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow m = -2, m = 0, m = 2$$

از مقدارهای فوق فقط  $m = -2$  قابل قبول است.

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 4\sqrt{2}x - 17 = 0$  باشند، مقدار  $|x_1 - x_2|$  چقدر است؟

تست ۳

- (۱) ۲      (۲) ۵      (۳) ۷      (۴) ۱۰

پاسخ: توجه کنید که  $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ، بنابراین

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{(-4\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-17)}}{1} = \sqrt{100} = 10$$

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $mx^2 - 2mx + 1 + m = 0$  باشند و  $2x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 = 8$  مقدار  $m$  چقدر است؟

تست ۴

- (۱) -۲      (۲) -۱      (۳)  $-\frac{1}{3}$       (۴)  $\frac{1}{3}$

پاسخ: توجه کنید که  $x_1 + x_2 = -\left(\frac{-2m}{m}\right) = 2$ . بنابراین  $x_2 = 2 - x_1$ . از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 = 8 &\Rightarrow 2x_1^2 + x_1(2 - x_1) - (2 - x_1)^2 = 8 \\ &\Rightarrow 2x_1^2 + 2x_1 - x_1^2 - 4 - x_1^2 + 4x_1 = 8 \\ &\Rightarrow 6x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 2 \end{aligned}$$

چون ریشه‌ی معادله است، پس ۲ در معادله صدق می‌کند:

$$m(2)^2 - 2m(2) + 1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$$

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (m+1)x - 8 = 0$  باشند و  $x_1 = x_2^2$  مقدار  $m$  چقدر است؟

تست ۵

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

پاسخ: توجه کنید که

$$\begin{cases} x_1x_2 = -8 \\ x_1 = x_2^2 \end{cases} \Rightarrow x_2^3 = -8 \Rightarrow x_2 = -2$$

چون ریشه‌ی معادله است، پس -۲ در معادله صدق می‌کند:

$$(-2)^2 - (m+1)(-2) - 8 = 0 \Rightarrow m = 1$$

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 2x - 4 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$  کدام است؟

تست ۶

- (۱) ۳      (۲) -۳      (۳) -۴      (۴) ۴

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -4$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} &= \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \\ &= \frac{2+2}{-4+2+1} = -4 \end{aligned}$$

تست ۷

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 7x + 4 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{7+\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{7+4\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $\frac{7+2\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}$

پاسخ: فرض می‌کنیم  $A = \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$ . در این صورت

$$A^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}}$$

چون  $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$  و  $x_1 x_2 = 2$ ، پس

$$A^2 = \frac{\frac{7}{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{7}{4} + \sqrt{2} = \frac{7+4\sqrt{2}}{4}$$

چون  $A > 0$ ، نتیجه می‌شود

$$A = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}$$

تست ۸

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 3 = 0$  باشند، مقدار  $x_1^2 + 5x_2 + 9$  چقدر است؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۵ (۳) ۲۱ (۴) ۳۱

پاسخ: چون  $x_1$  ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، پس

$$x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 5x_1 - 3$$

از طرف دیگر،

$$x_1 + x_2 = 5$$

بنابراین

$$x_1^2 + 5x_2 + 9 = 5x_1 - 3 + 5x_2 + 9 = 5(x_1 + x_2) + 6 = 5 \times 5 + 6 = 31$$

### تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر  $x_1$  و  $x_2$  عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - Sx + P = 0$  هستند، که در آن  $P = x_1 x_2$  و  $S = x_1 + x_2$ .

تست ۹

معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن  $2 - \sqrt{3}$  و  $2 + \sqrt{3}$  باشند، کدام است؟

(۱)  $x^2 - 4x + 1 = 0$  (۲)  $x^2 + 4x - 1 = 0$  (۳)  $x^2 - x - 4 = 0$  (۴)  $x^2 + x - 4 = 0$

پاسخ: فرض می‌کنیم  $x_1 = 2 - \sqrt{3}$  و  $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ . در این صورت

$$S = x_1 + x_2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$P = x_1 x_2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$$

$$= 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر  $x^2 - 4x + 1 = 0$  است.

## تست ۱۰

جواب‌های کدام معادله عکس و قرینه‌ی جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x - 5 = 0$  هستند؟  
 (۱)  $5x^2 - 3x - 1 = 0$  (۲)  $5x^2 + 3x - 1 = 0$  (۳)  $5x^2 + 3x - 2 = 0$  (۴)  $5x^2 - 3x - 2 = 0$

پاسخ: اگر جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x - 5 = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  بنامیم، جواب‌های معادله‌ی مورد نظر  $-\frac{1}{\alpha}$

و  $-\frac{1}{\beta}$  هستند. بنابراین

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = -5$$

$$S = \left(-\frac{1}{\alpha}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$P = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = -\frac{1}{5}$$

پس معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 1 = 0$$

## تست ۱۱

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (x_1 + 2)x + 3x_2 = 0$  باشند، معادله‌ای که ریشه‌هایش  $x_1 + 1$  و  $x_2 + 1$  هستند کدام است؟

(۱)  $x^2 - 3x + 6 = 0$  (۲)  $x^2 + 5x + 6 = 0$  (۳)  $x^2 + 7x + 12 = 0$  (۴)  $x^2 - 7x + 12 = 0$

پاسخ: توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = x_1 + 2 \Rightarrow x_2 = 2, \quad x_1 x_2 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = 3$$

بنابراین ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر برابرند با

$$x_1 + 1 = 3 + 1 = 4, \quad x_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

مجموع این ریشه‌ها ۷ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲ است، پس معادله‌ی مورد نظر  $x^2 - 7x + 12 = 0$  است.

## صفرهای تابع

اگر  $f$  تابع باشد، جواب‌های معادله‌ی  $f(x) = 0$  را **صفرهای تابع**  $f$  می‌نامند. صفرهای تابع  $f$  طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع با محور  $x$  هستند.

اگر  $x_1$  و  $x_2$  صفرهای تابع درجه‌ی دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشند، آن‌گاه

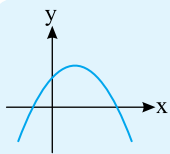
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

## تست ۱۲

نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در شکل مقابل رسم شده است. اگر  $S$  مجموع صفرهای تابع  $f$  باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱)  $S > 0$  و  $c > 0$  (۲)  $S < 0$  و  $c < 0$

(۳)  $S > 0$  و  $c < 0$  (۴)  $S < 0$  و  $c > 0$



پاسخ: از روی شکل معلوم می‌شود که عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با محور  $y$  مثبت است. در نتیجه  $c > 0$ . همچنین

$$S = -\frac{b}{a} = \text{مجموع صفرها}$$

چون طول رأس سهمی برابر  $-\frac{b}{2a}$  و عددی مثبت است، پس  $S = -\frac{b}{a} > 0$ .

## نکته

اگر  $x = \alpha$  یکی از صفرهای تابع چندجمله‌ای  $f(x)$  باشد، آن‌گاه  $x - \alpha$  یکی از عامل‌های  $f(x)$  است، و اگر  $f(x)$  را بر  $x - \alpha$  تقسیم کنیم، عامل دیگری برای  $f(x)$  به دست می‌آید.

## تست ۱۳

اگر  $x = 2$  یکی از صفرهای تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$  باشد، مجموع مربع‌های ریشه‌های دیگر تابع چقدر است؟

۱۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: با توجه به فرض می‌دانیم که  $f(2) = 0$ ، پس

$$f(2) = 8 + 4a + 2 + 6 = 0 \Rightarrow a = -4$$

چون  $x - 2$  عاملی از  $x^3 - 4x^2 + x + 6$  است، پس

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)Q(x)$$

برای به دست آوردن  $Q(x)$  چندجمله‌ای  $x^3 - 4x^2 + x + 6$  را بر  $x - 2$  تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود

$$Q(x) = x^2 - 2x - 3$$

بنابراین

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3) = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

پس به غیر از  $x = 2$  صفرهای دیگر تابع  $-1$  و  $3$  هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها  $10$  است.

## رابطه‌ی بین ضرایب و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  را در نظر بگیرید و فرض کنید  $\Delta \geq 0$ .

• اگر  $\frac{c}{a} < 0$ ، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. در این صورت، اگر  $-\frac{b}{a} > 0$ ، آن‌گاه

قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت کوچک‌تر است. اگر  $-\frac{b}{a} < 0$ ، آن‌گاه قدرمطلق ریشه‌ی منفی از

ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است.

• اگر  $\frac{c}{a} > 0$ ، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی هم‌علامت دارد. در این صورت، اگر  $-\frac{b}{a} > 0$ ، آن‌گاه هر دو ریشه

مثبت‌اند. اگر  $-\frac{b}{a} < 0$ ، آن‌گاه هر دو ریشه منفی‌اند.

## تست ۱۴

به ازای چند عدد صحیح مانند  $m$  معادله‌ی  $x^2 + (m - 4)x + 2m + 4 = 0$  دو ریشه‌ی مثبت دارد؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

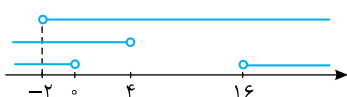
۱ (صفر)

پاسخ: برای این‌که معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد، باید

$$\Delta > 0 : (m - 4)^2 - 4(2m + 4) > 0 \Rightarrow m^2 - 16m > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 16$$

$$\frac{c}{a} > 0 : 2m + 4 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$-\frac{b}{a} > 0 : 4 - m > 0 \Rightarrow m < 4$$



با توجه به محور روبه‌رو، اشتراک سه جواب به دست آمده،  $-2 < m < 4$  را مشخص می‌کند که شامل یک عدد صحیح است.

به ازای چند عدد صحیح مانند  $m$  معادله  $4x^2 - mx + m^2 - 6 = 0$  دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد؟

تست ۱۵

- ۵ (۱)      ۴ (۲)      ۳ (۳)      ۲ (۴)

پاسخ: وقتی  $\frac{c}{a} < 0$ ، معادله دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد. توجه کنید که در این حالت حتماً  $\Delta > 0$ :

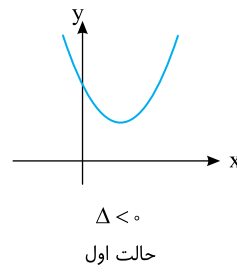
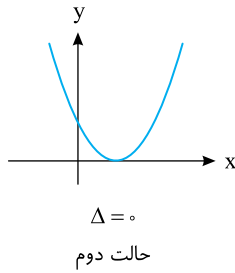
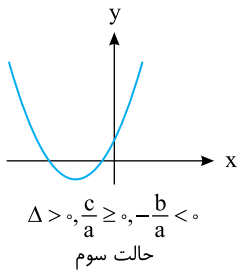
$$\frac{c}{a} = \frac{m^2 - 6}{4} < 0 \Rightarrow m^2 < 6 \Rightarrow -\sqrt{6} < m < \sqrt{6} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$$

نمودار تابع  $y = x^2 + ax + 4 - a^2$  به ازای کدام مقادیر  $a$  از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد؟

تست ۱۶

- ۱ (۱)  $\frac{4}{\sqrt{5}} < a \leq 2$       ۲ (۲)  $-2 \leq a \leq 2$       ۳ (۳)  $-\frac{4}{\sqrt{5}} \leq a \leq 2$       ۴ (۴)  $-2 \leq a < \frac{4}{\sqrt{5}}$

پاسخ: نمودار تابع در سه حالت زیر از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد:



بنابراین  $\Delta$  را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = a^2 - 4(4 - a^2) = 5a^2 - 16$$

اکنون توجه کنید که

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 5a^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq a \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{حالت سوم: } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 5a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a < -\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ یا } a > \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow 4 - a^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 2 \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow a > 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{بازه‌های به دست آمده}]{\text{اشتراک‌گیری از}} \frac{4}{\sqrt{5}} < a \leq 2$$

اجتماع محدوده‌های به دست آمده در حالت‌های اول، دوم و سوم برابر است با  $-\frac{4}{\sqrt{5}} \leq a \leq 2$ .

### معادله‌هایی که به معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شوند

برخی معادله‌ها را می‌توان با تغییر متغیر به معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل و حل کرد.

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$  کدام است؟

تست ۱۷

- ۴ (۱)      -۲ (۲)      ۲ (۳)      ۴ (۴)

پاسخ: فرض می‌کنیم  $x^2 + x = t$ . در این صورت

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t - 6)(t - 12) = 0$$

$$\begin{cases} t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -1 \\ t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

تست ۱۸

به ازای کدام مقادیرهای  $k$  معادله‌ی  $x^2 - kx^2 + \frac{3-2k}{4} = 0$  دو ریشه دارد؟

- (۱)  $k \geq \frac{3}{2}$  (۲)  $k > \frac{3}{2}$  (۳)  $k > \frac{3}{2}$  یا  $k = 1$  (۴)  $k < \frac{3}{2}$  یا  $k = 1$

پاسخ: اگر فرض کنیم  $x^2 = t$ ، به معادله‌ی زیر می‌رسیم.

$$t^2 - kt + \frac{3-2k}{4} = 0$$

اگر این معادله یک ریشه‌ی مضاعف مثبت مانند  $t_1$  داشته باشد، معادله‌ی اصلی دو ریشه به صورت  $x = \pm\sqrt{t_1}$  دارد:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ t_1 = -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - (3-2k) = 0 \\ \frac{k}{2} > 0 \Rightarrow k > 0 \end{cases} \Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = -3 \text{ (غ.ق.)}, k = 1$$

همچنین اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد، ریشه‌ی منفی قابل قبول نیست، چون  $x^2$  نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادله‌ی اصلی دو ریشه به صورت  $x = \pm\sqrt{t}$  دارد، پس

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{3-2k}{4} < 0 \Rightarrow 3-2k < 0 \Rightarrow k > \frac{3}{2}$$

بنابراین  $k > \frac{3}{2}$  یا  $k = 1$  جواب مسئله است.

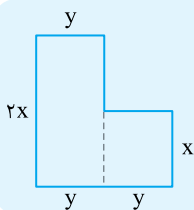
### ماکسیمم و مینیمم تابع درجه‌ی دوم

بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دوم  $y = ax^2 + bx + c$  به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست می‌آید و

برابر با  $-\frac{\Delta}{4a}$  است.

تست ۱۹

با طنابی به طول ۴۰ متر زمینی به شکل مقابل را محصور کرده‌ایم. بیش‌ترین مساحت محصور شده‌ی ممکن کدام است؟



۷۵ (۲)

۵۰ (۱)

۱۲۵ (۴)

۱۰۰ (۳)

پاسخ: محیط شکل برابر است با

$$4x + 4y = 40 \Rightarrow y = 10 - x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S = 2xy + xy = 3xy$$

$$= 3x(10 - x)$$

$$= -3x^2 + 30x$$

بیش‌ترین مقدار این عبارت درجه‌ی دوم برابر  $-\frac{\Delta}{4a}$  است:

$$S_{\max} = -\frac{900}{4(-3)} = 75$$

بیشترین مساحت مربوط به یک مثلث قائم‌الزاویه با وتری به طول ۳ واحد چقدر است؟

$$\frac{3}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: اگر طول ضلع‌های قائمه‌ی مثلث را  $a$  و  $b$  فرض کنیم، مساحت مثلث از رابطه‌ی  $S = \frac{ab}{2}$  به دست می‌آید که بین  $a$  و  $b$  رابطه‌ی  $a^2 + b^2 = 9$  برقرار است. ابتدا، بیشترین مقدار  $S^2$  را به دست می‌آوریم. برای این کار،  $S^2$  را برحسب یک متغیر می‌نویسیم:

$$b^2 = 9 - a^2 \Rightarrow S^2 = \frac{a^2 b^2}{4} = \frac{a^2(9 - a^2)}{4} = \frac{-(a^2)^2 + 9a^2}{4}$$

حاصل  $S^2$  به صورت یک عبارت درجه‌ی دوم برحسب  $a^2$  است که بیشترین مقدار آن به ازای  $a^2 = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$  به دست می‌آید. بنابراین بیشترین مقدار  $S^2$  برابر است با

$$S_{\max}^2 = \frac{-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{9}{2}\right)}{4} = \frac{81}{16}$$

در نتیجه  $S_{\max} = \frac{9}{4}$ .



## پرسش‌های چهار گزینه‌ای

### فصل اول

درس دوم:

معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه‌ی دوم

- ۷۴- اگر عددهای غیر صفر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + ax + b = 0$  باشند، مقدار  $b$  چقدر است؟
- (۱) -۲      (۲) -۱      (۳) ۱      (۴) ۲
- ۷۵- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (x_1 x_2)x - \frac{1}{6} = 0$  باشند و  $x_1 > x_2$ ، مقدار  $\frac{x_1}{x_2}$  چقدر است؟
- (۱)  $-\frac{3}{2}$       (۲)  $-\frac{2}{3}$       (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴) -۱
- ۷۶- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3mx + 6m + 1 = 0$  باشند، کدام تساوی درست است؟
- (۱)  $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 1$       (۲)  $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 1$       (۳)  $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$       (۴)  $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$
- ۷۷- اگر مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی  $mx^2 - nx + 12 = 0$  به صورت  $\left\{-\frac{n}{1+n}, \frac{n}{1-n}\right\}$  باشد، مقدار  $n$  چقدر است؟
- (۱) ۲۴      (۲) -۲۴      (۳) ۱۲      (۴) -۱۲
- ۷۸- اگر  $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 1}}$  و  $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + bx + 2 = 0$  باشند، مقدار  $b$  چقدر است؟
- (۱)  $\pm\sqrt{3}$       (۲)  $\pm 2\sqrt{3}$       (۳)  $\pm 3\sqrt{2}$       (۴)  $\pm\sqrt{2}$
- ۷۹- نوید ضرب  $x$  در معادله‌ی  $x^2 + 13x + k = 0$  را به اشتباه ۱۷ دید و وقتی معادله را حل کرد ریشه‌هایش ۲- و ۱۵- شدند. ریشه‌های معادله‌ی اصلی چه عددهایی هستند؟
- (۱) -۶ و -۷      (۲) -۵ و -۸      (۳) -۴ و -۹      (۴) -۳ و -۱۰
- ۸۰- از هر یک از جواب‌های معادله‌ی  $x^2 + 2x = 6$ ، دو واحد کم می‌کنیم. حاصل ضرب آن‌ها به اندازه‌ی ..... واحد تغییر می‌کند.
- (۱) -۸      (۲) ۸      (۳) ۶      (۴) -۶
- ۸۱- در معادله‌ی  $2x^2 - mx + m - 1 = 0$  یکی از جواب‌ها عکس و قرینه‌ی جواب دیگر است. مقدار  $m$  کدام است؟
- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) -۱      (۴) -۲
- ۸۲- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + (k-1)x + 8 = 0$  باشند و  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{4}$ ، مقدار  $k$  چقدر است؟
- (۱) -۵      (۲) -۶      (۳) -۷      (۴) -۸
- ۸۳- در معادله‌ی  $x^2 - 8x + m = 0$  اگر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیش‌تر باشد، مقدار  $m$  کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۱)
- (۱) ۱۰      (۲) ۱۲      (۳) ۱۴      (۴) ۱۵
- ۸۴- در معادله‌ی  $2x^2 - 4x + m = 0$  یکی از جواب‌ها از سه برابر جواب دیگر سه واحد بیش‌تر است. مقدار  $m$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{9}{8}$       (۲)  $\frac{9}{8}$       (۳)  $\frac{9}{16}$       (۴)  $-\frac{9}{16}$
- ۸۵- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + (m+1)x + 2 = 0$  باشند و  $3(x_1 + x_2) - 5x_1 x_2 = -19$ ، مقدار  $m$  چقدر است؟
- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

- ۸۶- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - x + 2k - 4 = 0$  باشند و  $x_1^2 - x_2^2 = 5$ ، مقدار  $k$  چقدر است؟  
 (۱) ۳- (۲) ۲- (۳) ۱- (۴) ۱
- ۸۷- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - kx + k - 1 = 0$  باشند و  $\alpha + 2\beta = 5$ ، مجموع مقدارهای ممکن برای  $k$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۸۸- در معادله‌ی  $x^2 - mx - 8 = 0$  یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر است. مقدار  $m$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۲- (۴) ۱-
- ۸۹- در معادله‌ی  $x^2 - mx - m = 0$  یکی از جواب‌ها قرینه‌ی مربع جواب دیگر است. مقدار  $\sqrt[3]{m}$  کدام است؟ ( $m > 0$ )  
 (۱)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  (۳)  $\sqrt{2}-1$  (۴)  $\sqrt{2}+1$
- ۹۰- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - mx + 64 = 0$  مکعب ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار  $m$  کدام می‌تواند باشد؟  
 (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳)  $16\sqrt{2}$  (۴)  $18\sqrt{2}$
- ۹۱- اگر عددهای متمایز  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $mx^2 - 2x - 20 = 0$  باشند و  $x_1 + x_2 = x_1 + x_2$ ، مقدار  $m$  چقدر است؟  
 (۱) ۲- (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۱-
- ۹۲- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3kx + 9 = 0$  باشند و  $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 3$ ، مقدار  $k$  چقدر است؟  
 (۱) ۱- (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵
- ۹۳- به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$  برابر ۲ است؟ (ریاضی - ۹۶)  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۹۴- به ازای کدام مقدار  $m$ ، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $8x^2 - mx - 8 = 0$  توان سوم ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - x - 2 = 0$  است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۶)  
 (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵
- ۹۵- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 2x + k + 1 = 0$  باشند و  $x_1^3 + x_2^3 = 5$ ، مقدار  $k$  چقدر است؟  
 (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$
- ۹۶- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + 4x - 5k - 3 = 0$  باشند و  $x_1^2 + 5x_1 + x_2 = 19$ ، مقدار  $k$  چقدر است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۹۷- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (k-2)x + 8 = 0$  باشند و  $x_1^2 + x_2^2 = 20$ ، چه عددی می‌تواند باشد؟  
 (۱) ۴- و ۸- (۲) ۴ و ۸ (۳) ۴- و ۶ (۴) ۴- و ۸
- ۹۸-  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3mx + m - 3 = 0$  هستند و  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 4$ . حدود  $m$  کدام است؟  
 (۱)  $(0, 12)$  (۲)  $(-\infty, 12)$  (۳)  $(3, 12)$  (۴)  $(12, +\infty)$
- ۹۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های متمایز معادله‌ی  $x^2 + 2x + k = 0$  باشند و  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{2}{k}$ ، حدود  $k$  کدام است؟  
 (۱)  $k \in (1, +\infty)$  (۲)  $k \in (-\infty, 1)$  (۳)  $k \in (-\infty, 1) - \{0\}$  (۴)  $k \in \mathbb{R}$
- ۱۰۰- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (3m+1)x + 3 = 0$  باشند،  $x_1 = 3x_2$  و  $m$  عددی مثبت باشد، مقدار  $m$  چقدر است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۰۱- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 6x + k + 3 = 0$  باشند و  $3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 12$ ، مقدار  $k$  چقدر است؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۵-

- ۱۰۲- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - (m+1)x + m = 0$  باشند و  $2\alpha + 3\beta = \alpha\beta$ ، مجموع مقادیرهای ممکن برای  $m$  کدام است؟
- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۱۰۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  باشند و  $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = 2$ ، مقدار  $m$  کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۰۴- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + 5x + 3 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}$  چقدر است؟
- (۱)  $\frac{5}{26}$  (۲)  $-\frac{4}{25}$  (۳)  $\frac{3}{25}$  (۴)  $-\frac{3}{25}$
- ۱۰۵- در معادله‌ی  $x^2 - 7x + 1 = 0$  قدرمطلق تفاضل جواب‌ها کدام است؟
- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $3\sqrt{5}$  (۳)  $\sqrt{53}$  (۴)  $\sqrt{47}$
- ۱۰۶- درباره‌ی معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  می‌دانیم  $\Delta = 5$ . اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های این معادله باشند، حاصل  $4a^2(x_1 - x_2)^2$  کدام است؟
- (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰
- ۱۰۷- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x - 5 = 0$  باشند، حاصل  $x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2)$  کدام است؟
- (۱) -۸ (۲) -۲ (۳) -۱۶ (۴) -۴
- ۱۰۸- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 6x + 3 = 0$  باشند، مقدار  $x_1^2 + x_2^2$  چقدر است؟
- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵
- ۱۰۹- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 8x - 13 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2}$  چقدر است؟
- (۱)  $\frac{4}{25}$  (۲)  $\frac{2}{25}$  (۳)  $-\frac{4}{25}$  (۴)  $-\frac{2}{25}$
- ۱۱۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 5x - 2 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$
- ۱۱۱- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 5x + 2 = 0$  باشند، حاصل  $(\alpha + \frac{2}{\beta})^2 + (\beta + \frac{2}{\alpha})^2$  کدام است؟
- (۱) ۲۰ (۲) ۳۲ (۳) ۴۴ (۴) ۸۴
- ۱۱۲- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 4x - 4 = 0$  باشند، مقدار  $x_1^3 + x_2^3$  چقدر است؟
- (۱) ۱۱۲ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۲۱ (۴) ۱۲۴
- ۱۱۳- عددهای ۲ و ۴ به ترتیب ریشه‌ای از معادله‌های  $x^2 - ax + b = 0$  و  $x^2 - cx + d = 0$  هستند و ریشه‌ی دیگر این دو معادله مشترک است. مقدار  $a - c + \frac{b}{d}$  چقدر است؟
- (۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $-\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{4}$
- ۱۱۴- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 12x + 9 = 0$  باشند، مقدار  $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$  چقدر است؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
- ۱۱۵- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 4x - 1 = 0$  باشند و  $\alpha < \beta$ ، مقدار  $\alpha^2 - \beta^2$  کدام است؟
- (۱)  $-8\sqrt{5}$  (۲)  $8\sqrt{5}$  (۳)  $4\sqrt{5}$  (۴)  $-4\sqrt{5}$

۱۱۶- اگر  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - (m-3)x + 2m - 1 = 0$  باشند، مقدار  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۷- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}$  چقدر است؟

- (۱)  $\sqrt{5}$  (۲)  $2\sqrt{5}$  (۳)  $3\sqrt{5}$  (۴)  $4\sqrt{5}$

۱۱۸- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 4x - 1 = 0$  باشند، مقدار  $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$  چقدر است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 5x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $\alpha^2 + \frac{2}{\beta} + 3\beta^2$  کدام است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۶۹ (۳) ۴۶ (۴) ۵۱

۱۲۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $3x^2 - 4x - 1 = 0$  باشند، مقدار  $10\alpha^2 + (3\alpha - 4)^2 + \beta^2$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{100}{9}$  (۲)  $\frac{110}{9}$  (۳)  $\frac{130}{9}$  (۴)  $\frac{220}{9}$

۱۲۱- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$  باشند و  $\alpha < \beta$ ، مقدار  $2\alpha + 4\beta$  کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{5} - 1$  (۲)  $3\sqrt{5} + 1$  (۳)  $\sqrt{5} + 3$  (۴)  $\sqrt{5} - 1$

۱۲۲- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  باشند، مقدار  $4\alpha^2 + 6\beta(1 + \alpha)$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۲۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 2x - 1 = 0$  باشند، مقدار  $\alpha^3 + 5\beta$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۱۲۴- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x - 1 = 0$  باشند، مقدار  $\alpha^4 + 33\beta$  کدام است؟

- (۱) ۹۹ (۲) ۱۰۹ (۳) ۱۱۱ (۴) ۱۱۹

۱۲۵- کدام گزینه درباره‌ی بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع  $f(x) = -x^2 + 6x - 4$  درست است؟

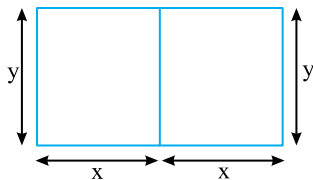
- (۱) بیش‌ترین مقدار آن ۵ است.  
 (۲) کم‌ترین مقدار آن ۵ است.  
 (۳) بیش‌ترین مقدار آن -۴ است.  
 (۴) کم‌ترین مقدار آن -۳۱ است.

۱۲۶- اگر حداقل مقدار عبارت  $4x^2 + ax + 13$  برابر با ۹ باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\pm 4$  (۲)  $\pm 2$  (۳)  $\pm 8$  (۴)  $\pm 6$

۱۲۷- یک ماهی‌گیر می‌خواهد کنار رودخانه‌ای، محوطه‌ای مستطیل‌شکل را حصار بکشد. اگر طول حصار ۱۰۰m باشد، ابعاد مستطیل چه باشد تا مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟

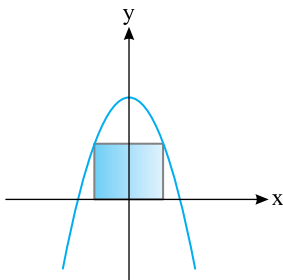
- (۱)  $30 \times 40$  (۲)  $25 \times 37.5$  (۳)  $12.5 \times 75$  (۴)  $25 \times 50$



۱۲۸- مطابق شکل با ۲۰۰m نرده‌ی چوبی، اصطبل درست کرده‌ایم. حداکثر مقدار مساحت این اصطبل چقدر است؟

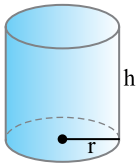
- (۱) ۵۰۰ (۲) ۱۰۰۰ (۳)  $\frac{5000}{3}$  (۴)  $\frac{10000}{3}$

۱۲۹- در شکل مقابل دو رأس مستطیل روی محور  $x$  و دو رأس دیگر روی سهمی  $y = 4 - x^2$  است.



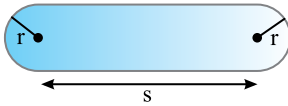
بیش‌ترین مقدار محیط مستطیل چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)  $6\sqrt{3}$



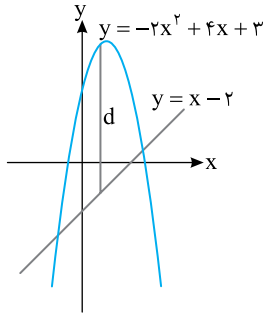
۱۳۰- اگر مجموع طول قطر قاعده و ارتفاع یک استوانه‌ی قائم برابر ۳۰ باشد، ارتفاع استوانه چه باشد تا مساحت جانبی استوانه بیش‌ترین مقدار ممکن شود؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲/۵



۱۳۱- در شکل مقابل، محیط زمین برابر با ۱۸۰۰m است. اگر مساحت زمین حداکثر مقدار ممکن باشد، مقدار r چقدر است؟ ( $\pi \approx 3$ )

- (۱) ۲۷۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۳۳۰ (۴) ۳۵۰



۱۳۲- در شکل مقابل، حداکثر مقدار فاصله‌ی عمودی، d، میان خط و سهمی چقدر است؟

- (۱) ۴/۸ (۲) ۱/۴ (۳) ۴ (۴) ۳/۸

۱۳۳- مفتولی به طول ۲ متر را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و با یکی مربع و با دیگری دایره درست می‌کنیم. اگر مجموع مساحت مربع و دایره کم‌ترین مقدار ممکن باشد، نسبت طول قطعه‌ی بزرگ‌تر به طول قطعه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

- (۱)  $\pi$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

۱۳۴- به ازای چه مقداری از a مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (a-2)x - a + 1 = 0$  کم‌ترین مقدار ممکن است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) ۱

۱۳۵- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $\sqrt{2}x^2(x-a)x = \sqrt{2}$  باشند، کم‌ترین مقدار  $x_1^4 + x_2^4$  کدام است؟

- (۱)  $2 + \sqrt{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + 4$  (۳)  $2\sqrt{2} + 1$  (۴)  $2 + 2\sqrt{2}$

۱۳۶- معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن  $a + \sqrt{a^2 + 1}$  و  $a - \sqrt{a^2 + 1}$  باشند، کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 2ax - 1 = 0$  (۲)  $x^2 - 2ax + 1 = 0$  (۳)  $x^2 + 2ax - 1 = 0$  (۴)  $x^2 + 2ax + 1 = 0$

۱۳۷- واسطه‌ی حسابی ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $3/5$  و واسطه‌ی هندسی ریشه‌های آن  $2/5$  است. این معادله کدام است؟

- (۱)  $4x^2 - 28x + 25 = 0$  (۲)  $4x^2 + 28x + 25 = 0$  (۳)  $x^2 - 14x + 25 = 0$  (۴)  $x^2 + 14x + 25 = 0$

۱۳۸- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، ریشه‌های معادله‌ی  $cx^2 - bx + a = 0$  کدام هستند؟

- (۱)  $\frac{1}{\beta}$  و  $\frac{1}{\alpha}$  (۲)  $-\frac{1}{\beta}$  و  $\frac{1}{\alpha}$  (۳)  $\frac{1}{\beta}$  و  $\alpha$  (۴)  $-\frac{1}{\beta}$  و  $-\frac{1}{\alpha}$

۱۳۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله به صورت  $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$  است؟

(ریاضی - ۹۲)

- (۱)  $4x^2 - 5x + 1 = 0$  (۲)  $4x^2 - 3x + 1 = 0$  (۳)  $4x^2 - 5x - 1 = 0$  (۴)  $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۱۴۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 + x - 1 = 0$  باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن  $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}$  و  $\beta^2 + \frac{1}{\alpha}$  باشند، کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 4x - 1 = 0$  (۲)  $x^2 + 4x + 1 = 0$  (۳)  $x^2 - 3x - 1 = 0$  (۴)  $x^2 + 3x - 1 = 0$

۱۴۱- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 - 6x - 4 = 0$  باشند، معادله‌ی که ریشه‌هایش  $x_1^2 + x_2^2$  و  $x_1^2 + x_2^2$  باشند، کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 4x + 16 = 0$  (۲)  $3x^2 - 12x + 16 = 0$  (۳)  $x^2 - 12x + 16 = 0$  (۴)  $3x^2 - 12x - 16 = 0$

۱۴۲- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - x - 3 = 0$  باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن  $(\alpha - \beta)^2$  و  $(\alpha + \beta)^2$  باشند، کدام است؟

(۱)  $x^2 + 14x - 13 = 0$  (۲)  $x^2 - 14x + 13 = 0$  (۳)  $x^2 - 13x - 14 = 0$  (۴)  $x^2 + 13x - 14 = 0$

۱۴۳- اگر ریشه‌های معادله‌ی  $9x^2 + ax + b = 0$  از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 3x + 9 = 0$ ،  $\frac{b}{a}$  واحد کم‌تر باشند، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۳۱ (۳) ۴۲ (۴) ۱۷

۱۴۴- جواب‌های کدام معادله مکعب جواب‌های معادله‌ی  $x^3 - 3x - 5 = 0$  هستند؟

(۱)  $x^3 - 72x - 125 = 0$  (۲)  $x^3 - 25x - 27 = 0$  (۳)  $x^3 - 18x - 125 = 0$  (۴)  $x^3 - 18x - 27 = 0$

۱۴۵- اگر  $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -1$  و  $x_1 + x_2 - x_1x_2 = -11$ ، معادله‌ای که ریشه‌هایش  $x_1$  و  $x_2$  هستند کدام است؟

(۱)  $x^2 + 6x - 5 = 0$  (۲)  $x^2 - 6x - 5 = 0$  (۳)  $x^2 + 6x + 5 = 0$  (۴)  $x^2 - 12x + 6 = 0$

۱۴۶- اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 3mx + 20 = 0$  دو واحد از یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (m+2)x + n = 0$  بیش‌تر باشد،

مقدار  $m$  چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۴۷- هر یک از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + mx + n = 0$  یک واحد از ریشه‌های از معادله‌ی  $mx^2 + 3x - 1 = 0$  بیش‌تر است. اگر  $m$  مثبت باشد،

مقدار  $n$  چقدر است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۴۸- چند عدد مانند  $k$  می‌توان پیدا کرد که معادله‌ی  $x^2 - 3x + k = 0$  دو ریشه‌ی مختلف در بازه‌ی  $(0, 1)$  داشته باشد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نامتناهی

۱۴۹- اگر ریشه‌های معادله‌ی  $ax^2 + 2ax + 3a - 1 = 0$  هم‌علامت نباشند، حدود  $a$  کدام است؟

(۱)  $0 < a < \frac{1}{2}$  (۲)  $0 < a < \frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$  (۴)  $a > \frac{1}{3}$

۱۵۰- اگر معادله‌ی  $4ax^2 - 4(a+2)x + 9 = 0$  دو ریشه‌ی حقیقی مثبت داشته باشد، حدود  $a$  کدام است؟

(۱)  $(4, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$  (۳)  $(-\infty, -1)$  (۴)  $(0, 1) \cup (4, +\infty)$

۱۵۱- اگر معادله‌ی  $2x^2 + mx + m - 2 = 0$  دو جواب منفی داشته باشد، حدود  $m$  کدام است؟

(۱)  $m \in (2, +\infty) - \{4\}$  (۲)  $m \in (2, +\infty)$  (۳)  $m \in (2, 4)$  (۴)  $m \in (0, 4)$

۱۵۲-  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - (m+1)x + m = 0$  هستند و  $0 < x_1 < 2 < x_2$ . حدود  $m$  کدام است؟

(۱)  $(2, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 2)$  (۳)  $(2, 4)$  (۴)  $(-4, -2)$

۱۵۳- معادله‌ی  $(k+6)x^2 + 17(k+1)x + 5(k-2) = 0$  دو ریشه مانند  $x_1$  و  $x_2$  دارد که  $x_1 < 0 < x_2$  و  $|x_1| > x_2$ . حدود  $k$  کدام است؟

(۱)  $(-6, -1)$  (۲)  $(-1, 3)$  (۳)  $(0, 3)$  (۴)  $(-1, 2)$

۱۵۴- به ازای کدام مجموعه‌ی مقدارهای  $m$ ، منحنی به معادله‌ی  $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$  محور  $x$  را در هر دو طرف مبدأ مختصات

قطع می‌کند؟

(۱)  $m > 1$  یا  $m < -2$  (۲)  $-2 < m < 1$  (۳) فقط  $m < -2$  (۴) فقط  $m > 1$

۱۵۵- به ازای کدام مجموعه‌ی مقدارهای  $m$ ، منحنی به معادله‌ی  $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$  محور  $x$  را دو نقطه به طول‌های منفی

قطع می‌کند؟

(۱)  $m > 2$  (۲)  $-1 < m < 2$  (۳) هر مقدار  $m$  (۴) هیچ مقدار  $m$

۱۵۶- به ازای کدام مقدار  $a$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$  دو ریشه‌ی مثبت دارد؟

(۱)  $-2 < a < 2$  (۲)  $2 < a < 5$  (۳)  $2 < a < 14$  (۴)  $5 < a < 14$

۱۵۷- به ازای کدام مقدار  $a$ ، نمودار تابع  $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور  $x$  است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

(۱)  $a < 1$  (۲)  $a < -2$  (۳)  $a > 3$  (۴)  $-2 < a < 1$

۱۵۸- نمودار  $y = 2mx^2 + 4mx + m - 2$  از چهار ناحیه‌ی صفحه‌ی مختصات عبور می‌کند. حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $0 < m < 2$  (۲)  $1 < m < 2$  (۳)  $m > 2$  (۴)  $m < 0$

۱۵۹- به ازای کدام مجموعه‌ی مقدارهای  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$  از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی - ۹۲)

- (۱)  $a \leq 2$  (۲)  $0 < a \leq 2$  (۳)  $2 < a < 3$  (۴)  $0 < a < 3$

۱۶۰- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی  $4x^3 + 16x^2 + 9x + a = 0$  برابر  $\frac{1}{4}$  باشد، اختلاف دو جواب دیگر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

۱۶۱- اگر  $x = \frac{1}{3}$ ،  $x = -1$  و  $x = k$  جواب‌های معادله‌ی  $6x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$  باشند، مقدار  $\frac{ab}{k}$  کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) -۸ (۳) -۱۶ (۴) ۷

۱۶۲- معادله‌ی  $(x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) + 4 = 0$

- (۱) فقط دو جواب مثبت دارد. (۲) فقط دو جواب منفی دارد.  
(۳) دو جواب مثبت و دو جواب منفی دارد. (۴) چهار جواب مثبت دارد.

۱۶۳- کدام یک جواب معادله‌ی  $3(6x^2 + \frac{1}{3})^2 - 7(6x^2 + \frac{1}{3}) + 4 = 0$  نیست؟

- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{6}}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{\sqrt{6}}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۶۴- مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $(x^2 - x)^2 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۶۵- معادله‌ی  $3x^2 - 21x + 37 = (x^2 - 7x + 11)^2$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۶۶- معادله‌ی  $x^3 + 2x^2 - mx - m - 1 = 0$  سه جواب متمایز دارد. حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $m \in (\frac{1}{4}, +\infty)$  (۲)  $m \in (-\frac{5}{4}, +\infty)$  (۳)  $m \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$  (۴)  $m \in (-\frac{5}{4}, +\infty) - \{-1\}$

۱۶۷- اگر معادله‌ی  $mx^6 - x^3 + m - 1 = 0$  دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-1 < m < 1$  (۲)  $-1 < m < 0$  (۳)  $0 < m < 1$  (۴)  $m > 1$

۱۶۸- معادله‌ی  $x^4 - 2x^2 + m^2 - 1 = 0$  چهار جواب دارد. حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  (۲)  $m \in (-1, 1)$  (۳)  $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - [-1, 1]$  (۴)  $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

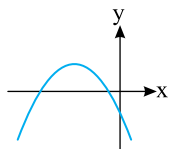
۱۶۹- اگر معادله‌ی  $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$  دو جواب داشته باشد، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $m \in (-\infty, 1)$  (۲)  $m \in (-\infty, 2]$  (۳)  $m \in (-\infty, 1) \cup \{2\}$  (۴)  $m \in (-\infty, 2] - \{1\}$

۱۷۰- اگر معادله‌ی  $x^4 - 2mx^2 + m^2 - 4 = 0$  جواب حقیقی نداشته باشد، حدود  $m$  کدام است؟

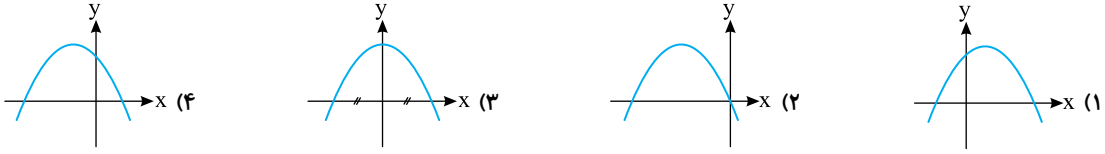
- (۱)  $m > 2$  (۲)  $0 < m < 2$  (۳)  $m < -2$  (۴)  $-2 < m < 0$

۱۷۱- نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + bx - c$  به شکل مقابل است. کدام گزینه علامت  $a$ ،  $b$  و  $c$  را درست نشان می‌دهد؟

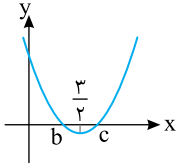


- (۱)  $a < 0$  و  $b < 0$ ،  $c < 0$  (۲)  $a < 0$  و  $b < 0$ ،  $c > 0$   
(۳)  $a > 0$  و  $b > 0$ ،  $c < 0$  (۴)  $a > 0$  و  $b < 0$ ،  $c < 0$

۱۷۲- درباره‌ی سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  می‌دانیم  $a < 0$ ،  $b < 0$  و  $c > 0$ . نمودار این سهمی کدام شکل می‌تواند باشد؟

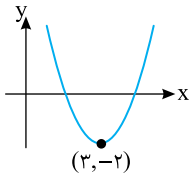


۱۷۳- نمودار تابع  $y = x^2 + ax + a^2 - a - 1 = 0$  شکل روبه‌رو است. مقدار  $abc$  کدام است؟



- (۱) -۶
- (۲) ۳
- (۳) ۶
- (۴) -۳

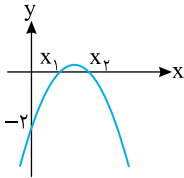
۱۷۴- در شکل روبه‌رو نمودار سهمی  $y = x^2 + bx + c$  رسم شده است. کدام گزینه صفرهای تابع



$y = x^2 + bx + c$  را درست نشان می‌دهد؟

- (۱) -۱ و ۷
- (۲)  $3 + \sqrt{2}$  و  $3 - \sqrt{2}$
- (۳) -۱ و -۷
- (۴)  $3 + 2\sqrt{2}$  و  $3 - 2\sqrt{2}$

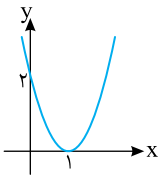
۱۷۵- در شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + bx + c$  رسم شده است. اگر  $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} x_1 x_2$ ، بیش‌ترین



مقدار تابع  $f$  چقدر است؟

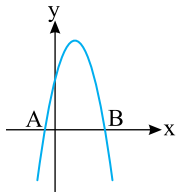
- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{1}{4}$
- (۴)  $\frac{1}{8}$

۱۷۶- نمودار سهمی  $y = (a+1)x^2 + (b-1)x + c$  در شکل مقابل رسم شده است. مقدار  $abc$  چقدر است؟



- (۱) ۲
- (۲) -۲
- (۳) -۴
- (۴) -۶

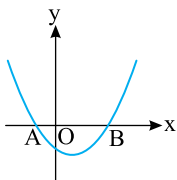
۱۷۷- در شکل مقابل نمودار سهمی  $y = -x^2 + 4x + c + 5$  رسم شده است. اگر طول پاره‌خط  $AB$  برابر ۶



باشد، مقدار  $c$  چقدر است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۱۰

۱۷۸- در شکل مقابل نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  رسم شده است و  $OA < OB$ . چند تا از نابرابری‌های

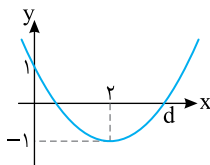


زیر درست‌اند؟

$$b^2 - 4ac > 0, \quad ab > 0, \quad ac < 0, \quad b + c < 0$$

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۷۹- نمودار یک تابع درجه‌ی دوم در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار  $d$  کدام است؟



- (۱) ۳
- (۲)  $\frac{5}{2}$
- (۳)  $2 + \sqrt{2}$
- (۴)  $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

۱۸۰- درباره‌ی تابع  $f$  با دامنه‌ی  $\mathbb{R}$  می‌دانیم  $f(x+1) = x^2 - x - 6$ . مجموع صفرهای تابع  $f$  چقدر است؟

- (۱) -۳
- (۲) ۱
- (۳) ۳
- (۴) ۴