فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

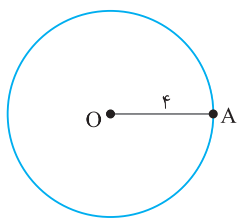
فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اول: ترسیم‌های هندسی

در این درس با ترسیم‌های مهم به کمک خط‌کش و پرگار آشنا می‌شویم.

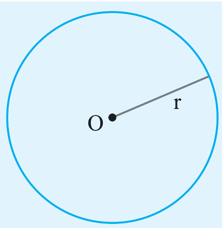
رسم دایره و ویژگی‌های آن

اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۴ سانتی‌متر باز کنیم و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، شعاع این دایره ۴ است. نکته‌ای که در این رسم وجود دارد این است که نقطه‌های روی این دایره نقطه‌هایی هستند که تماماً از O به فاصله‌ی ۴ هستند و برعکس، یعنی هر نقطه‌ای که از O به فاصله‌ی ۴ باشد، باید روی این دایره قرار بگیرد. یعنی، با توجه به شکل «A روی دایره است، پس $OA=۴$».



نتیجه

برای پیدا کردن تمام نقطه‌هایی که از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی معلوم r هستند، کافی است دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنیم.

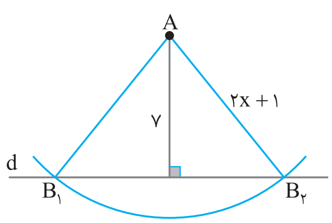


تست ۱

خط d و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۷ از این خط مفروض است. اگر بر روی این خط دو نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله‌ی $۲x+۱$ باشند، x کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

پاسخ: نقطه‌هایی که از A به فاصله‌ی $۲x+۱$ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع $۲x+۱$ قرار دارند. چون روی خط d دو نقطه وجود دارند که از A به فاصله‌ی $۲x+۱$ هستند، پس خط d باید دایره‌ی به مرکز A و شعاع $۲x+۱$ را در دو نقطه قطع کند، یعنی باید $۲x+۱>۷$. پس $۲x>۶$، در نتیجه $x>۳$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

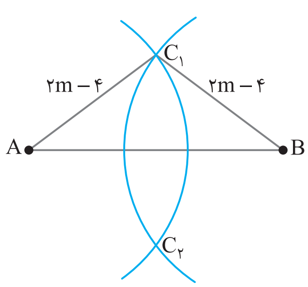


تست ۲

دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۸ از یک‌دیگر مفروض‌اند. اگر در صفحه دو نقطه پیدا شوند که از A و B به فاصله‌ی $۲m-۴$ باشند، حدود m کدام است؟

۱) $m>۵$ **۲)** $m>۸$ **۳)** $m>۴$ **۴)** $m>۶$

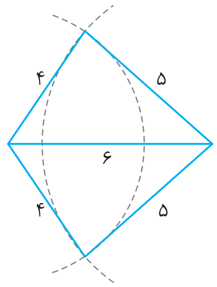
پاسخ: برای پیدا کردن نقطه‌هایی که هم از A و هم از B به فاصله‌ی $۲m-۴$ هستند، کافی است نقطه‌های برخورد دو کمان به مرکزهای A و B و به شعاع $۲m-۴$ را به‌دست آوریم.
این دو کمان، زمانی یک‌دیگر را قطع می‌کنند که $۲m-۴$ از نصف فاصله‌ی A و B بیش‌تر باشد، یعنی $۲m-۴>۴$. پس $۲m>۸$، در نتیجه $m>۴$. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



تست ۳ **برای رسم مثلثی به طول ضلع‌های ۴، ۵ و ۶ حداقل به رسم چند کمان نیاز داریم؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) چنین مثلثی وجود ندارد.

پاسخ: پاره‌خطی به طول ۶ در نظر می‌گیریم. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۴ باز می‌کنیم و به مرکز یکی از دو سر پاره‌خطی که رسم کرده‌ایم، کمانی می‌زنیم (کمان اول).
اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۵ باز می‌کنیم و به مرکز سر دیگر پاره‌خط کمانی می‌زنیم (کمان دوم).
محل برخورد این کمان‌ها و دو سر پاره‌خطی که اول رسم کردیم، سه رأس مثلث مورد نظر هستند. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.



نکته **فرض کنید a، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. برای این که مثلثی به طول ضلع‌های a، b و c وجود داشته باشد، باید**

$$a<b+c,\quad b<a+c,\quad c<a+b$$

تست ۴ **با معلومات $AB=۱۴$، $AC=۸$ و $BC=۶$ چند مثلث قابل ترسیم است؟**

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

پاسخ: در هر مثلث اندازه‌ی هر ضلع از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، در این‌جا اندازه‌ی AB از مجموع اندازه‌های AC و BC کوچک‌تر نیست $(۶+۸\not>۱۴)$، پس چنین مثلثی وجود ندارد. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۵ **با کدام‌یک از سه طول داده شده می‌توان یک مثلث ساخت؟** $(a>۱)$

۱) $۴,\sqrt{۲},\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۱۰},\sqrt{۲},\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵},\sqrt{۲},\sqrt{۳}$ ۴) $a+۱,a-۱,۲a$

پاسخ: با عددهای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) نمی‌توان مثلثی ساخت، زیرا

گزینه‌ی (۱): $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\not>۴$

گزینه‌ی (۲): $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\not>\sqrt{۱۰}$

گزینه‌ی (۴): $(a+۱)+(a-۱)\not>۲a$

اما عددهای گزینه‌ی (۳) در شرط‌های وجود مثلث صدق می‌کنند، یعنی هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر است:

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}>\sqrt{۵},\quad \sqrt{۲}+\sqrt{۵}>\sqrt{۳},\quad \sqrt{۳}+\sqrt{۵}>\sqrt{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۶ **در مثلث ABC، $AB=۷x$، $AC=۲x-۱$ و $BC=۴x+۲$. حدود x برای آن که مثلث ABC وجود داشته باشد، کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۳}<x<۱$ ۲) $\frac{۳}{۵}<x<۲$ ۳) $-\frac{۱}{۳}<x<۲$ ۴) $\frac{۳}{۵}<x<۱$

پاسخ: با توجه به نکته‌ی بیان شده، باید

$$AB<AC+BC,\quad BC<AB+AC,\quad AC<AB+BC$$

یعنی

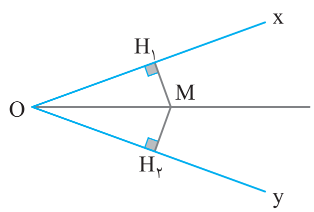
$$۷x<۶x+۱\Rightarrow x<۱,\quad ۴x+۲<۹x-۱\Rightarrow \frac{۳}{۵}<x,\quad ۲x-۱<۱۱x+۲\Rightarrow -\frac{۱}{۳}<x$$

با اشتراک گرفتن از نابرابری‌های بالا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۳}{۵}<x<۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

خاصیت اصلی نیمساز



هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

به عبارت دیگر در شکل مقابل، اگر M روی نیمساز زاویه‌ی xOy باشد، آن‌گاه

$$MH_{۱} = MH_{۲}$$

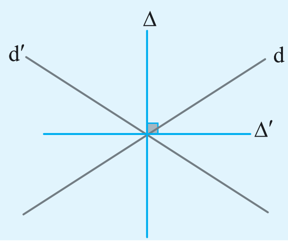
و اگر

$$MH_{۱} = MH_{۲}$$

آن‌گاه M روی نیمساز زاویه‌ی xOy است.

نتیجه

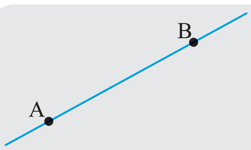
مجموعه‌ی تمام نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله هستند، نیمسازهای زاویه‌های این دو خط هستند که بر هم عمودند (خط‌های Δ و Δ' را در شکل ببینید).



قبل از بیان روش ترسیم نیمساز به نکته‌ی زیر توجه کنید.

نکته

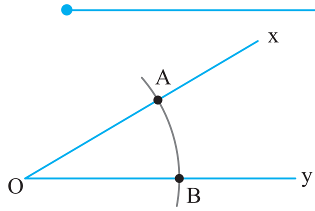
برای این‌که یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل ۲ نقطه از خط را باید داشته باشیم.



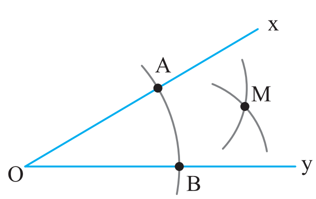
ترسیم نیمساز

می‌خواهیم نیمساز زاویه‌ی xOy را رسم کنیم.

به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند.

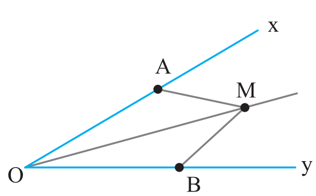


به مرکز A و شعاعی بیش از نصف اندازه‌ی پاره‌خط AB کمانی رسم می‌کنیم و به همین شعاع و به مرکز B کمانی دیگر رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان را M می‌نامیم.



OM نیمساز زاویه‌ی xOy است.

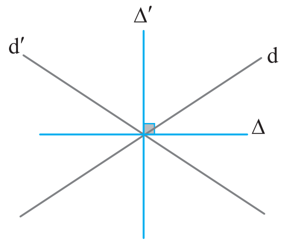
دلیل: دو مثلث OAM و OBM همنهشت‌اند (ض‌ض‌ض).



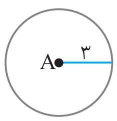
تست ۷ **دو خط متقاطع d و d' و نقطه‌ی A مفروض‌اند. تعداد نقطه‌هایی در صفحه که از d و d' به یک فاصله و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ هستند، کدام نمی‌تواند باشد؟**

۱) صفر   **۲)** ۱   **۳)** ۴   **۴)** نامتناهی

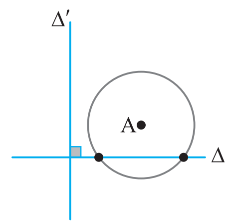
پاسخ: با توجه به شکل، دو خط Δ و Δ' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط d و d' هستند. تمام نقطه‌های روی خط‌های Δ و Δ' از خط‌های d و d' به یک فاصله هستند.



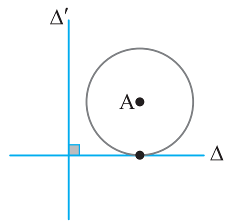
از طرف دیگر، نقطه‌هایی که از A به فاصله‌ی ۳ هستند، نقطه‌های روی دایره‌ی به مرکز A و شعاع ۳ هستند.



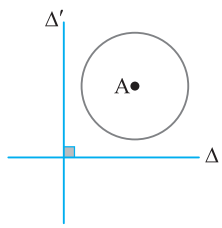
پس نقطه‌ی برخورد نیمسازهای d و d' با این دایره جواب است، که براساس حالت‌های زیر جواب‌های متفاوتی به‌دست می‌آید.



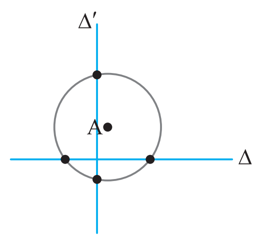
دو جواب



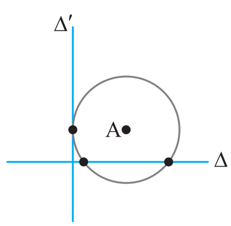
یک جواب



بدون جواب



چهار جواب



سه جواب

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست ۸ **خط مورب L، دو خط موازی d و d' را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. نقطه‌ی برخورد نیمسازهای A و B کدام ویژگی را دارد؟**

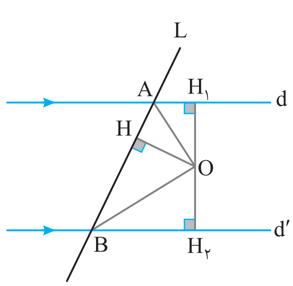
۱) نسبت فاصله‌هایش از دو خط d و d' برابر ۱ به ۲ است.

۲) فقط از دو خط d و d' به فاصله‌ی یکسان قرار دارد.

۳) از هر سه خط d، d' و L به یک فاصله است.

۴) نسبت فاصله‌هایش از دو خط d و d' برابر ۲ به ۳ است.

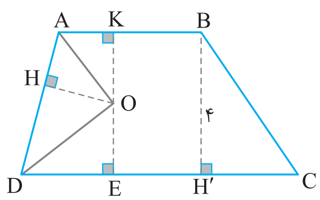
پاسخ: اگر نقطه‌ی O نقطه‌ی برخورد نیمسازهای A و B باشد، چون هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس $OH = OH_1$ و $OH = OH_2$. بنابراین $OH = OH_1 = OH_2$، پس O از هر سه خط d، d' و L به یک فاصله است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



تست ۹

ارتفاع ذوزنقه‌ای برابر ۴ است. مجموع فاصله‌های نقطه‌ی برخورد دو نیمساز دو زاویه‌ی مجاور به ساق این ذوزنقه از دو قاعده و این ساق برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴



پاسخ: شکل مسئله به صورت مقابل است.

اگر O نقطه‌ی برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و D باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} \text{O روی نیمساز } \hat{A} \text{ قرار دارد} \Rightarrow OH=OK \\ \text{O روی نیمساز } \hat{D} \text{ قرار دارد} \Rightarrow OE=OH \end{cases} \Rightarrow OH=OK=OE$$

همان‌طور که معلوم است $OK+OE=BH'$ و چون $OK=OE$

پس $OK=\frac{BH'}{۲}$. بنابراین

$$OH+OK+OE=\frac{۳BH'}{۲}=۳(\frac{۴}{۲})=۶$$

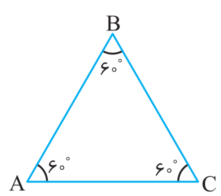
بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۱۰

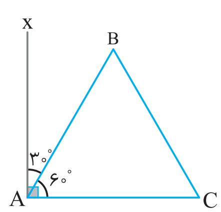
چندتا از زاویه‌های ۱۵°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۷۵° به کمک خط‌کش و پرگار قابل رسم‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: تمام زاویه‌های داده شده را می‌توان با خط‌کش و پرگار رسم کرد.

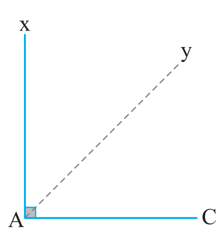


۱) زاویه‌ی ۶۰°: کافی است مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنیم. در این حالت زاویه‌ی BAC برابر ۶۰° است.



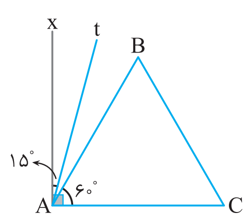
۲) زاویه‌ی ۳۰°: از نقطه‌ی A، عمود Ax را بر AC رسم می‌کنیم (شکل را ببینید). در این صورت

$$B\hat{A}x=۳۰^\circ$$



۳) زاویه‌ی ۴۵°: اگر نیمساز زاویه‌ی قائمه‌ی CAx را رسم کنیم (Ay در شکل)، در این صورت

$$x\hat{A}y=۴۵^\circ$$



۴) زاویه‌ی ۱۵°: نیمساز زاویه‌ی BAx را رسم می‌کنیم (At در شکل). در این صورت

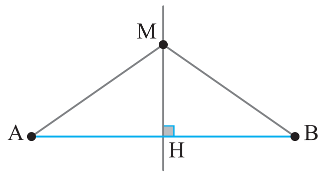
$$x\hat{A}t=۱۵^\circ$$

۵) زاویه‌ی ۷۵°: به شکل قسمت (۴) نگاه کنید:

$$t\hat{A}C=t\hat{A}B+B\hat{A}C \Rightarrow ۱۵^\circ+۶۰^\circ=۷۵^\circ$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

خاصیت اصلی عمودمنصف

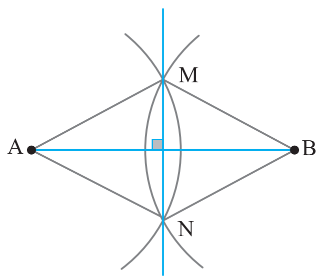


هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.
به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر M روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه

$$MA = MB$$

و برعکس، اگر $MA = MB$، آن‌گاه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است.

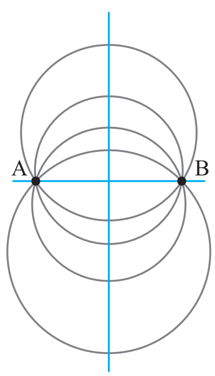
ترسیم عمودمنصف



می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم. دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف AB باز می‌کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع کمان می‌زنیم. این دو کمان یک‌دیگر را در نقطه‌های M و N قطع می‌کنند. چون M و N از A و B به یک فاصله هستند، پس خطی که از M و N می‌گذرد عمودمنصف پاره‌خط AB است.

تست ۱۱ **از دو نقطه‌ی متمایز A و B نامتناهی دایره می‌گذرد. مرکز این دایره‌ها همواره کجا واقع هستند؟**

۱) روی عمودمنصف AB
۲) روی دو خط موازی AB
۳) روی دایره‌ای به قطر AB
۴) روی هر خط گذرنده از وسط AB

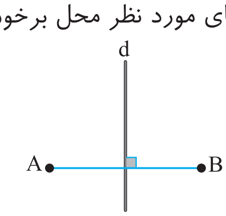


پاسخ: مرکز همه‌ی دایره‌هایی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرند از این دو نقطه به یک فاصله‌اند. پس مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

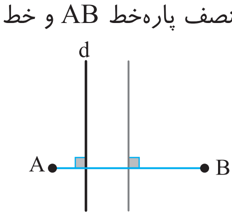
تست ۱۲ **پاره‌خط AB و خط d مفروض‌اند. تعداد نقطه‌های روی خط d که از نقطه‌های A و B به یک فاصله هستند، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟**

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) نامتناهی

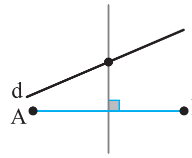
پاسخ: نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. بنابراین نقطه‌های مورد نظر محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط d هستند. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:



نامتناهی جواب



بدون جواب



یک جواب

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۱۳

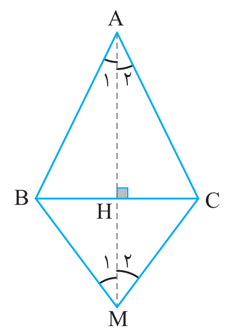
دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده‌ای مشترک دارند. خط گذرا از دو رأس مقابل این دو مثلث کدام ویژگی را دارد؟

۱) روی نیمساز زاویه‌ی مقابل به قاعده‌ی مشترک است.

۲) روی عمودمنصف قاعده‌ی مشترک است.

۳) بر قاعده‌ی مشترک عمود است.

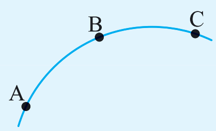
۴) هر سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳) می‌توانند درست باشند.



پاسخ: مطابق شکل، فرض می‌کنیم دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و MBC در قاعده‌ی BC مشترک‌اند. چون $AB=AC$، پس A روی عمودمنصف BC است و چون $MB=MC$، پس M روی عمود منصف BC است. بنابراین AM عمودمنصف قاعده‌ی BC است. از طرف دیگر، دو مثلث ABM و ACM به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند. بنابراین $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{M}_1=\hat{M}_2$، پس AM نیمساز است. در ضمن واضح است که AM بر قاعده‌ی مشترک BC عمود است. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست ۱۴

در شکل مقابل، قسمتی از یک دایره رسم شده است. برای پیدا کردن مرکز این دایره کدام روش درست است؟



۱) رسم ارتفاع‌های مثلث ABC

۲) رسم نیمسازهای مثلث ABC

۳) پیدا کردن قرینه‌ی B نسبت به AC

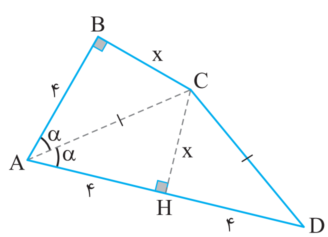
۴) رسم عمودمنصف‌های AC و AB

پاسخ: چون A، B و C روی دایره قرار دارند، پس فاصله‌ی مرکز دایره تا این سه نقطه یکسان است. چون مرکز دایره از این سه نقطه به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف‌های AB و AC قرار دارد. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست ۱۵

در چهارضلعی ABCD، $\hat{B}=90^\circ$. رأس C محل تقاطع نیمساز زاویه‌ی داخلی A و عمودمنصف ضلع AD است، $AB=4$ و مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۱۸ است. محیط چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) ۱۶ **۲)** ۱۸ **۳)** ۲۰ **۴)** ۲۴



پاسخ: نقطه‌ی C روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد، پس

$$BC=CH=x$$

و با توجه به همنهشت بودن دو مثلث ABC و AHC نتیجه می‌شود

$$AB=AH=4$$

از طرف دیگر نقطه‌ی C روی عمودمنصف ضلع AD قرار دارد، پس

$$AC=CD,\quad AH=HD=4$$

با توجه به شکل،

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}\Rightarrow 18=\frac{4x}{2}+\frac{8x}{2}\Rightarrow x=3$$

$$\Delta ABC: AC^2=x^2+AB^2=9+16=25\Rightarrow AC=5$$

بنابراین محیط چهارضلعی ABCD برابر است با

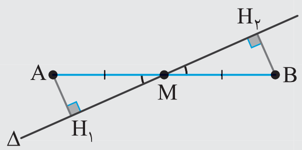
$$\text{محیط}=AB+BC+CD+DA=4+3+5+8=20$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

نکته پاره‌خط AB را در نظر بگیرید. خط دلخواه Δ از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. دو نقطه‌ی A و B از این خط به یک فاصله‌اند (این مطلب با همنهشتی دو مثلث AMH_1 و BMH_2 به سادگی ثابت می‌شود).

به عبارت دیگر

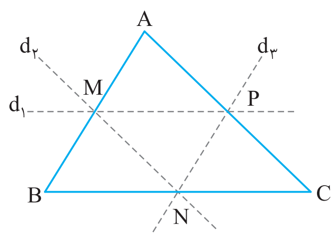
«اگر خطی از وسط یک پاره‌خط بگذرد، آن‌گاه دو سر پاره‌خط از آن خط به یک فاصله‌اند.»



تست ۱۶ در صفحه‌ی مثلث ABC چند خط وجود دارد که سه رأس مثلث از آن خطوط به یک فاصله‌اند؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۳ **۴)** نامتناهی

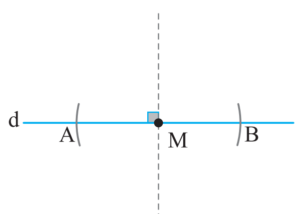
پاسخ: دیدیم که اگر خطی از وسط یک پاره‌خط بگذرد، آن‌گاه دو سر پاره‌خط از آن به یک فاصله‌اند، پس سه رأس مثلث از خطی که از وسط دو ضلع مثلث می‌گذرد به یک فاصله هستند. در نتیجه سه خط با چنین ویژگی وجود دارند (خطوط d_1، d_2 و d_3 را در شکل ببینید). بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



رسم خط عمود بر یک خط

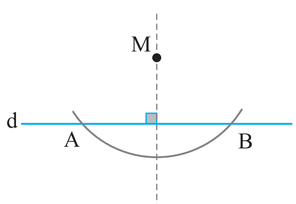
حالت اول: نقطه روی خط است

به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d را A و B می‌نامیم. عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که از M می‌گذرد و بر d عمود است.



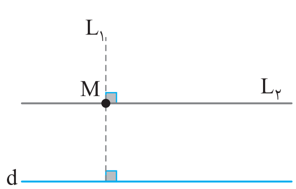
حالت دوم: نقطه خارج خط است

به مرکز M کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند. عمودمنصف AB از M می‌گذرد و بر d عمود است.



رسم خطی موازی یک خط، از نقطه‌ای خارج آن

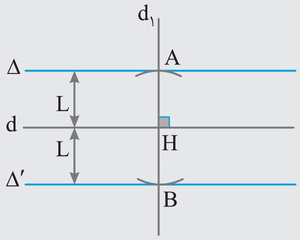
از نقطه‌ی M خط L_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم. سپس خط L_2 را طوری رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر L_1 عمود باشد. چون دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند، پس L_2 خطی موازی d است که از M می‌گذرد.



نکته مجموعه‌ی نقطه‌هایی که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله هستند خطی است موازی آن‌ها و به فاصله‌ای برابر از آن‌ها (خط Δ را در شکل ببینید).

نکته

خط d را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن تمام نقطه‌هایی که از این خط به فاصله‌ی معلوم L هستند، خط d_1 را عمود بر d رسم می‌کنیم. به مرکز H (محل برخورد d و d_1) و شعاع L دایره‌ای رسم می‌کنیم تا d_1 را در نقطه‌های A و B قطع کند. خط‌های گذرنده از A و B و موازی d مجموعه‌ی نقطه‌هایی هستند که از d به فاصله‌ی L هستند (دو خط Δ و Δ' در شکل).

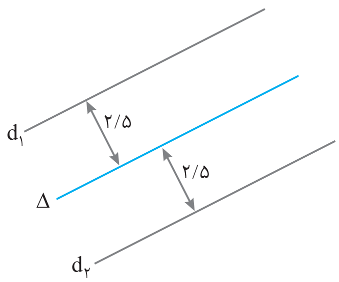


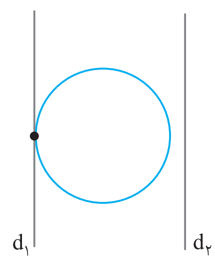
تست ۱۷

حداکثر چند نقطه روی دایره‌ی C به شعاع R وجود دارد که از خط Δ به فاصله‌ی ۲/۵ هستند؟

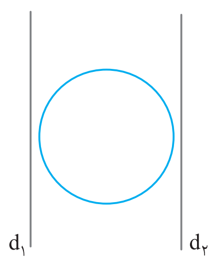
۱) دو نقطه **۲)** سه نقطه **۳)** یک نقطه **۴)** چهار نقطه

پاسخ: نقطه‌هایی از صفحه که از خط Δ به فاصله‌ی ۲/۵ هستند، دو خط موازی Δ هستند (خطوط d_1 و d_2 در شکل را ببینید). جواب‌های مسئله، محل برخورد d_1 و d_2 با دایره‌ی C است که با توجه به حالت‌های زیر، جواب‌ها را مشخص کرده‌ایم.

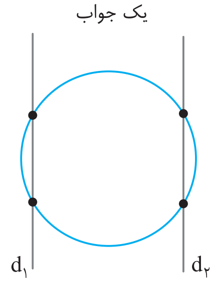




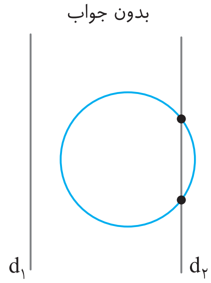
یک جواب



بدون جواب



چهار جواب



دو جواب

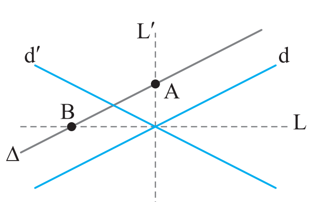
بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست ۱۸

دو خط d و d' متقاطع هستند و خط Δ موازی یکی از این دو خط است. چند نقطه روی Δ وجود دارد که از d و d' به یک فاصله هستند؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** نامتناهی

پاسخ: با توجه به شکل مقابل، L و L' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط d و d' هستند. می‌دانیم هر نقطه روی L و L' از d و d' به یک فاصله است. در نتیجه نقطه‌ی برخورد Δ با این دو خط جواب است. از طرف دیگر، چون Δ با d یا d' موازی است، پس حتماً L و L' را قطع می‌کند و مسئله دو جواب دارد. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

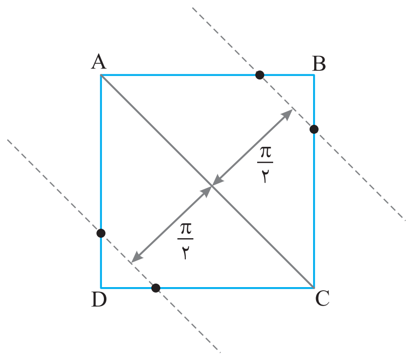


تست ۱۹ **مربع ABCD به طول ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع ABCD وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر $\frac{\pi}{۲}$ است؟**

۱) ۴ **۲)** ۲ **۳)** ۱ **۴)** صفر

پاسخ: نقطه‌هایی که از قطر AC به فاصله‌ی $\frac{\pi}{۲}$ هستند، دو خط موازی با AC و به فاصله‌ی $\frac{\pi}{۲}$ از آن هستند. پس تعداد نقطه‌های برخورد این خط‌ها با مربع، تعداد جواب‌ها است.

طول قطر مربع به ضلع ۳ برابر $۳\sqrt{۲}$ است و چون در مربع قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند و $\frac{\pi}{۲}<\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$، پس دو خط موازی AC مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.



رسم مثلث

گاهی در مسئله‌ها اطلاعاتی را در مورد مثلث به ما می‌دهند و می‌خواهند که تعداد مثلث‌های قابل رسم با این اطلاعات را به‌دست آوریم.

درباره‌ی این مسئله‌ها به دو مطلب زیر دقت کنید:

۱) در مسئله‌های ترسیم، شکل‌های همنهشت را یکی حساب می‌کنیم.

۲) بد نیست قراردادهای زیر را بدانید:

در مثلث ABC

الف) طول ضلع‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$BC=a,\quad AC=b,\quad AB=c$$

ب) طول ارتفاع‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$AH_{۱}=h_a,\quad BH_{۲}=h_b,\quad CH_{۳}=h_c$$

پ) طول میانه‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

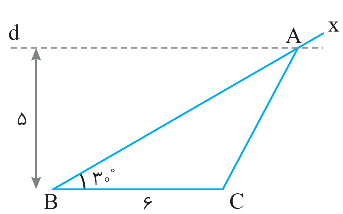
$$AM_{۱}=m_a,\quad BM_{۲}=m_b,\quad CM_{۳}=m_c$$

تست ۲۰ **چند مثلث مانند ABC وجود دارد که در آن $BC=۶$، $\hat{B}=۳۰^\circ$ و ارتفاع AH به طول ۵ است؟**

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** نامتناهی

پاسخ: پاره‌خط BC به طول ۶ و زاویه‌ی xBC به اندازه‌ی ۳۰° را رسم می‌کنیم.

چون طول AH برابر ۵ است، پس فاصله‌ی A از ضلع BC برابر ۵ است، یعنی A روی خطی موازی BC و به فاصله‌ی ۵ از آن قرار دارد. در نتیجه خط d را موازی BC و به فاصله‌ی ۵ از آن رسم می‌کنیم (خط d در شکل). محل برخورد این خط با Bx رأس A است. بنابراین مسئله یک جواب دارد. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

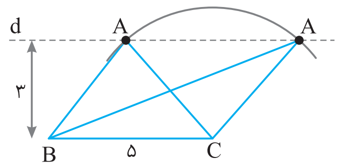


تست ۲۱ **چند مثلث مانند ABC می‌توان رسم کرد که در آن $BC=۵$، $AC=۴$ و طول ارتفاع AH برابر ۳ است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: ابتدا پاره‌خط BC را به طول ۵ رسم می‌کنیم. خط d را موازی BC و به فاصله‌ی ۳ از آن رسم می‌کنیم (رأس A روی این خط است).

اکنون به مرکز C و شعاع ۴ کمان می‌زنیم. محل برخورد این کمان با خط d رأس A است. چون این کمان d را در دو نقطه قطع می‌کند، مسئله دو جواب دارد. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



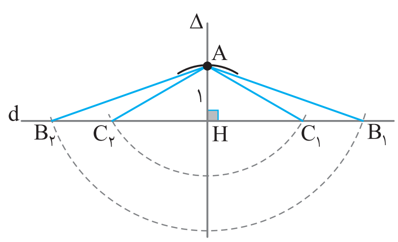
تست ۲۲ **با معلومات $h_a=۱$، $b=۲$ و $c=۳$ (دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم)، چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) نامتناهی ۴) صفر

پاسخ: با توجه به اطلاعات مسئله، $AC=۲$، $AB=۳$ و ارتفاع AH به طول ۱ است. خط دلخواه d را رسم می‌کنیم. خط دلخواه Δ را عمود بر d رسم می‌کنیم و محل برخورد Δ و d را H می‌نامیم.

به مرکز H و شعاع ۱ کمان می‌زنیم و محل برخورد آن با Δ را رأس A در نظر می‌گیریم. به مرکز A و شعاع ۲ کمانی می‌زنیم و محل برخورد آن با d را رأس C می‌نامیم (دقت کنید که این کمان خط d را در دو نقطه قطع می‌کند. ما آن‌ها را در شکل $C_۱$ و $C_۲$ نامیده‌ایم).

اکنون به مرکز A و شعاع ۳ کمان دیگری می‌زنیم و محل برخورد آن با خط d را رأس B می‌نامیم ($B_۱$ و $B_۲$ را در شکل ببینید). در شکل ۴ مثلث دیده می‌شود که دوتا از آن‌ها با دوتای دیگر همنهشت‌اند، پس مسئله دو جواب دارد. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

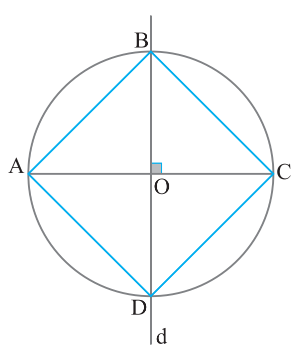


رسم چندضلعی‌ها

تست ۲۳ **طول قطر مربعی برابر ۵ است. چند مربع با این ویژگی می‌توان رسم کرد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

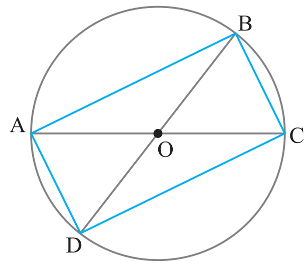
پاسخ: پاره‌خط AC به طول ۵ را رسم می‌کنیم. خط d، عمودمنصف AC، را رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط (d) با پاره‌خط AC را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع $\frac{۵}{۲}=۲/۵$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d را نقطه‌های B و D می‌نامیم. مربع ABCD جواب مسئله است. واضح است که چنین مربعی منحصر به فرد است. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.



تست ۲۴

چند مستطیل با قطر به طول ۶ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** نامتناهی



پاسخ: می‌دانیم در مستطیل قطرها با هم برابر و منصف یک‌دیگرند. دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{۶}{۲}=۳$ رسم می‌کنیم. دو قطر دلخواه از این دایره را رسم می‌کنیم (AC و BD در شکل). دو سر این قطرها رأس‌های مستطیل مورد نظر هستند (ABCD در شکل).

چون دایره به تعداد نامتناهی قطر دارد، پس به تعداد نامتناهی مستطیل با این ویژگی‌ها می‌توان رسم کرد. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست ۲۵

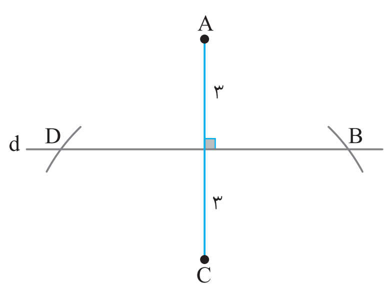
طول ضلع یک لوزی ۵ و طول یکی از قطرهای آن ۶ است. چند لوزی با این ویژگی می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۴ **۴)** نامتناهی

پاسخ: این لوزی منحصر به فرد است. روش رسم به صورت زیر است:

ابتدا پاره‌خط AC به طول ۶ را رسم می‌کنیم.

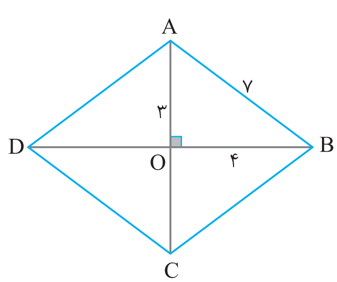
عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم (خط d). به مرکز A یا C و شعاع ۵ کمان می‌زنیم تا عمودمنصف AC را در دو نقطه‌ی B و D قطع کند (شکل دوم را ببینید). چهارضلعی ABCD لوزی مورد نظر است. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.



تست ۲۶

چند لوزی با قطرهای به طول‌های ۸ و ۶ و طول ضلع ۷ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** نامتناهی

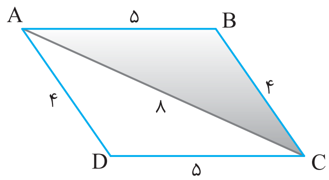


پاسخ: مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. می‌دانیم در لوزی قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند. پس با توجه به اطلاعات داده شده و شکل مقابل طول ضلع‌های مثلث OAB برابر ۳، ۴ و ۷ است. از طرف دیگر، در لوزی قطرها بر هم عمودند. پس این مثلث (مثلث OAB) قائم‌الزاویه است. اما طول ضلع‌های این مثلث در قضیه‌ی فیثاغورس صدق نمی‌کنند ($۷^{۲} \neq ۳^{۲}+۴^{۲}$)، درنتیجه چنین لوزی‌ای وجود ندارد. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۲۷

چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد، که در آن طول ضلع‌ها ۴ و ۵ و طول یکی از قطرهای آن ۸ باشد؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** نامتناهی

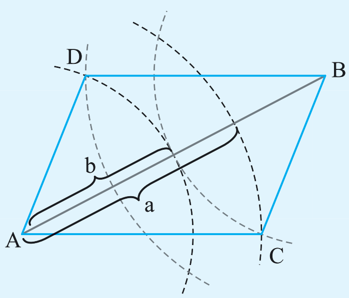


پاسخ: فرض می‌کنیم ABCD متوازی‌الاضلاع مورد نظر باشد. چون در مثلث ABC طول سه ضلع معلوم است و در نامساوی مربوط به طول ضلع‌ها صدق می‌کنند $(۸<۵+۴)$ این مثلث قابل رسم و منحصر به فرد است.

با استدلالی مشابه مثلث ACD به صورت منحصر به فرد قابل رسم است. پس متوازی‌الاضلاع ABCD وجود دارد و منحصر به فرد است. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۲۸

پاره‌خط AB داده شده است. دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه‌ی a و بار دیگر به اندازه‌ی b باز می‌کنیم و از نقطه‌ی A دو کمان می‌زنیم. سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطه‌ی B می‌زنیم و مانند شکل دو نقطه از نقطه‌های برخورد را C و D می‌نامیم. در کدام حالت ACBD متوازی‌الاضلاع است؟

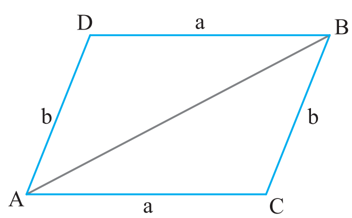


۱) $a=۲$، $b=۱$ و $AB=۶$

۲) $a=۴$، $b=۳$ و $AB=۵$

۳) $a=۳$، $b=۲$ و $AB=۵$

۴) هر سه مورد



پاسخ: برای سادگی کار شکل را بدون رسم کمان‌ها در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که در چهارضلعی ACBD، ضلع‌های مقابل با هم برابرند و می‌دانیم اگر در یک چهارضلعی ضلع‌های مقابل با هم برابر باشند، آن‌گاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. پس ACBD متوازی‌الاضلاع است. اما نکته‌ای که در این مسئله وجود دارد آن است که مثلث ABC باید قابل رسم باشد، یعنی

$$AB<a+b$$

در بین گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی (۲) در این رابطه صدق می‌کند. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.