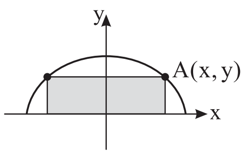
Ⓑ **۱۳۷۲- گزینه‌ی ۴** نقطه‌ی $B(x,y)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. پس $y=\sqrt{۲x+۹}$. می‌خواهیم $d=\overline{AB}^۲$ می‌نیمم شود:

$$d=(x-۴)^۲+(y-۰)^۲ \xrightarrow{y=\sqrt{۲x+۹}} d=(x-۴)^۲+۲x+۹ \Rightarrow d=x^۲-۶x+۲۵$$

می‌نیمم عبارت درجه دو بالا به ازای $x=۳$ رخ می‌دهد، در این صورت $d=۱۶$، پس کم‌ترین فاصله برابر $\sqrt{۱۶}=۴$ می‌شود.

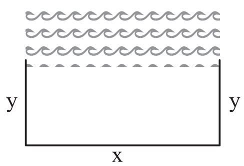
Ⓑ **۱۳۷۳- گزینه‌ی ۴** مطابق شـکل، نقطه‌ی $A(x,y)$ را رأس مستطیل در نظر می‌گیریم. پس طول مستطیل $۲x$ و عرض آن y می‌شود. بنابراین $y=\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}$ و می‌خواهیم $S=۲xy$ ماکسیمم شود.



$$S=۲x\times\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲} \Rightarrow \frac{dS}{dx}=۳(\sqrt{۸-x^۲}+x\times\frac{-۲x}{۲\sqrt{۸-x^۲}}) \xrightarrow{S'=۰} ۸-x^۲=x^۲$$

$$\Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow S_{max}=۱۲$$

Ⓑ **۱۳۷۴- گزینه‌ی ۲** مطابق شکل داریم:



$$x+۲y=۸۸ \Rightarrow x=۸۸-۲y$$

می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ را ماکسیمم کنیم:

$$S(y)=(۸۸-۲y)y=-۲y^۲+۸۸y$$

$$S'=-۴y+۸۸=۰ \Rightarrow y=۲۲ \Rightarrow S_{max}=۹۶۸$$

Ⓐ **۱۳۷۵- گزینه‌ی ۴** **راه‌حل اول**: کافی است $A=xy$ ماکسیمم شود. داریم:

$$y=۵-۴x \Rightarrow A=x(۵-۴x)=-۴x^۲+۵x$$

ماکسیمم عبارت درجه دو A به ازای $x=\frac{۵}{۸}$ رخ می‌دهد. در نتیجه: $y=۵-۴x=\frac{۵}{۲}$ و $\max(x^۲y^۲)=(\frac{۵}{۸}\times\frac{۵}{۲})^۲=(\frac{۵}{۴})^۴$

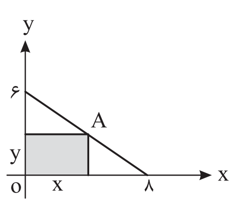
راه‌حل دوم: با توجه به آن‌که مجموع $a=۴x$ و $b=y$ مقداری ثابت است و می‌خواهیم ab ماکسیمم باشد، باید: $۴x=y=\frac{۵}{۲}$

Ⓐ **۱۳۷۶- گزینه‌ی ۲** **راه‌حـل اول**: حاصـل جمع چهار متغیر $a=\frac{x}{۳}$، $b=\frac{x}{۳}$، $c=\frac{x}{۳}$ و $d=y$ مقدار ثابت ۶ اسـت، پـس وقتی حاصل ضرب $abcd$ ماکسیمم می‌شود که $a=b=c=d=\frac{۳}{۲}$. ماکسیمم شدن $abcd$ معادل ماکسیمم شدن $x^۳y$ است، پس $y=\frac{۳}{۲}$ و $x=\frac{۹}{۲}$، در نتیجه:

$$x^۳y=(\frac{۹}{۲})^۳\times\frac{۳}{۲}=\frac{۲۱۸۷}{۱۶}$$

راه‌حل دوم: می‌توانید با جای‌گذاری $y=۶-x$ در عبارت $A=x^۳y$ به تابعی بر حسب x برسید و از آن مشتق بگیرید.

Ⓑ **۱۳۷۷- گزینه‌ی ۱** مطابق شکل مساحت بزرگ‌ترین مستطیل سایه زده شده را می‌خواهیم. پس اگر مختصات A را (x,y) در نظـر بگیریم، بیش‌ترین مقدار $S=xy$ را می‌خواهیـم. معادله‌ی خط منطبق بر وتر مثلث به‌صورت $\frac{x}{۸}+\frac{y}{۶}=۱$ قابل نوشـتن است، بنابراین مختصات A در این رابطه صدق می‌کند. چون مجموع $\frac{x}{۸}$ و $\frac{y}{۶}$ مقدار ثابت ۱ است، وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها ماکسیمم می‌شود که $\frac{x}{۸}=\frac{y}{۶}=\frac{۱}{۲}$، در این‌صورت:



$$S_{max}=\frac{۸}{۲}\times\frac{۶}{۲}=۱۲$$

۴-۵ : تقعر و نقطه‌ی عطف

Ⓐ **۱۳۷۸- گزینه‌ی ۳** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $f'(x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین تابع f تقعری رو به بالا دارد. (در واقع در این تست با تعریف تقعر مواجهیم!)

Ⓐ **۱۳۷۹- گزینه‌ی ۳** مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow f''(x)=\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}$$

برای $x<۰$ داریم $f''(x)<۰$ و برای $x>۰: f''(x)>۰$. پس نمودار f ابتدا تقعر رو به پایین دارد، سپس رو به بالا.

(B) **۱۳۸۰- گزینه‌ی ۱** مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f''(x)=2-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=\frac{8\sqrt{x^3}-1}{4\sqrt{x^3}}\xrightarrow{f''(x)=0}8\sqrt{x^3}=1\Rightarrow x^3=(\frac{1}{8})^2\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

با توجه به آن‌که مخرج کسر $f''(x)$ در بازه‌ی مورد نظر مثبت است، علامت $f''(x)$ و صورت کسر یکسان است. بنابراین در بازه‌ی $(0,\frac{1}{4})$ داریم: $f''(x)<0$ و در بازه‌ی $(\frac{1}{4},+\infty)$ داریم: $f''(x)>0$.

(B) **۱۳۸۱- گزینه‌ی ۳** باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $y''<0$. داریم:

$$y'=\ln(x-1)+\frac{x}{x-1}\Rightarrow y''=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{(x-1)^2}\xrightarrow{y''<0}x-2<0\Rightarrow x<2$$

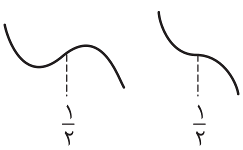
با توجه به آن‌که دامنه‌ی تابع محدوده‌ای است که $x-1>0$ ، پس $1<x<2$.

(B) **۱۳۸۲- گزینه‌ی ۲** باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $f''(x)<0$. داریم:

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}\Rightarrow f''(x)=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}\Rightarrow f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$$

با توجه به آن‌که همواره $e^{-x}>0$ ، برای آن‌که $f''(x)<0$، باید $x^2-4x+2<0$ ، بنابراین $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ ، در نتیجه بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر است با: $2+\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

(B) **۱۳۸۳- گزینه‌ی ۴** **راه‌حل اول**: چون با یک تابع درجه‌ی ۳ مواجهیم، باید $\frac{1}{2}$ نقطه‌ی عطف تابع باشد و نمودار تابع مانند یکی از شکل‌های مقابل باشد. طول نقطه‌ی عطف تابع عبارت است از $x=-\frac{1-a^2}{3a}$، بنابراین:



$$-\frac{1-a^2}{3a}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2a^2-3a-2=0\Rightarrow(2a+1)(a-2)=0\Rightarrow a_1=-\frac{1}{2}\ ,\ a_2=2$$

به ازای $a=2$ داریم $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و نمودار تابع مانند شکل‌های بالا نمی‌شود، پس $a=-\frac{1}{2}$.

راه‌حل دوم: با مشتق‌گیری از تابع داریم:

$$f'(x)=3ax^2+2(1-a^2)x+3\Rightarrow f''(x)=6ax+2(1-a^2)=2(3ax+(1-a^2))$$

اگر قرار دهیم $x_0=\frac{a^2-1}{3a}$، جدول تعیین علامت f'' به شکل زیر خواهد شد. برای آن‌که این جدول مطابق شرایط مسأله باشد، باید: $x_0=\frac{1}{2}$ و $a<0$. حل این معادله به پاسخ $a=-\frac{1}{2}$ می‌انجامد.

x		x_0	
f''	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

(B) **۱۳۸۴- گزینه‌ی ۱** بـا توجـه به نمودار $y=f(x)$، در بازه‌ی $(0,+\infty)$ تابع تقعر رو به بـالا و در بازه‌ی $(-\infty,0)$ تقعر رو به پایین دارد. بنابراین باید $y=f''(x)$ در بازه‌ی $(0,+\infty)$ علامتی مثبت و در بازه‌ی $(-\infty,0)$ علامتی منفی داشته باشد.

(A) **۱۳۸۵- گزینه‌ی ۲** در گزینه‌ی (۲) نمودار تابع همواره صعودی اکید و با تقعر رو به پایین است. پس همواره $f'(x)>0$ و $f''(x)<0$ که در شرایط تست صدق می‌کند.

(B) **۱۳۸۶- گزینه‌ی ۴** با توجه به فرض تسـت داریم: $f'(x_0)+f''(x_0)=-\frac{5}{2}$ و $f'(x_0)f''(x_0)=\frac{1}{2}$. از تساوی دوم نتیجه می‌گیریم $f'(x_0)$ و $f''(x_0)$ هم‌علامت‌اند، پس با توجه به تساوی اول هر دو منفی هستند. بنابراین باید نمودار تابع در همسایگی $x=x_0$ اکیداً نزولی و با تقعر رو به پایین باشد که این شرایط در گزینه‌ی (۴) وجود دارد.

(A) **۱۳۸۷- گزینه‌ی ۱** در بازه‌ای که $f'(x)$ صعودی اکید است (یعنی $(-\infty,0)$)، تابع f تقعر رو به بالا دارد. به همین ترتیب در بازه‌ی $(0,+\infty)$، $f'(x)$ نزولی اکید است، پس f تقعر رو به پایین دارد.

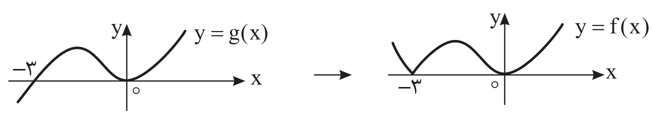
(B) **۱۳۸۸- گزینه‌ی ۲** برای آن که f صعودی باشد، باید $f'>\circ$، یعنی بازه‌ی $(x_۱,x_۳)$ یا $(x_۵,x_۷)$ یا $(x_۷,+\infty)$ مدنظر است. همچنین برای آن‌که نمودار f تقعر رو به پایین داشته باشد، باید $f''<\circ$، یا به بیان دیگر تابع f' نزولی اکید باشد. در بازه‌های $(x_۲,x_۴)$ و $(x_۶,x_۷)$ با این شرایط مواجهیم. بنابراین در بازه‌های $(x_۲,x_۳)$ و $(x_۶,x_۷)$ هر دو شرط هم‌زمان برقرار است.

(B) **۱۳۸۹- گزینه‌ی ۲** **راه‌حل اول**: بازه‌ای را تعیین می‌کنیم که $f''(x)<\circ$. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۳+۳x^۲ & x\geq -۳\\ -x^۳-۳x^۲ & x<-۳\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۶x & x>-۳\\ -۳x^۲-۶x & x<-۳\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۶x+۶ & x>-۳\\ -۶x-۶ & x<-۳\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}۶x+۶<\circ\Rightarrow ۶x<-۶\Rightarrow x<-۱\xrightarrow{x>-۳}-۳<x<-۱\\ -۶x-۶<\circ\Rightarrow ۶x>-۶\Rightarrow x>-۱\xrightarrow{x<-۳}\text{جواب ندارد}\end{array}\right\}\Rightarrow -۳<x<-۱\Rightarrow \max(b-a)=-۱-(-۳)=۲$$

راه‌حل دوم: نمودار تابع $g(x)=x^۲(x+۳)$ را رسم می‌کنیم و در محدوده‌ی $x<-۳$ آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار f به‌دست آید. با توجه به آن‌که نقطه‌ی عطف تابع g، $x=-\frac{۳}{۳\times ۱}=-۱$ است، در بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ نمودار g تقعر رو به پایین دارد. بنابراین نمودار f در بازه‌ی $(-۳,-۱)$ تقعر رو به پایین خواهد داشت.



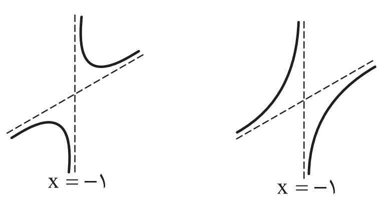
(C) **۱۳۹۰- گزینه‌ی ۱** **راه‌حل اول**: باید برای $x>-۱$ داشته باشیم: $f''(x)>\circ$. داریم:

$$f(x)=\frac{(x^۲-۱)+mx-۲}{x+۱}=x-۱+\frac{mx-۲}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{m+۲}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۲(m+۲)}{(x+۱)^۳}$$

به ازای $x>-۱$ مخرج کسر f'' همواره مثبت است. پس برای برقراری شرط $f''(x)>\circ$ باید داشته باشیم:

$$m+۲<\circ\Rightarrow m<-۲$$

راه‌حل دوم: با یک تابع کسری درجه‌ی ۲ به درجه‌ی ۱ مواجهیم که یک مجانب قائم $x=-۱$ و یک مجانب مایل با شیب ۱ دارد. پس نمودار این تابع به یکی از دو شکل مقابل خواهد بود. برای برقراری فرض تست باید $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(x)=+\infty$ (تا نمودار به صورت شکل سمت چپ باشد). به همین دلیل باید مقدار صورت کسر به ازای $x=-۱$ عددی مثبت شود:



$$۱-m-۳>\circ\Rightarrow m<-۲$$

تذکر: به ازای $m=-۲$ داریم: $x^۲-۲x-۳=(x+۱)(x-۳)$، بنابراین $f(x)=x-۳$ (که $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$)، که تقعری برای آن تعریف نشده است.

(A) **۱۳۹۱- گزینه‌ی ۱** مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۵x^۴-۶x\Rightarrow f''(x)=۲\circ x^۳-۶=۲(۱\circ x^۳-۳)$$

معادله‌ی $f''(x)=\circ$ فقط یک ریشه دارد که در همسایگی آن علامت f'' عوض می‌شود. پس تابع یک نقطه‌ی عطف دارد.

(B) **۱۳۹۲- گزینه‌ی ۱** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۴}x^۴-\frac{۱}{۲}x^۲+m\Rightarrow f''(x)=x^۳-x=x(x^۲-۱)\xrightarrow{f''(x)=\circ}x_۱=\circ\ ,\ x_۲=۱\ ,\ x_۳=-۱$$

تابع سه نقطه‌ی عطف دارد و باید حاصل $f(\circ)+f(۱)+f(-۱)$ را پیدا کنیم. داریم: $f(\circ)=۱$ و در مجموع $f(۱)+f(-۱)$ جملات شامل توان‌های فرد x با هم ساده می‌شوند. بنابراین: $f(۱)+f(-۱)=۲$، در نتیجه: $f(\circ)+f(۱)+f(-۱)=۳$.

۱۳۹۳- گزینه‌ی ۲ باید شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف، یعنی مقدار مشتق در این نقطه برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد. داریم: $f'(x)=-۳x^۲+۲ax$ و می‌دانیم طول نقطه‌ی عطف تابع $x=-\frac{a}{۳\times(-۱)}=\frac{a}{۳}$ است، بنابراین:

$$f'(\frac{a}{۳})=\frac{۴}{۳}\Rightarrow -۳(\frac{a}{۳})^۲+۲a(\frac{a}{۳})=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲$$

۱۳۹۴- گزینه‌ی ۲ چون نقاط B و C نسبت به نقطه‌ی A قرینه‌اند، نتیجه می‌گیریم A مرکز تقارن منحنی یا همان نقطه‌ی عطف آن است. داریم:

طول نقطه‌ی عطف: $x=-\frac{۱}{-۱}=۱\Rightarrow$ عرض نقطه‌ی عطف: $f(۱)=۲\xrightarrow{\text{روی خط } y=m} m=۲$

۱۳۹۵- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ی عطف و مرکز تقارن نمودار تابع در $x=-\frac{-۶}{۳\times ۱}=۲$ رخ می‌دهد. دو نقطه‌ی $x_۱=۲+\lambda$ و $x_۲=۲-\lambda$ نسبت به $x=۲$ قرینه‌اند، پس نقاط متناظر آن‌ها روی نمودار نسبت به نقطه‌ی عطف قرینه‌اند. بنابراین:

$$f(۲+\lambda)+f(۲-\lambda)=۲f(۲)\Rightarrow f(۲+\lambda)+f(۲-\lambda)=۲(۸-۲۴+۲۰+۱)=۱۰$$

۱۳۹۶- گزینه‌ی ۱ با توجه به ضابطه $D_f=(۰,+\infty)$. از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}=x^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{-۱}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}x^{\frac{-۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}x^{\frac{-۳}{۲}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{۱}{۴}x^{\frac{-۳}{۲}}+\frac{۳}{۴}x^{\frac{-۵}{۲}}$$

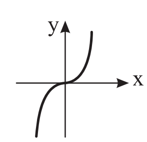
$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-۱}{۴\sqrt{x^۳}}+\frac{۳}{۴\sqrt{x^۵}}=\frac{-x+۳}{۴\sqrt{x^۵}}\xrightarrow{f''(x)=۰} x=۳\Rightarrow f(۳)=\frac{۴}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۳۹۷- گزینه‌ی ۱ از تابع مشتق می گیریم:

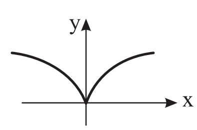
$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^۲+۱)^۲}\Rightarrow f''(x)=-۲\times\frac{(x^۲+۱)^۲-۲(x^۲+۱)\times ۲x\times x}{(x^۲+۱)^۴}=-۲\times\frac{۱-۳x^۲}{(x^۲+۱)^۳}\xrightarrow{f''(x)=۰} x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

دو نقطه به طول‌های $x_۱=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $x_۲=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ نقاط عطف تابع‌اند. چون با یک تابع زوج مواجهیم، عرض این نقاط یکسان است و فاصله‌ی نقاط متناظر روی نمودار، همان فاصله‌ی بین طول‌های دو نقطه است، یعنی: $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}=|\frac{\sqrt{۳}}{۳}-(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})|$.

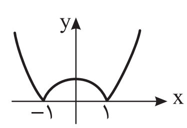
۱۳۹۸- گزینه‌ی ۴ تابع گزینه‌ی (۱) یک تابع هموگرافیک است و به وضوح نقطه‌ی عطف ندارد. نمودار توابع دیگر را رسم می‌کنیم:



گزینه‌ی (۴)



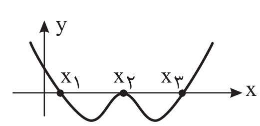
گزینه‌ی (۳)



گزینه‌ی (۲)

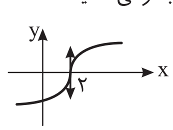
تابع گزینه‌ی (۴) در $x=۰$ خط مماس افقی دارد که از نمودار تابع عبور می‌کند.

۱۳۹۹- گزینه‌ی ۲ از سه ریشه‌ی تابع f''، در همسایگی $x_۱$ و $x_۳$ علامت f'' تغییر می‌کند، پس با دو نقطه‌ی عطف مواجهیم.



۱۴۰۰- گزینه‌ی ۳ گزینه‌ی (۳) بیانگر یک قضیه است. مثال نقض گزینه‌های (۲) و (۴) نقطه‌ی عطف با خط مماس عمودی است. در این نقطه‌ی عطف، $f'(x)$ وجود ندارد، بنابراین در دامنه‌ی f' نیز حضور ندارد و نمی‌تواند نقطه‌ی بحرانی f' باشد. گزینه‌ی (۱) نیز نادرست است و مثال نقض آن یک نقطه‌ی عطف با خط مماس مایل است. در این نقطه $f'(x)$ وجود دارد و مقداری غیر صفر دارد، پس نقطه‌ی بحرانی f نیست.

۱۴۰۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به نمودار تابع (یا به‌دست آوردن مشتق آن!)، در نقطه‌ی $x=۲$ با یک نقطه‌ی عطف با خط مماس عمودی مواجهیم. یعنی معادله‌ی خط مماس $x=۲$ می‌شود.



۱۴۰۲- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** ضابطه‌ی تابع را با $y=f(x)$ نشان می‌دهیم. داریم: $2a+\sqrt[3]{2+b}=-2$، همچنین با مشتق‌گیری داریم:

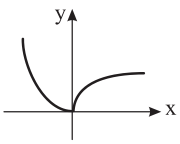
$$f'(x)=a+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+b)^2}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+b)^5}}$$

$f''(x)$ در $x=-b$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین $-b=2$، یعنی $b=-2$ و از رابطه‌ی اول داریم: $a=-1$، پس $a+b=-3$.

راه‌حل دوم: چون جمله‌ی ax در دوبار مشتق‌گیری حذف می‌شود، وضعیت تقعر و نقاط عطف این تابع و تابع $y=\sqrt[3]{x+b}$ یکسان است.

می‌دانیم تابع جدید در نقطه‌ی برخورد آن با محور xها (یعنی $x=-b$) نقطه‌ی عطف دارد، پس $b=-2$ و با جای‌گذاری a نیز به‌دست می‌آید.

۱۴۰۳- گزینه‌ی ۴ طبق فرض $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>0\\ x^2 & x\le 0\end{cases}$ (دقت کنید که $\sqrt{x^2}=|x|$)، بنابراین نمودار تابع



شبیه شکل مقابل می‌شود که در نقطه‌ی $x=0$ جهت تقعر عوض می‌شود، ولی نقطه‌ی عطف نیست.

۱۴۰۴- گزینه‌ی ۱ چون سهمی‌های $y=x^2+a$ و $y=-x^2+bx$ نقطه‌ی عطف ندارند، نقطه‌ی عطف تابع همان نقطه‌ی مرزی $x=1$ است.

بنابراین باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد، مشتق‌پذیر باشد و تقعر آن عوض شود. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a & x\le 1\\ -x^2+bx & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x<1\\ -2x+b & x>1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x<1\\ -2 & x>1\end{cases}$$

$x=1$ شرط مشتق‌پذیری در: $2=-2+b\Rightarrow b=4$

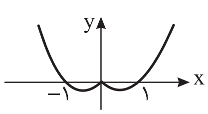
$x=1$ شرط پیوستگی در: $1+a=-1+b\xrightarrow{b=4}a=2$

۱۴۰۵- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول:** مشتق اول و دوم تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x & x\ge 0\\ x^2+x & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-1 & x>0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ 2 & x<0\end{cases}$$

تقعر تابع در هیچ نقطه‌ای عوض نمی‌شود و نقطه‌ی عطف نداریم.

راه‌حل دوم: با توجه به آن‌که $f(x)=\begin{cases}x(x-1) & x\ge 0\\ x(x+1) & x<0\end{cases}$ نمودار تابع مانند شکل مقابل می‌شود که به وضوح



نقطه‌ی عطفی ندارد.

۱۴۰۶- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول:** ضابطه‌ی تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

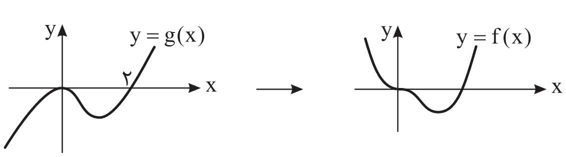
$$f(x)=\begin{cases}x^3-2x^2 & x\ge 0\\ -x^3+2x^2 & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2-4x & x\ge 0\\ -3x^2+4x & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-4 & x>0\\ -6x+4 & x<0\end{cases}$$

در محدوده‌ی $x>0$ در $x=\frac{2}{3}$، $f''(x)$ صفر می‌شود و علامت آن در همسایگی $x=\frac{2}{3}$ تغییر می‌کند. همچنین در همسایگی $x=0$ علامت

f'' تغییر می‌کند. در تمام $\mathbb{R}$ نیز $f'(x)$ وجود دارد، پس دو نقطه‌ی $x=0$ و $x=\frac{2}{3}$ نقاط عطف تابع‌اند.

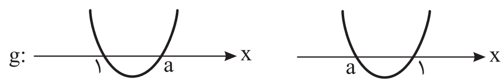
راه‌حل دوم: تابع $g(x)=x(x^2-2x)=x^3-2x^2$ دارای نقطه‌ی عطفی به طول $x=\frac{2}{3}$ است.

به این ترتیب نمودار $y=g(x)$ و $y=f(x)$ مانند شکل‌های مقابل می‌شود. نقطه‌ی $x=\frac{2}{3}$ کماکان برای $y=f(x)$ نقطه‌ی عطف است و

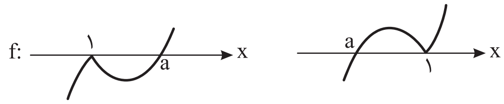


در $x=0$ تابع f خط مماس افقی دارد که از نمودار آن عبور می‌کند.

B **۱۴۰۷- گزینه‌ی ۲** اگر $a\neq 1$، تابع $g(x)=(x-a)(x-1)$ یک سهمی با تقعر روبه بالاست که نمودار آن به یکی از دو صورت زیر می‌شود:



برای تشکیل نمودار f باید نمودار g در محدوده‌ی $x\leq 1$ نسبت به محور x قرینه شود که باتوجه به شکل نقطه‌ی عطف نخواهد داشت.



ولی در حالت $a=1$، با رسم نمودار $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\geq 1\\ -(x-1)^2 & x<1\end{cases}$ مشخص می‌شود که تابع در $x=1$ نقطه‌ی عطفی روی محور xها دارد.

C **۱۴۰۸- گزینه‌ی ۳** اولاً باید $f(1)=3$ و ثانیاً $f''(1)=0$. داریم:

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{(-2ax-2b)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\times 2x(-ax^2-2bx+a)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(-2ax-2b)(x^2+1)-4x(-ax^2-2bx+a)}{(x^2+1)^3}\xrightarrow{f''(1)=0}(-2a-2b)\times 2=4(-a-2b+a)\Rightarrow a=b$$

از شرط $f(1)=3$ نیز نتیجه می‌گیریم: $a+b=6$، بنابراین: $a=b=3$.

A **۱۴۰۹- گزینه‌ی ۱** نمـودار توابـع اصلی مثلثاتی در نقاط برخورد با محور xها، نقطه‌ی عطـف دارند. پس در نقاطی که $\cot x=0$ با نقطه‌ی عطف تابع f مواجهیم. حال داریم:

$$f'(x)=-(1+\cot^2 x)\xrightarrow{\cot x=0}f'(x)=-1$$ شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف

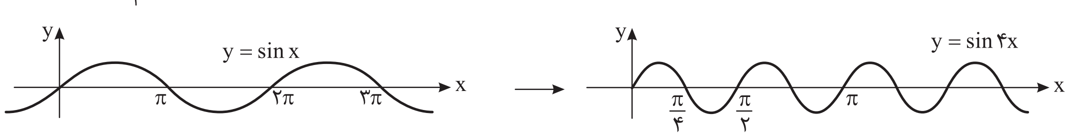
B **۱۴۱۰- گزینه‌ی ۲** تابع $g(x)=\cot^{-1}x$ در $x=0$ نقطه‌ی عطف دارد. نمودار تابع f از انتقال افقی نمودار g به اندازه‌ی ۱ واحد به راسـت، دو برابر کردن عرض‌ها و سپس انتقال عمودی حاصل می‌شود. پس نقطه‌ی عطف تابع f نیز در $x=1$ است.

$$f(1)=2\cot^{-1}(0)+\frac{\pi}{3}=2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow$$ مختصات نقطه‌ی عطف $=(1,\frac{4\pi}{3})$

C **۱۴۱۱- گزینه‌ی ۲** ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

تابع بالا در نقاط برخورد نمودار با محور xها نقطه‌ی عطف دارد که فاصله‌ی هر دوتای متوالی آن‌ها برابر است با: $\frac{\pi}{4}$



C **۱۴۱۲- گزینه‌ی ۳** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=1+\sin x\Rightarrow f''(x)=\cos x\xrightarrow{f''(x)=0}x=k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{x\in(0,6\pi)}x\in\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots,\frac{11\pi}{2}\}$$

در همسایگی هر یک از نقاط بالا، علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند، پس با ۶ نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم.

B **۱۴۱۳- گزینه‌ی ۴** مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

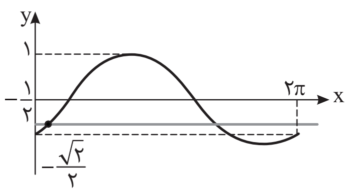
$$f'(x)=x+\cos x\Rightarrow f''(x)=1-\sin x$$

با توجه به آن‌که همواره $\sin x\leq 1$، داریم $f''(x)\geq 0$. پس هیچ‌گاه $f''(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد و نقطه‌ی عطف نداریم.

C **۱۴۱۴- گزینه‌ی ۳** ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x^{۲}-۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=x^{۲}-۴\sin(x-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow f'(x)=۲x-۴\cos(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow f''(x)=۲+۴\sin(x-\frac{\pi}{۴})\xrightarrow{f''(x)=۰}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=-\frac{۱}{۲}$$



با توجه به شکل روبه‌رو، خط $y=-\frac{۱}{۲}$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ در دو نقطه نمودار $y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ را قطع می‌کند و در همسایگی هر دو نقطه مقدار $f''(x)$ تغییر علامت می‌دهد. پس با دو نقطه‌ی عطف مواجهیم.

C **۱۴۱۵- گزینه‌ی ۴** ضابطه‌ی مشتق دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=x^{۳}+x-\tan^{-۱}x\Rightarrow f''(x)=۳x^{۲}+۱-\frac{۱}{۱+x^{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{(۳x^{۲}+۱)(x^{۲}+۱)-۱}{۱+x^{۲}}=\frac{x^{۲}(۳x^{۲}+۴)}{۱+x^{۲}}$$

همواره $f''(x)\geq ۰$، پس نقطه‌ی عطف نداریم.

B **۱۴۱۶- گزینه‌ی ۲** باید مشتق دوم تابع را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۹}{x^{۲}+۱۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱۲-۹}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}\times ۲x=\frac{۶x}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{۶(x^{۲}+۱۲)^{۲}-۲(x^{۲}+۱۲)۲x\times ۶x}{(x^{۲}+۱۲)^{۴}}=\frac{۱۸(۴-x^{۲})}{(x^{۲}+۱۲)^{۳}}$$

برای آن‌که $f''(x)>۰$، باید $۴-x^{۲}>۰$، یعنی $-۲<x<۲$. بنابراین بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر است با: $۲-(-۲)=۴$

B **۱۴۱۷- گزینه‌ی ۳** از تابع دو بار مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=\begin{cases}x^{۳}-۳x^{۲} & x\geq -۱\\ -۱۳-\frac{۹}{x} & x\leq -۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^{۲}-۶x & x\geq -۱\\ \frac{۹}{x^{۲}} & x\leq -۱\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۶x-۶ & x>-۱\\ -\frac{۱۸}{x^{۳}} & x<-۱\end{cases}$$

توابع f و f' در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند. تابع f'' در دو نقطه تغییر علامت می‌دهد: $x=۱$ و $x=-۱$ (در اولی ضابطه‌ی اول تابع f'' صفر می‌شود و در همسایگی راست نقطه‌ی دوم علامت f'' منفی و در همسایگی چپ، علامت آن مثبت است). چون در هر دو نقطه f' وجود دارد، پس دو نقطه‌ی عطف داریم.

B **۱۴۱۸- گزینه‌ی ۴** باید نقاطی را بیابیم که $f''(x)<۰$. داریم:

$$f'(x)=(۲x+۲)e^{-x}-(x^{۲}+۲x+۲)e^{-x}=-x^{۲}e^{-x}\Rightarrow f''(x)=-۲xe^{-x}+x^{۲}e^{-x}=x(x-۲)e^{-x}$$

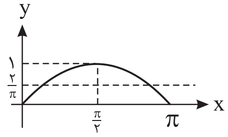
با توجه به آن‌که همواره $e^{-x}>۰$ ، برای آن‌که $f''(x)<۰$ ، باید $x(x-۲)<۰$ ، در نتیجه $۰<x<۲$.

B **۱۴۱۹- گزینه‌ی ۱** مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=-\frac{۲}{x^{۲}+۳}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x}{(x^{۲}+۳)^{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{۴(x^{۲}+۳)^{۲}-۲(x^{۲}+۳)\times ۲x\times ۴x}{(x^{۲}+۳)^{۴}}=\frac{۱۲(۱-x^{۲})}{(x^{۲}+۳)^{۳}}$$

به ازای $-۱<x<۱$ داریم $f''(x)>۰$، پس تقعر منحنی رو به بالا است.

B **۱۴۲۰- گزینه‌ی ۴** باید علامت y'' را تعیین کنیم:



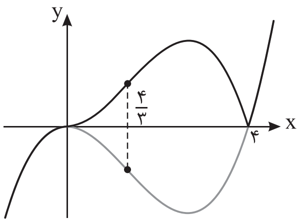
$$y'=\cos x+\frac{۲x}{\pi}\Rightarrow y''=-\sin x+\frac{۲}{\pi}$$

با توجه به نمودار $y=\sin x$، در بازه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ ابتدا $\sin x<\frac{۲}{\pi}$ (پس $y''>۰$) و سپس $\sin x>\frac{۲}{\pi}$ (پس $y''<۰$)، بنابراین تقعر تابع ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.

B **۱۴۲۱- گزینه‌ی ۴** به ازای تمام مقادیر x، باید مشتق دوم تابع، مثبت باشد: $f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+۳x \Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲+۶ax+۳$

برای این‌که این عبارت درجه‌ی دو، همواره مثبت باشد، داریم: $\Delta=۳۶a^۲-۱۴۴=۳۶(a^۲-۴)<۰ \Rightarrow -۲<a<۲$

B **۱۴۲۲- گزینه‌ی ۴** بهتر است به کمک نمودار تابع $f(x)=x(x^۲-۴x)$، نمودار تابع $y=x|x^۲-۴x|$ را رسم کنیم:



$$f(x)=x(x^۲-۴x)=x^۲(x-۴)=x^۳-۴x^۲$$

دقت شود نقطه‌ی عطف تابع f، نقطه‌ای به طول $x=\frac{۴}{۳}$ است. برای رسم نمودار باید نمودار f را در فاصله‌ی $[۰,۴]$ نسبت به محور xها قرینه کنیم.

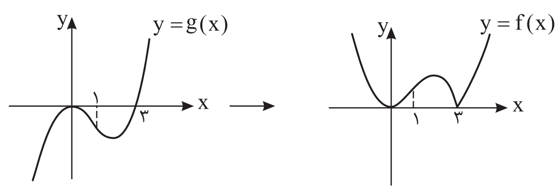
این نمودار در $x=۰$ و $x=\frac{۴}{۳}$ دارای نقطه‌ی عطف است. در $x=۴$ اگرچه تقعر نمودار عوض می‌شود ولی این نقطه به دلیل عدم وجود خط مماس بر نمودار، جزء نقاط عطف محسوب نمی‌شود.

B **۱۴۲۳- گزینه‌ی ۳** **راه‌حل اول:** مشتق دوم تابع را تشکیل می‌دهیم و محدوده‌ای را تعیین می‌کنیم که علامت آن منفی است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۳-۳x^۲ & x\geq ۳ \\ -x^۳+۳x^۲ & x\leq ۳ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۶x & x>۳ \\ -۳x^۲+۶x & x<۳ \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} ۶x-۶ & x>۳ \\ -۶x+۶ & x<۳ \end{cases}$$

$$f''(x)<۰ \Rightarrow \begin{cases} ۶x-۶<۰ \Rightarrow x<۱ \xrightarrow{x>۳} \text{غیرممکن} \\ -۶x+۶<۰ \Rightarrow x>۱ \xrightarrow{x<۳} ۱<x<۳ \end{cases} \Rightarrow \max(b-a)=۳-۱=۲$$

راه‌حل دوم: اگر $g(x)=x^۳-۳x^۲$، برای رسم نمودار تابع مورد نظر کافی است نمودار g را در محدوده‌ی $x<۳$ نسبت به محور xها قرینه کنیم.



با توجه به آن‌که نقطه‌ی عطف تابع g نقطه‌ای $x=۱$ است، پس در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ تقعر نمودار تابع g رو به بالا است. به این ترتیب در بازه‌ی $(۱,۳)$ تقعر نمودار تابع f رو به پایین می‌شود.

B **۱۴۲۴- گزینه‌ی ۱** مشتق اول و دوم تابع را تشکیل می‌دهیم. باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $f'(x)>۰$ و $f''(x)<۰$.

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{x^۲}=\frac{x^۲-۱}{x^۲} \xrightarrow[x^۲>۰]{f'(x)>۰} x^۲-۱>۰ \Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

$$f'(x)=۱-x^{-۲} \Rightarrow f''(x)=\frac{۲}{x^۳} \xrightarrow{f''(x)<۰} x<۰$$

اشتراک دو محدوده‌ی به‌دست آمده $x<-۱$ می‌شود.

A **۱۴۲۵- گزینه‌ی ۳** مشتق دوم تابع را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}x^۲ & x<۱ \\ \frac{۱}{x} & x\geq ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -x & x<۱ \\ -\frac{۱}{x^۲} & x>۱ \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} -۱ & x<۱ \\ \frac{۲}{x^۳} & x>۱ \end{cases}$$

علامت $f''(x)$ در همسایگی $x=۱$ تغییر می‌کند و داریم $f'_+(۱)=f'_-(۱)=-۱$، پس نمودار تابع در این نقطه مماس دارد. پس $x=۱$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

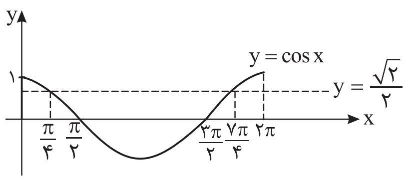
B **۱۴۲۶- گزینه‌ی ۳** باید نقاطی را بیابیم که $y''<۰$. داریم:

$$y'=\ln x+(x-۱)\times\frac{۱}{x}=\ln x+۱-\frac{۱}{x}\Rightarrow y''=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}=\frac{x+۱}{x^{۲}}$$

با توجه به همواره مثبت بودن $x^{۲}$، برای آن‌که $y''<۰$، باید $x+۱<۰$ ، در نتیجه $x<-۱$. ولی دقت کنید که دامنه‌ی تابع $x>۰$ است، بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

B **۱۴۲۷- گزینه‌ی ۳** باید نقاطی را بیابیم که $f''(x)>۰$. داریم:

$$f'(x)=۲x-۲\sqrt{۲}\sin x\Rightarrow f''(x)=۲-۲\sqrt{۲}\cos x\xrightarrow{f''(x)>۰}۲\sqrt{۲}\cos x<۲\Rightarrow\cos x<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



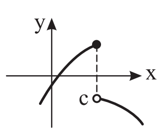
با توجه به نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴})$ این شرط برقرار است. (البته در بازه‌های گزینه‌های (۲) و (۴) نیز شرط مورد نظر برقرار است، ولی بزرگ‌ترین بازه‌ی موجود در گزینه‌ها همان بازه‌ی گزینه‌ی (۳) است.)

B **۱۴۲۸- گزینه‌ی ۴** y'' را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۳x^{۲}}{۲x^{۲}+۱}\Rightarrow y'=\frac{۶x(۲x^{۲}+۱)-۴x(۳x^{۲})}{(۲x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{۶x}{(۲x^{۲}+۱)^{۲}}\Rightarrow y''=\frac{۶(۲x^{۲}+۱)^{۲}-۲(۲x^{۲}+۱)\times۲۴x^{۲}}{(۲x^{۲}+۱)^{۴}}=\frac{۶(-۶x^{۲}+۱)}{(۲x^{۲}+۱)^{۳}}$$

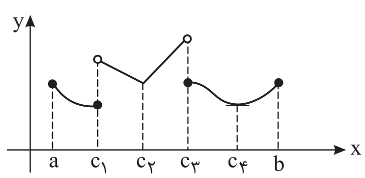
y'' دو ریشه دارد که در همسایگی هر دو، علامت آن تغییر می‌کند، بنابراین دو نقطه‌ی عطف داریم.

۶-۴ : اکسترمم‌های موضعی (نسبی) و آنالیز نقطه‌ای



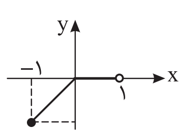
A **۱۴۲۹- گزینه‌ی ۴** برای آن‌که $x=c$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f باشد، لزومی به پیوستگی و مشتق‌پذیری در این نقطه نیست. مثلاً در شکل مقابل تابع در $x=c$ ماکسیمم نسبی دارد، ولی پیوسته و مشتق‌پذیر نیست. پس هیچ‌کدام از شرایط (الف)، (ب) و (پ) لزوماً برقرار نیستند.

A **۱۴۳۰- گزینه‌ی ۲** گزینه‌ی (۲) بیان نکات درس است. اما گزینه‌های دیگر: نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه هستند که در آن‌ها مقدار مشتق یا صفر است، یا وجود ندارد، بنابراین گزینه‌ی (۳) نادرست است. هر نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=۰$ در $f(x)=x^{۳}$، بنابراین گزینه‌ی (۱) نادرست است. در هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، به شرط مشتق‌پذیری تابع داریم: $f'(x)=۰$، ولی اگر تابع مشتق‌پذیر نباشد گزینه‌ی (۴) درست نیست.



A **۱۴۳۱- گزینه‌ی ۱** در شکل مقابل نقاط بحرانی را با $c_{۱}$ تا $c_{۴}$ نشان داده‌ایم. در نقاط $c_{۱}$، $c_{۲}$ و $c_{۴}$ با می‌نیمم نسبی مواجهیم. نقطه‌ی $c_{۳}$ اکسترمم نسبی نیست. در ضمن نقاط a و b نیز ماکسیمم نسبی هستند.

A **۱۴۳۲- گزینه‌ی ۳** در محدوده‌ی $۰<x<۱$ داریم: $f(x)=۲^{۰}=۱$، یعنی در این محدوده با یک تابع ثابت مواجهیم. بنابراین هر نقطه‌ای هم بحرانی است (زیرا $f'(x)=۰$)، هم ماکسیمم نسبی است و هم می‌نیمم نسبی.



A **۱۴۳۳- گزینه‌ی ۲** نمودار تابع را در همسایگی $x=۰$ رسم می‌کنیم. برای $۰\le x<۱$ داریم: $y=۰$ و برای $-۱\le x<۰$ داریم $y=-|x|$. طبق نمودار $x=۰$ نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع است. از طرفی چون تابع برای $x\ge۱$ مقادیر مثبت اختیار می‌کند، نقطه‌ی ماکسیمم مطلق نیست.