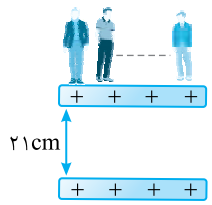
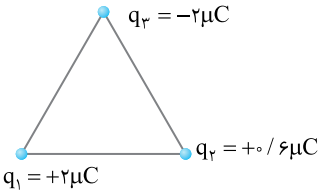
۶۱- دو میله‌ی نارسانای باردار که بار هریک $۴C$ است مطابق شکل یکی بر سطح زمین و دیگری در فاصله‌ی ۲ کیلومتری از آن در بالای میله اول قرار دارد، چند نفر که جرم هریک ۵۰ کیلوگرم است می‌توانند روی میله‌ی بالایی بایستند تا میله در جای خود ساکن بماند؟ (جرم هر میله یک تن است.)



۶۲- * سه ذره‌ی باردار در سه رأس مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $۶cm$ ثابت شده‌اند. بزرگی نیروی الکتریکی برآیند وارد بر بار $q_۲$ را بر حسب نیوتون به دست آورید. (ریاضی - شهریور ۹۳)

$$(k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲}\ ,\ \cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲})$$

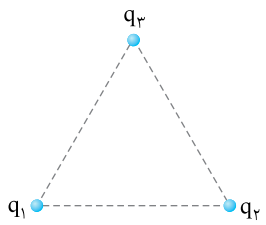


۶۳- * سه ذره‌ی باردار مطابق شکل در سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ سانتی‌متر ثابت شده‌اند: (تجربی - مرداد ۹۱)

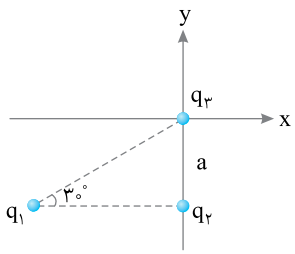
الف) نیروی الکتریکی وارد بر بار $q_۳$ چند نیوتون است؟

ب) جهت نیروی الکتریکی وارد بر بار $q_۳$ را با رسم شکل نشان دهید.

$$(q_۱=-۴\mu C\ ,\ q_۲=۴\mu C\ ,\ q_۳=۵\mu C\ ,\ k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲}\ ,\ \cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲})$$



۶۴- * در شکل روبه‌رو، $q_۱=q_۲=q_۳=۱۰\mu C$ و $a=۵۰cm$ است. برآیند نیروی الکتریکی وارد بر بار $q_۳$ را بر حسب بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ مشخص کنید.



بخش سوم: میدان الکتریکی

میدان الکتریکی

در زندگی روزمره هرگاه شما بخواهید بر جسمی نیرو وارد کنید (آن را بکشید یا هُل دهید)، باید با آن تماس برقرار کنید، یعنی جسم را لمس کنید و بر آن نیرو وارد کنید و اگر یک شعبده‌باز را ببینید که بدون دست زدن به یک جسم آن را از زمین بلند می‌کند، دائما به دنبال نخ‌های نامرئی می‌گردید که شعبده‌باز به کمک آن‌ها جسم را از زمین بلند می‌کند و باور ندارید که بدون تماس بتوان به جسم نیرو وارد کرد و مثلاً آن را از زمین جدا کرد.

اما جالب است که هرگاه یک شانه‌ی پلاستیکی را با موی سر خود مالش می‌دهید و آن را باردار می‌کنید و با نزدیک کردن شانه به ذرات کاغذ شاهد ربوده شدن ذرات کاغذ توسط شانه می‌شوید، متعجب نمی‌شوید. انگار باور دارید در اطراف این شانه‌ی پلاستیکی باردار خاصیتی وجود دارد که قادر است بدون تماس با ذرات کاغذ آن‌ها را برباید و البته این حس شما درست است. این خاصیت فضای اطراف جسم باردار را که بر اجسام دیگر نیرو وارد می‌کند، **میدان الکتریکی** گویند.

تعریف ◀ **در فضای اطراف هر جسم باردار خاصیتی ایجاد می‌شود که هر جسم دیگری را که در این فضا واقع شود، تحت تأثیر قرار می‌دهد. به این خاصیت میدان الکتریکی می‌گویند.**

به بیان دیگر، میدان الکتریکی خاصیتی است که در اطراف هر جسم باردار ایجاد می‌شود، به گونه‌ای که هرگاه جسم باردار دیگری در این فضا قرار گیرد، بر آن نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

تعریف کمّی میدان الکتریکی: میدان الکتریکی به طور کمّی به صورت نیروی وارد بر یکای بار مثبت در هر نقطه تعریف می‌شود. مطابق شکل زیر، بار نقطه‌ای $+q_۰$ را در نظر بگیرید که در میدان الکتریکی بار $+q$ و در نقطه‌ی A قرار گرفته است و نیروی $\vec{F}$ به آن وارد می‌شود. اگر میدان الکتریکی حاصل از بار $+q$ در نقطه‌ی A را با $\vec{E}$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_۰}$$

۱- مسأله‌های ستاره‌دار جزء برنامه رسمی کتاب درسی نیست.

با توجه به رابطه‌ی $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$، یکای میدان الکتریکی نیوتون بر کولن $(\frac{N}{C})$ است.

ضرب عدد در بردار:

در صفحه‌ی ۷۵ کتاب ریاضی پایه‌ی هشتم ضرب عدد در بردار را خوانده‌اید:

یادآوری

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.

بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

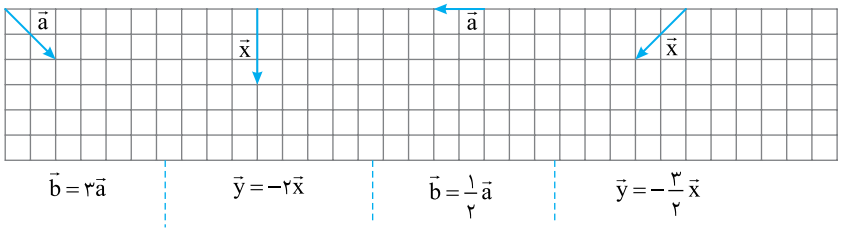
$$k\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$$

اگر بردار b قرینهٔ بردار a باشد، می‌نویسیم: $\vec{b}=(-1)\vec{a}$ یا $\vec{b}=-\vec{a}$

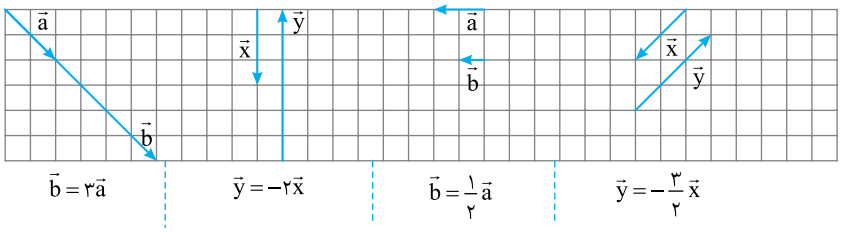
$$\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\rightarrow\vec{b}=-\vec{a}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$$

کار در کلاس صفحه‌ی ۷۵ کتاب ریاضی هشتم:

با توجه به بردارهای داده شده، بردار موردنظر را رسم کنید.



پاسخ: با توجه به ضرب عدد در بردار، حاصل‌ضرب یک عدد مانند k در یک بردار مانند a بردار جدیدی مانند b است که طول آن k برابر بردار a است. اگر k مثبت باشد $\vec{b}$ و $\vec{a}$ هم‌جهتند و اگر k عددی منفی باشد بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ درخلاف جهت هم هستند. اکنون بردارها را رسم می‌کنیم.



اکنون به رابطه‌ی $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$ دقت کنید، $\vec{E}$ در واقع حاصل‌ضرب کمیت عددی $\frac{1}{q_0}$ در بردار $\vec{F}$ است.

مسأله ۳۱ **ذره‌ای با بار $q=+5\mu C$ در یک میدان الکتریکی قرار دارد و بر آن نیروی الکتریکی $1/5N$ وارد می‌شود.**

الف) میدان الکتریکی در محل ذره چند $\frac{N}{C}$ است؟

ب) اگر بار $q=-2\mu C$ را در همان نقطه قرار دهیم، نیروی وارد بر آن توسط میدان چند نیوتون است؟

راه‌حل: الف) با توجه به تعریف میدان الکتریکی:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}\Rightarrow E=\frac{1/5}{5\times10^{-6}}\Rightarrow E=3\times10^5\ \frac{N}{C}$$

بار q مثبت است و نیرو و میدان هم‌جهت هستند.

ب) نیروی وارد بر بار منفی خواهد شد:

$$\vec{F}=q_0\vec{E}\Rightarrow F=-2\times10^{-6}\times3\times10^5\Rightarrow F=-0/6N\Rightarrow|\vec{F}|=0/6N$$

مفهوم این علامت منفی این است که نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

مسأله ۳۲ بر بار $q=-۲\,mC$ در یک میدان الکتریکی نیروی $\vec{F}=۶\times۱۰^{-۴}\vec{i}-۸\times۱۰^{-۴}\vec{j}$ وارد می‌شود:

الف) میدان الکتریکی در محل بار q را بر حسب بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به‌دست آورید.

ب) بزرگی میدان الکتریکی چند نیوتون بر کولن است؟

راه‌حل: الف) با توجه به تعریف میدان الکتریکی:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}\Rightarrow\vec{E}=\frac{۶\times۱۰^{-۴}\vec{i}-۸\times۱۰^{-۴}\vec{j}}{-۲\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow\vec{E}=-۰/۳\vec{i}+۰/۴\vec{j}$$

ب) بزرگی میدان الکتریکی برابر است با:

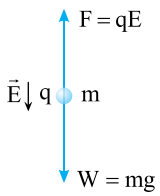
$$|\vec{E}|=\sqrt{E_x^۲+E_y^۲}=\sqrt{(-۰/۳)^۲+(۰/۴)^۲}\Rightarrow|\vec{E}|=۰/۵\,\frac{N}{C}$$

نیروی وارد بر بار الکتریکی در میدان الکتریکی

هرگاه بار q در میدان الکتریکی قرار گیرد، بر آن نیروی $\vec{F}=q\vec{E}$ وارد می‌شود. اگر بار q مثبت باشد، جهت نیروی وارد بر آن در جهت میدان الکتریکی و اگر بار q منفی باشد، جهت نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

مسأله ۳۳ **ذره‌ای با بار $-۵\mu C$ و جرم $۲۰mg$ در یک میدان الکتریکی، معلق و در حال تعادل است، اندازه‌ی میدان و جهت آن را مشخص کنید.** $(g=۱۰\,\frac{N}{kg})$

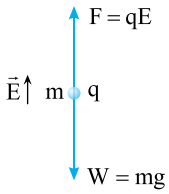
راه‌حل: ذره، معلق و در حال تعادل است، بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن صفر است. نیروی وزن می‌خواهد جسم را به پایین بکشد، بنابراین میدان الکتریکی باید به این ذره‌ی باردار نیروی F را مطابق شکل رو به بالا وارد کند. چون بار جسم منفی است، بنابراین جهت میدان الکتریکی رو به پایین است و اندازه‌ی آن خواهد شد:



$$\vec{F}_T=۰\Rightarrow W=F\Rightarrow mg=|q|E\Rightarrow(۲۰\times۱۰^{-۶})\times۱۰=۵\times۱۰^{-۶}\times E\Rightarrow E=۴۰\,\frac{N}{C}$$

مسأله ۳۴ **گلوله‌ای به جرم ۱۰ گرم با بار الکتریکی $+۵\,\mu C$ را در یک میدان الکتریکی که مقدار آن در تمام نقاط $۳\times۱۰^۴\,\frac{N}{C}$ و جهت آن در امتداد قائم و رو به بالا است، رها می‌کنیم. اندازه و جهت شتاب گلوله را بیابید.** $(g=۱۰\,\frac{N}{kg})$

راه‌حل: بار الکتریکی گلوله مثبت و جهت میدان الکتریکی رو به بالا است. نیروی وارد بر بار مثبت در جهت میدان (رو به بالا) خواهد بود (مطابق شکل):



$$F=qE=۵\times۱۰^{-۶}\times۳\times۱۰^۴=۰/۱۵\ N$$

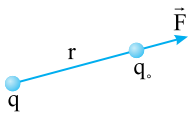
$$W=mg=۰/۰۱\times۱۰\Rightarrow W=۰/۱\ N$$

نتیجه می‌گیریم برایند نیروهای وارد بر گلوله رو به بالا خواهد بود و شتاب نیز بنا به قانون دوم نیوتون رو به بالا است و اندازه‌ی آن برابر است با:

$$\vec{F}_T=m\vec{a}\Rightarrow۰/۱۵-۰/۱=۰/۰۱a\Rightarrow a=۵\,\frac{m}{s^۲}$$

میدان الکتریکی بار نقطه‌ای

برای یافتن میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی r از آن، مطابق شکل بار آزمون $q_۰$ (۱) را در فاصله‌ی r از آن قرار می‌دهیم. بزرگی نیرویی که توسط بار q بر بار $q_۰$ وارد می‌شود، برابر است با: $F=k\frac{|q|q_۰}{r^۲}$



بنا به تعریف میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا $(\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_۰})$ خواهیم داشت:

$$E=k\frac{|q|}{r^۲}$$

۱- بار آزمون به بار مثبت بسیار کوچکی گفته می‌شود که هرگاه در یک میدان الکتریکی قرار می‌گیرد آرایش میدان را به هم نمی‌زند.

تذکر: میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در هر نقطه از فضا، همواره در راستای خطی است که بار را به نقطه‌ی موردنظر وصل می‌کند.

مسأله ۳۵ **اختلاف بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی ۴ و ۵ متری از آن برابر $۹\frac{N}{C}$ است. بزرگی میدان در فاصله‌ی ۱ متری از بار نقطه‌ای q چند نیوتون بر کولن است؟**

راه‌حل: با توجه به رابطه‌ی اندازه‌ی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی r خواهیم داشت:

$$E=k\frac{|q|}{r^2}\Rightarrow\begin{cases}E_1=۹\times۱۰^۹\times\frac{|q|}{(۴)^2}\\E_2=۹\times۱۰^۹\times\frac{|q|}{(۵)^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{E_1}{E_2}=\frac{۲۵}{۱۶}$$

از طرفی داریم:

$$E_1-E_2=۹\Rightarrow E_1-\frac{۱۶}{۲۵}E_1=۹\Rightarrow\frac{۲۵E_1-۱۶E_1}{۲۵}=۹\Rightarrow E_1=۲۵\frac{N}{C}$$

بنابراین میدان در نقطه‌ای به فاصله‌ی یک متری بار نقطه‌ای q که آن را E_3 می‌نامیم، خواهد شد:

$$\frac{E_3}{E_1}=(\frac{r_1}{r_3})^2\Rightarrow\frac{E_3}{۲۵}=(\frac{۴}{۱})^2\Rightarrow E_3=۴۰۰\frac{N}{C}$$

تست ۶: بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌ی ۲cm از بار نقطه‌ای q_1، برابر E و در فاصله‌ی ۳cm از بار نقطه‌ای q_2 برابر $\frac{۳}{۲}E$ است.

نسبت $\frac{|q_1|}{|q_2|}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۲۷}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۲۷}{۸}$

پاسخ: رابطه‌ی بزرگی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای را در دو حالت می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$E=k\frac{|q|}{r^2}\Rightarrow\begin{cases}E=k\frac{|q_1|}{۲^2\times۱۰^{-۴}}\\\frac{۳}{۲}E=k\frac{|q_2|}{۳^2\times۱۰^{-۴}}\end{cases}\Rightarrow\frac{E}{\frac{۳}{۲}E}=\frac{|q_1|}{|q_2|}\times\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{|q_1|}{|q_2|}\times\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{|q_1|}{|q_2|}=\frac{۸}{۲۷}$$

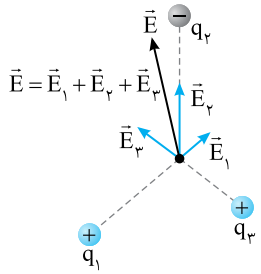
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

میدان الکتریکی ناشی از چند بار نقطه‌ای

برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی ناشی از چند بار نقطه‌ای در یک نقطه از فضا، از **اصل برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی** استفاده می‌کنیم.

بنا بر اصل برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی، میدان الکتریکی ناشی از چند بار الکتریکی در نقطه‌ای از فضا، برابر مجموع میدان‌هایی است که هر بار در نبود سایر بارها در آن نقطه از فضا ایجاد می‌کند:

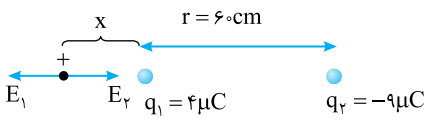
$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\dots$$



میدان الکتریکی $\vec{E}$ در محل بار آزمون، جمع برداری میدان های $\vec{E}_1$، $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ در محل این بار است.

مسأله ۳۶ دو بـار الکتریکـی $q_1 = 4\,\mu C$ و $q_2 = -9\,\mu C$ در فاصله‌ی $r = 60\,cm$ از هم قرار دارنـد. در چه نقطه‌ای برایند میدان الکتریکی دو بار صفر می‌شود؟

راه‌حل: نقطـه‌ای کـه در آن اندازه‌ی میـدان الکتریکـی دو بار برابر می‌شـود، باید به بار کوچک‌تر نزدیک‌تر باشد. از طرفی، میدان‌ها باید یک‌دیگـر را خنثی کنند، بنابراین باید در خلاف جهت هم باشـند. در نتیجه نقطه‌ی مورد نظر باید در خارج خط واصل دو بار باشد.



برای تعیین جهت میدان در یک نقطه یک بار فرضی مثبت در آن نقطه تصور می‌کنیم، بار q_1 مثبت بوده و مطابق شکل بر بار مثبت نیرویی رانشـی رو به چپ وارد کند. پس میدان بار q_1، یعنی E_1 به سـمت چپ است و با همین استدلال، میدان بار q_2 که منفی است، رو به راست است. اکنون میدان‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

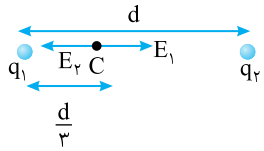
$$E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{|q_1|}{x^2} = k\frac{|q_2|}{(r+x)^2} \Rightarrow \frac{4}{x^2} = \frac{9}{(60+x)^2} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{3}{60+x} \Rightarrow 3x = 120 + 2x \Rightarrow x = 120\,cm$$

بنابراین در فاصله‌ی ۱۲۰cm از بار q_1 و ۱۸۰cm از بار q_2 میدان الکتریکی صفر است.

تست ۷: دو بـار نقطـه‌ای q_1 و q_2 به فاصله‌ی d از یک‌دیگر قرار دارند. اگر در نقطه‌ی C بین دو بار و به فاصله‌ی $\frac{d}{3}$ از بار q_1 بزرگی میدان الکتریکی صفر باشد، نسبت $\frac{q_2}{q_1}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) -4 ۴) ۴

پاسخ: بین دو بار میدان صفر شـده اسـت، بنابراین میدان دو بار در خلاف جهت هم بوده اسـت و دو بار همنام (یا هر دو مثبت یا هر دو منفی) هسـتند، که برای سـادگی هر دو را مثبت گرفته‌ایم. اگر به شـکل روبه‌رو دقت کنید، دلیل همنام بودن q_1 و q_2 را می‌فهمید. اما حل مسأله:

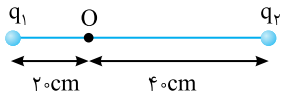


$$E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{q_1}{(\frac{d}{3})^2} = k\frac{q_2}{(\frac{2d}{3})^2} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = 4$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نتیجه اگر دو بار همنام باشـند، میدان بارها در هر نقطه روی خط واصل دو بار و بین دو بار در خلاف جهت هم خواهد بود. اگر دو بار ناهمنام باشند، جهت میدان‌های حاصل از دو بار روی خط واصل و بین دو بار هم‌جهت خواهد بود.

مسأله ۳۷ در شـکل روبـه‌رو دو بـار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصلـه‌ی ۶۰cm از یک‌دیگر قرار دارند و میدان در نقطه‌ی O برابر $\vec{E}$ اسـت. اگر بار q_2 حذف شـود، میـدان در همان نقطه برابر $\frac{\vec{E}}{2}$ می‌شـود. معلوم کنید که بارهای q_1 و q_2 همنامند یا ناهمنام؟ نسبت $\frac{|q_2|}{|q_1|}$ را بیابید.



راه‌حل: در ابتدا میدان کل در نقطه‌ی O برابر است با:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \quad (1)$$

با حذف بار q_2 میدان در نقطه‌ی O ناشی از بار q_1 است، از این رو:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}}{2} \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\vec{E}}{2} + \vec{E}_2 = \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\vec{E}}{2} \quad (3)$$

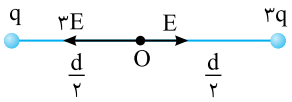
از مقایسه‌ی رابطه‌های (۲) و (۳)، نتیجه می‌شود میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ در نقطه‌ی O هم‌جهت بوده، بنابراین بارهای $q_۱$ و $q_۲$ ناهمنام هستند. از طرفی:

$$\begin{cases}\vec{E}_۱=\frac{\vec{E}}{۲}\\ \vec{E}_۲=\frac{\vec{E}}{۲}\end{cases}\Rightarrow E_۱=E_۲\Rightarrow k\frac{|q_۱|}{(۰/۲)^۲}=k\frac{|q_۲|}{(۰/۴)^۲}\Rightarrow\frac{|q_۲|}{|q_۱|}=۴$$

تذکر: به روش حل دو مسأله زیر دقت کنید، برای حل چنین مسائلی، بهتر است این روش را به کار ببرید.

مسأله ۳۸ **دو بار نقطه‌ای همنام که بزرگی یکی از آن‌ها ۳ برابر دیگری است، در فاصله‌ی d از هم قرار دارند. بزرگی میدان برایند در وسط خط واصل دو بار برابر $۱۵۰\frac{N}{C}$ است. اگر بار کوچک‌تر را حذف کنیم، بزرگی میدان در همان نقطه چند نیوتون بر کولن می‌شود؟**

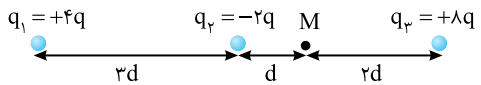
راه‌حل: اگر یکی از بارها q باشد، بنا به فرض مسأله بار دیگر ۳q است. در حل این مسائل به این روش عمل می‌کنیم که میدان بار q در نقطه‌ی O را E فرض می‌کنیم. در این صورت میدان بار ۳q در نقطه‌ی O ، ۳E می‌شود. میدان‌های بارهای همنام در بین دو بار در خلاف جهت هم هستند و اندازه‌ی برایند آن‌ها برابر با تفاضل اندازه‌ی آن‌ها است. با توجه به فرض مسأله خواهیم داشت:



$$E_T=۳E-E=۲E\Rightarrow ۲E=۱۵۰\frac{N}{C}\Rightarrow E=۷۵\frac{N}{C}$$

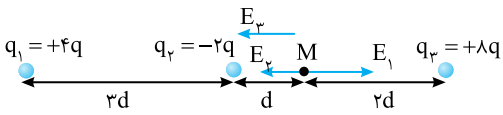
با حذف بار q ، میدان در نقطه‌ی O تنها ناشی از بار ۳q است و برابر $۳E=۳\times۷۵=۲۲۵\frac{N}{C}$ خواهد شد.

مسأله ۳۹ **اگر اندازه‌ی میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای +q در فاصله‌ی d از بار برابر $۱۰^۵\frac{N}{C}$ باشد، در شکل روبه‌رو میدان الکتریکی برایند (خالص) حاصل از سه بار الکتریکی $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ در نقطه‌ی M را حساب کنید.**



راه‌حل: میدان الکتریکی بار نقطه‌ای با مقدار بار نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد.

با توجه به فرض مسأله $E=k\frac{q}{d^۲}=۱۰^۵\frac{N}{C}$ است.



$$\text{میدان بار } q_۱: E_۱=k\frac{۴q}{(۴d)^۲}\Rightarrow E_۱=\frac{۱}{۴}k\frac{q}{d^۲}=\frac{۱}{۴}\times۱۰^۵\frac{N}{C}$$

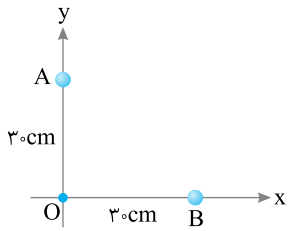
$$\text{میدان بار } q_۲: E_۲=k\frac{۲q}{d^۲}\Rightarrow E_۲=۲k\frac{q}{d^۲}=۲\times۱۰^۵\frac{N}{C}$$

$$\text{میدان بار } q_۳: E_۳=k\frac{۸q}{(۲d)^۲}\Rightarrow E_۳=۲\frac{kq}{d^۲}=۲\times۱۰^۵\frac{N}{C}$$

با توجه به جهت بردارهای $E_۱$، $E_۲$ و $E_۳$ می‌توان نوشت:

$$\vec{E}_T=\vec{E}_۱+\vec{E}_۲+\vec{E}_۳\Rightarrow E_T=|E_۱-E_۲-E_۳|=|\frac{۱}{۴}\times۱۰^۵-۲\times۱۰^۵-۲\times۱۰^۵|\Rightarrow E_T=۳/۷۵\times۱۰^۵\frac{N}{C}$$

مسألهٔ ۴۰ در شکل روبه‌رو دو بار نقطه‌ای $۶\,\mu C$ و $-۸\,\mu C$ به ترتیب در نقاط A و B قرار دارند:

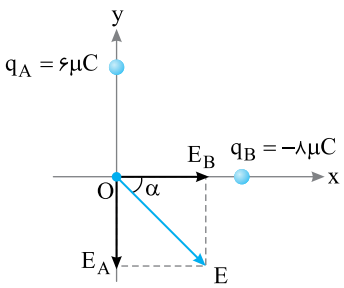


الف) بردار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O بر حسب بردارهای یکه بنویسید.

ب) اندازه‌ی میدان را در نقطه‌ی O حساب کنید.

پ) زاویه‌ای را که بردار میدان برایند با محور xها می‌سازد را بیابید.

راه‌حل: الف) در نقطه‌ی O یک بار مثبت فرضی در نظر می‌گیریم و به کمک آن جهت میدان بارهای q_A و q_B را در نقطه‌ی O را مشخص می‌کنیم و میدان‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$E = k\frac{|q|}{r^۲} \Rightarrow \begin{cases} E_A = ۹\times۱۰^۹ \times \dfrac{۶\times۱۰^{-۶}}{۹\times۱۰^{-۲}} = ۶\times۱۰^۵ \dfrac{N}{C} \\ E_B = ۹\times۱۰^۹ \times \dfrac{۸\times۱۰^{-۶}}{۹\times۱۰^{-۲}} = ۸\times۱۰^۵ \dfrac{N}{C} \end{cases}$$

در این صورت میدان برایند در نقطه‌ی O خواهد شد:

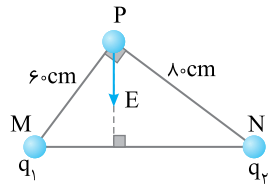
$$\vec{E} = ۸\times۱۰^۵ \vec{i} - ۶\times۱۰^۵ \vec{j}$$

ب) زاویه‌ای که بردار $\vec{E}$ با محور xها می‌سازد، برابر است با:

$$\tan\alpha = \frac{-۶\times۱۰^۵}{۸\times۱۰^۵} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۹۰^\circ + ۳۷^\circ = ۱۲۷^\circ \\ \alpha = -۳۷^\circ \end{cases}$$

با توجه به شکل $\alpha = -۳۷^\circ$ قابل قبول است.

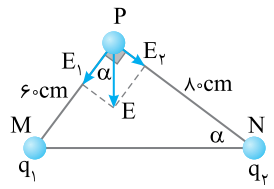
مسألهٔ ۴۱ در شکل روبه‌رو، دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در رأس‌های M و N مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر قدرمطلق بار $q_۱$ برابر $۱۸\mu C$ باشد و بردار میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P مطابق شکل باشد.



الف) نوع بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را مشخص کنید.

ب) مقدار بار $q_۲$ چند میکروکولن است؟

راه‌حل: الف) میدان E را در امتداد ضلع‌های PN و PM تجزیه می‌کنیم، مطابق شکل میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ به‌ترتیب به سوی $q_۱$ و $q_۲$ هستند بنابراین بارهای $q_۱$ و $q_۲$ هر دو منفی هستند.



ب) با توجه به شکل برای میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ به کمک مثلثات می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha = \frac{E_۲}{E_۱} \qquad (۱)$$

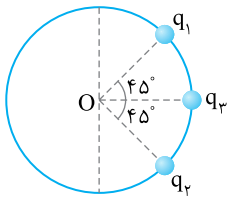
در مثلث PMN نیز می‌توان نوشت: $\tan\alpha = \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{۶۰}{۸۰} = \dfrac{۳}{۴}$ (۲)

در رابطه‌ی (۱) از رابطه‌ی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

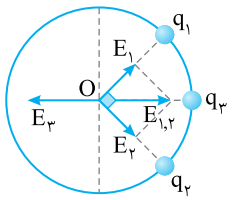
$$\frac{E_۲}{E_۱} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow E_۲ = \frac{۳}{۴}E_۱ \Rightarrow k\frac{|q_۲|}{(۰/۸)^۲} = \frac{۳}{۴}k\frac{۱۸}{(۰/۶)^۲} \Rightarrow |q_۲| = \frac{۳}{۴}\times\frac{۱۸\times۶۴}{۳۶} \Rightarrow |q_۲| = ۲۴\mu C$$

بنابراین $q_۲ = -۲۴\mu C$ است.

مسأله ۴۲ **اگر در شکل روبه‌رو $q_1=q_2=-4\mu C$ و میدان در مرکز دایره صفر باشد، q_3 چند میکروکولن است؟**



راه‌حل: بردارهـای میدان‌های بارهای q_1 و q_2 را رسـم می‌کنیم. بارهای q_1 و q_2 هم‌اندازه و فاصله‌ی آن‌ها از O یکسـان اسـت بنابراین $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم‌اندازه هسـتند و همان‌گونه که بیان شـد برایند دو بردار هم‌اندازه روی نیم‌سـاز آن‌ها قرار می‌گیرد. به شـکل نگاه کنید $\vec{E}_{1,2}$ برایند $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ اسـت، برای آن‌که میدان در نقطه‌ی O صفر شود باید میدان q_3 در خلاف جهت $\vec{E}_{1,2}$ و هم‌اندازه‌ی آن باشد.



اندازه میدان‌های E_1 و E_2 را در O به‌دست می‌آوریم:

$$E_1=E_2=k\frac{|q|}{R^2}$$

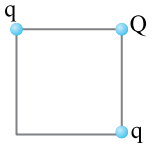
برایند آن‌ها را حساب می‌کنیم.

$$E_{1,2}=\sqrt{E_1^2+E_2^2}=\sqrt{2E_1^2}\Rightarrow E_{1,2}=\sqrt{2}E_1=\sqrt{2}k\frac{|q_1|}{R^2}$$

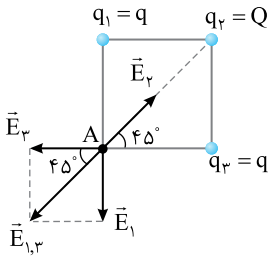
میدان E_3 را با $E_{1,2}$ برابر قرار می‌دهیم:

$$E_{1,2}=E_3\Rightarrow\sqrt{2}k\frac{|q_1|}{R^2}\Rightarrow k\frac{|q_3|}{R^2}\Rightarrow|q_3|=\sqrt{2}|q_1|\Rightarrow q_3=+4\sqrt{2}\mu C$$

مسأله ۴۳ **مطابق شکل روبه‌رو، در سه رأس یک مربع، دو بار نقطه‌ای q و یک بار نقطه‌ی Q قرار داده‌ایم. نسبت $\frac{Q}{q}$ چقدر باشد، تا میدان الکتریکی در رأس چهارم مربع صفر شود؟**



راه‌حل: در شـکل زیر، میدان الکتریکی دو بار با اندازه‌ی یکسـان q در رأس چهارم مربع (نقطه‌ی A) را با $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$ نشـان داده‌ایم. با این فرض که این دو بار مثبت باشـند، اگر بار Q نیز مثبت باشد، برایند میدان الکتریکی در نقطه‌ی A صفر نخواهد شـد. همین‌طور اگر بارهای q، منفی باشـند، آن‌گاه اگر بار Q هم منفی باشـد، میدان در نقطه‌ی A صفر نخواهد شد، پس باید Q و q ناهمنام باشند. در شکل زیر، $\vec{E}_2$ میدان حاصل از بار Q در نقطه‌ی A است، با این فرض که بارهای q مثبت هستند و بار Q منفی است.



می‌دانیم $|\vec{E}_1|=|\vec{E}_3|$، پس برایند این دو بردار $\vec{E}_{1,3}=\vec{E}_1+\vec{E}_3$ در امتداد قطر مربع قرار می‌گیرد و مقدار آن برابر است با:

$$|\vec{E}_{1,3}|=\sqrt{E_1^2+E_2^2}=\sqrt{2}E_1=\frac{\sqrt{2}kq}{a^2}$$

اندازه‌ی میدان بار Q در نقطه‌ی A برابر می‌شود با:

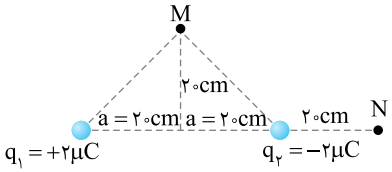
$$|\vec{E}_2|=\frac{k|Q|}{(\sqrt{2}a)^2}=\frac{k|Q|}{2a^2}$$

شرط صفر شدن میدان الکتریکی برایند در نقطه‌ی A به صورت زیر خواهد بود:

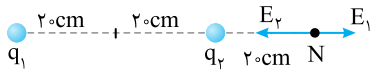
$$E_{1,3}=E_2\Rightarrow\frac{\sqrt{2}kq}{a^2}=\frac{k|Q|}{2a^2}\Rightarrow\frac{Q}{q}=-2\sqrt{2}$$

علامت منفی در رابطه‌ی اخیر به این معناسـت که بارهای q و Q باید مختلف‌العلامت باشـند. فرض اولیه بر این بود که $q>0$ و $Q<0$. اگر فرض اولیه به صورت $q<0$ و $Q>0$ نیز باشد، جواب نهایی تغییر نخواهد کرد.

مسأله ۴۴ **به دو بار یکسان $+q$ و $-q$ که در فاصله‌ی ثابت $2a$ از هم قرار دارند دو قطبی الکتریکی گویند. در شکل مقابل اندازه‌ی میدان الکتریکی دو قطبی در نقطه‌های N و M که M روی عمودمنصف دو بار و N روی خط واصل دو بار قرار دارد، به‌دست آورید.**



راه‌حل: میدان‌های ناشی از بارهای q_1 و q_2 را در نقطه‌ی N رسم می‌کنیم.



سپس اندازه‌ی هر میدان را حساب می‌کنیم.

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{r^2} \Rightarrow E_1 = 9\times10^9 \times \frac{2\times10^{-6}}{(0/6)^2} = \frac{9\times2\times10^3}{36\times10^{-2}} \Rightarrow E_1 = 5\times10^4 \frac{N}{C}$$

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{r^2} \Rightarrow E_2 = 9\times10^9 \times \frac{2\times10^{-6}}{(0/2)^2} = \frac{9\times2\times10^3}{4\times10^{-2}} \Rightarrow E_2 = 45\times10^4 \frac{N}{C}$$

میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی N برابر است با:

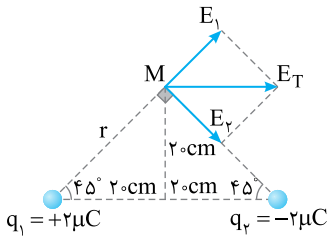
$$E_N = E_2 - E_1 = 45\times10^4 - 5\times10^4 \Rightarrow E_N = 4\times10^5 \frac{N}{C}$$

فاصله‌ی q_1 و q_2 را از نقطه‌ی M به‌دست می‌آوریم.

$$r = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}cm$$

اکنون میدان روی عمود منصف را به‌دست می‌آوریم.

میدان‌های E_1 و E_2 با هم برابرند زیرا قدرمطلق بارهای q_1 و q_2 برابر و فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی M یکسان است.



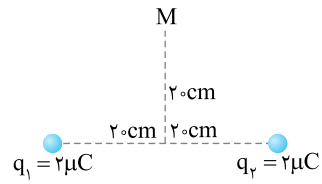
$$E_1 = E_2 = 9\times10^9 \times \frac{2\times10^{-6}}{(20\sqrt{2}\times10^{-2})^2}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{18\times10^3}{8\times10^{-2}} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{9}{4}\times10^5 \frac{N}{C}$$

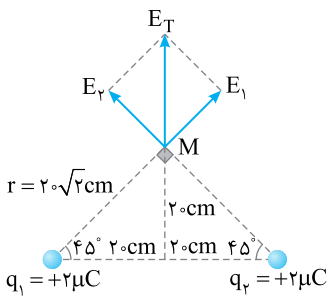
اکنون به کمک رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌ی M حساب می‌کنیم:

$$E_{T_M} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{2}E_1 \Rightarrow E_{T_M} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\times10^5 \frac{N}{C}$$

مسأله ۴۵ **میدان الکتریکی خالص دو بار الکتریکی $q_1 = q_2 = 2\mu C$ روی عمودمنصف خط واصل دو بار در شکل روبه‌رو در نقطه‌ی M را حساب کنید.**



راه‌حل: میدان‌های بارهای q_1 و q_2 در نقطه‌ی M با هم برابر و بر هم عمودند.

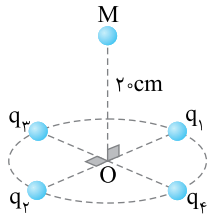


$$E = k\frac{|q|}{r^2} \Rightarrow E_1 = E_2 = 9\times10^9 \times \frac{2\times10^{-6}}{(0/2\sqrt{2})^2} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{9}{4}\times10^5 \frac{N}{C}$$

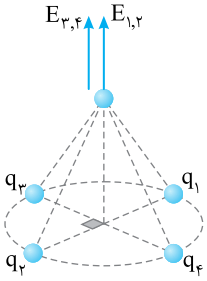
میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی M خواهد شد:

$$E_{T_M} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \Rightarrow E_{T_M} = \sqrt{2}E_1 \Rightarrow E_{T_M} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\times10^5 \frac{N}{C}$$

مسأله ۴۶ در شکل روبه‌رو چهار بار نقطه‌ای $q_۱=q_۲=q_۳=q_۴=+۲\mu C$ روی محیط یک دایره در فاصله‌ی یکسان از هم قرار دارند. میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌ی M واقع بر محور گذرنده از مرکز دایره حساب کنید. $(R=OM=۲۰cm)$



راه‌حل: نگران نباشید با مسأله سختی روبه‌رو نیستید. مسأله‌ی قبل را که میدان دو بار را بررسی می‌کرد، مرور کنید. در آن جا میدان دو بار را به‌دست آوردیم و مشاهده کردیم میدان خالص در امتداد عمود منصف و رو به بالا است. در این مسأله می‌توان میدان هر دو بار مقابل هم را مطابق مسأله‌ی قبل به‌دست آورده آن‌گاه به سادگی دو میدان به‌دست آمده را با هم جمع کرد و میدان الکتریکی خالص خواهد شد:



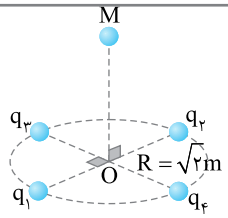
$$E_T=E_{۱,۲}+E_{۳,۴}$$

مقدار میدان‌های $E_{۱,۲}$ و $E_{۳,۴}$ را در مسأله‌ی قبلی به‌دست آورده‌ایم:

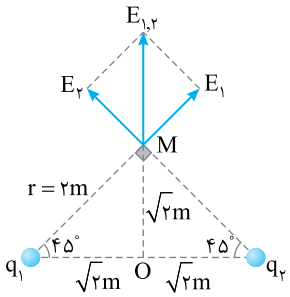
$$E_T=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}\times ۱۰^۵+\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}\times ۱۰^۵$$

$$E_T=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\times ۱۰^۵\ \frac{N}{C}$$

مثال: در شکل روبه‌رو چهار بار نقطه‌ای $q_۴=-۲\mu C$ و $q_۱=q_۲=q_۳=+۲\mu C$ روی محیط یک دایره در فاصله‌ی یکسان از هم قرار دارند. میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی M واقع بر محور گذرنده از مرکز دایره را حساب کنید. ($OM=\sqrt{۲}m$ و شعاع دایره $\sqrt{۲}m$ است.)



پاسخ: این گونه به چهار بار الکتریکی نگاه نکنید. این مسایل به راحتی قابل حل هستند. ابتدا میدان الکتریکی حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را به‌دست می‌آوریم.

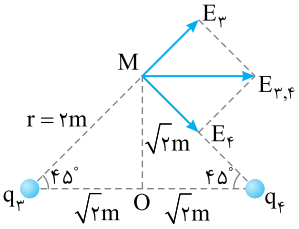


$$r=\sqrt{(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۲})^۲}\Rightarrow r=۲m$$

$$E_۱=E_۲=k\frac{|q|}{r^۲}\Rightarrow E_۱=E_۲=۹\times ۱۰^۹\times\frac{۲\times ۱۰^{-۶}}{(۲)^۲}\Rightarrow E_۱=E_۲=\frac{۹}{۲}\times ۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

$$E_{۱,۲}=\sqrt{E_۱^۲+E_۲^۲}=\sqrt{۲}E_۱\Rightarrow E_{۱,۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\times ۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

این میدان در امتداد خط OM است. اکنون میدان الکتریکی ناشی از دو بار $q_۳$ و $q_۴$ را به‌دست می‌آوریم.



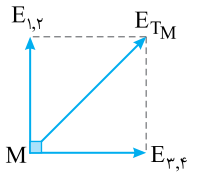
میدان‌های $E_۳$ و $E_۴$ هم‌اندازه میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ هستند. $E_۳=E_۴=\frac{۹}{۲}\times ۱۰^۳\ \frac{N}{C}$

میدان $E_{۳,۴}$ نیز خواهد شد:

$$E_{۳,۴}=\sqrt{E_۳^۲+E_۴^۲}\Rightarrow E_{۳,۴}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\times ۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

این میدان بر خط OM عمود است.

اکنون می‌توانید میدان‌های $E_{۱,۲}$ و $E_{۳,۴}$ را در نقطه‌ی M برای خود رسم کنید.



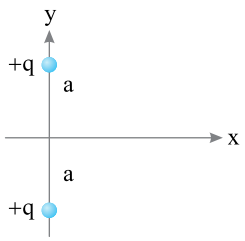
$$E_{T_M}=\sqrt{E_{۱,۲}^۲+E_{۳,۴}^۲}=\sqrt{۲}E_{۱,۲}$$

$$\Rightarrow E_{T_M}=\sqrt{۲}\times\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\times ۱۰^۳\ \frac{N}{C}\Rightarrow E_{T_M}=۹\times ۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

مسأله‌ی خاص ۱

اکنون می‌خواهیم به سراغ حل یک مسأله خاص برویم، یک مسأله‌ی پارامتری با ریاضیات زیبا که برای درک آن باید حوصله کرد. باید با دقت مراحل مسـأله را بجویم و سـپس به راحتی قورت دهیم. به نتیجه‌ی زیبای انتهایی این مسـأله دقت کنیم تا درک ما از مفهوم بار نقطه‌ای بالاتر رود.

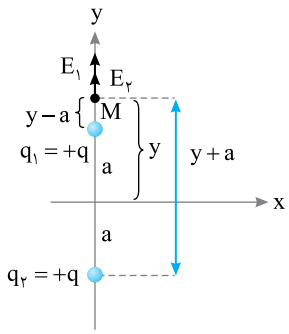
مسأله ۴۷ **دو بار نقطه‌ای همنام $+q$ مطابق شکل در نقاط $y=+a$ و $y=-a$ قرار دارند:**



الف) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور yها به فاصله‌ی y از مبدأ مختصات را بیابید. $(y>a)$

ب) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی عمودمنصف خط واصل دو بار و به فاصله‌ی x از مبدأ بیابید.

راه‌حل: الـف) فاصله‌ی بار q_1 تا نقطـه‌ی موردنظر برابر $y-a$ و فاصله‌ی بار q_2 تا آن نقطه برابر $y+a$ اسـت. میدان‌های ناشـی از دو بار را نمایش می‌دهیم. میدان‌ها هم‌جهـت بوده و با هم جمع می‌شـوند و میدان بار نزدیک‌تر بـه نقطه‌ی مورد نظر از میدان بار دیگر بزرگ‌تر است. میدان‌ها را به‌دست آورده و با هم جمع می‌کنیم:



$$E_1=k\frac{q_1}{r_1^2}\Rightarrow E_1=k\frac{q}{(y-a)^2}$$

$$E_2=k\frac{q_2}{r_2^2}\Rightarrow E_2=k\frac{q}{(y+a)^2}$$

$$E=E_1+E_2\Rightarrow E=kq\left(\frac{1}{(y-a)^2}+\frac{1}{(y+a)^2}\right)$$

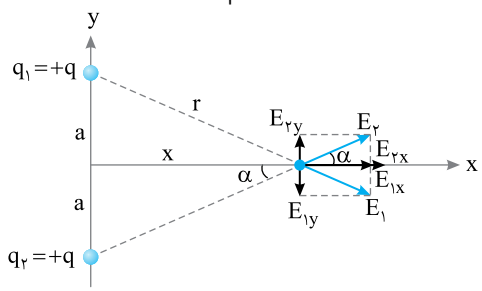
مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\Rightarrow E=kq\times\frac{y^2+a^2+2ay+y^2+a^2-2ay}{(y^2-a^2)^2}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2kq(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2}\Rightarrow \vec{E}=\frac{2kq(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2}\vec{j}$$

به مقدار عجیب به‌دسـت آمده نگاه نکنید. اگر این مسـأله را عددی به شما ارائه می‌دادیم به‌راحتی آن را حل می‌کردید. اکنون به سراغ قسمت ب می‌رویم و سپس با یک پرسش شما را به یک نتیجه‌ی زیبا می‌رسانیم.

ب) میدان هر بار را رسم می‌کنیم. اندازه‌ی میدان دو بار در نقطه‌ی مورد نظر برابر اسـت. فاصله‌ی هر بار از نقطه‌ی مورد نظر خواهد شد:



$$r=\sqrt{a^2+x^2}$$

میدان هر بار را در نقطه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آوریم:

$$E_1=E_2=k\frac{q}{r^2}\Rightarrow E_1=E_2=k\frac{q}{(a^2+x^2)}$$

مؤلفه‌های E_{1y} و E_{2y} یک‌دیگر را خنثی می‌کنند. در این صورت میدان برایند برابر است با:

$$E=E_{1x}+E_{2x}\xrightarrow{E_{1x}=E_{2x}}E=2E_{1x}\Rightarrow E=2E_1\cos\alpha$$

با توجه به شکل $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ است، از این رو:

$$E=2k\frac{q}{a^2+x^2}\times\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow E=\frac{2kqx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\vec{E}=\frac{2kqx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}$$

۱- هدف از ارائه‌ی این مسأله‌ی خاص همان‌گونه که بیان می‌شود نتیجه‌ای است که از آن می‌خواهیم به‌دست آوریم. این نوع مسایل در برنامه‌ی رسمی کتاب درسی نیست.

پرسش: **اگر در مسـألهی قبل فاصلهی نقطهی مشـاهده نسـبت به a بسیار بزرگ باشـد $(x \gg a$ و یا $y \gg a)$ میدان الکتریکی چگونه خواهد بود؟**

پاسخ: وقتی مقدار $y \gg a$ باشـد در واقع y^2 آن قدر از a^2 بزرگتر اسـت که میتوان در رابطهی $E=\frac{2kq(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2}$ از a^2 صرفنظر کرد و آن را از رابطه برداشت. در این صورت:

$$E=\frac{2kq(y^2)}{(y^2)^2}=E=k\frac{(2q)}{y^2}$$

مانند این اسـت که یک بار نقطهای $(2q)$ در مرکز مختصات قرار دارد و شـما میدان الکتریکی آن را در فاصلهی y از بار بهدست آوردهاید.

برای میدان روی عمود منصف دو بار نیز همین گونه است وقتی $x \gg a$ باشد، میتوان a^2 را از رابطه حذف کرد.

$$E=\frac{2kqx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow[a^2 \gg a^2]{\text{حذف } a^2} E=\frac{2kqx}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E=k\frac{2q}{x^2}$$

نتیجه در فاصلهی دور از این دو بار نقطهای میتوان به جای دو بار q، یکبار $2q$ را در وسط خط واصل دو بار در نظر گرفت و میدان را بهدست آورد.

این نتیجه، سرآغاز این مطلب است که در فواصل دور از اجسام گستردهی باردار، میتوان آنها را بهصورت بار نقطهای فرض کرد. مثلاً میدان یک کرهی باردار با بار q در فواصل دور از کره را میتوان میدان ذرهی بارداری در مرکز کره در نظر گرفت.

خطوط میدان الکتریکی

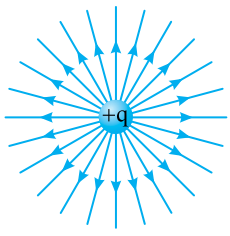
در انیمیشنها بارها دیدهاید که وقتی ضربهای به سر یکی از شخصیتهای ماجرا وارد میشود، برای نشان دادن گیجی شخص دور سر او تعدادی ستاره در حال حرکت یا گنجشک در حال حرکت رسم میکنند تا شما به گیجی شخص پی ببرید و با برطرف شدن گیجی شخص آرام آرام ستارههای دور سر او نیز محو میشود.

برای نمایش میدان الکتریکی اطراف یک بار الکتریکی نیز باید روشی انتخاب کنیم تا وجود میدان اطراف بار و ضعیف شدن میدان در فاصلهی دورتر و آرایش میدان را بتوانیم نمایش دهیم.

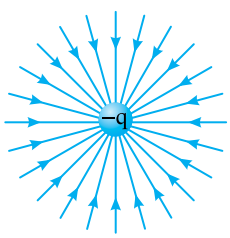
تعریف **خطهای میدان: برای رسـم و تجسـم میدان الکتریکی در فضای اطراف اجسام باردار از خطهای فرضی جهتداری موسوم به «خطوط میدان الکتریکی» استفاده میشود.**

ویژگیهای خطوط میدان الکتریکی

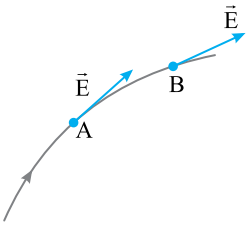
۱) خطوط میدان از بارهای مثبت خارج شـده و به بارهای منفی منتهی میشـوند. در شکلهای زیر خطوط میدان الکتریکی برای یک ذره باردار رسم شده است.



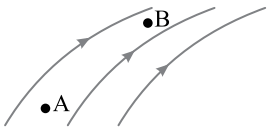
الف) خطوط میدان الکتریکی در جهت دور شدن از ذرهی باردار $+q$ است.



ب) خطوط میدان الکتریکی به سمت ذرهی باردار $-q$ است.



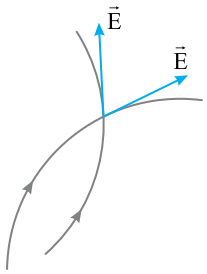
۲) میدان در هر نقطه، برداری است مماس بر خط میدانی که از آن نقطه می‌گذرد و با آن خط میدان، هم‌جهت است.



۳) تراکم خطوط میدان با بزرگی میدان متناسب است. در هر ناحیه که میدان قوی‌تر باشد، خطوط میدان، به یک‌دیگر نزدیک‌تر و فشرده‌ترند. $(E_A < E_B)$

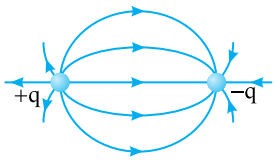
۴) خطوط میدان برایند به جز در محل بار هیچ‌گاه یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی از هر نقطه فقط یک خط میدان می‌گذرد. در هر نقطه‌ی فضا فقط یک میدان الکتریکی وجود دارد که همان میدان الکتریکی خالص (برایند) است.

پرسش: چرا در ویژگی‌های خطوط میدان الکتریکی بیان می‌کنیم که این خطوط هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند؟



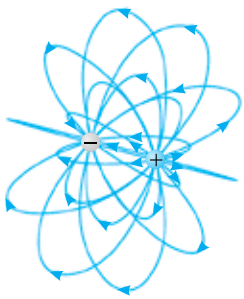
پاسخ: اگر فرض کنیم دو خط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع می‌کنند (مطابق شکل روبه‌رو) در این صورت دراین نقطه دو مماس می‌توان رسم کرد یعنی در یک نقطه دو میدان الکتریکی خالص وجود دارد در حالی‌که می‌دانیم در هر نقطه تنها یک میدان الکتریکی خالص وجود دارد از این رو دو خط میدان نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند.

پرسش: خطوط میدان الکتریکی یک دو قطبی الکتریکی را رسم کنید.



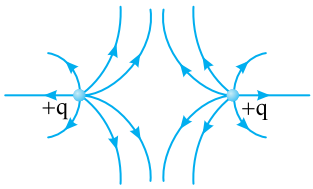
پاسخ: می‌دانیم دو قطبی الکتریکی یعنی دو بار یکسان $+q$ و $-q$ که در فاصله‌ی ثابتی از هم قرار دارند.

البته شکل واقعی خط‌های میدان الکتریکی دو قطبی مطابق شکل روبه‌رو سه بعدی است.



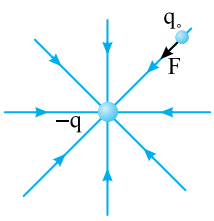
نمایش سه‌بعدی خطوط میدان برای یک دوقطبی الکتریکی

پرسش: خطوط میدان الکتریکی دو بار همنام $+q$ را رسم کنید.



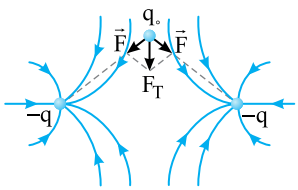
پاسخ: خطوط میدان از دو بار مثبت خارج می‌شوند و در وسط خط واصل دو بار، میدان صفر است. از طرفی دو بار هم‌اندازه هستند، بنابراین خطوط میدان به شکل روبه‌رو و دارای تقارن نسبت به خط عمودمنصف است.

پرسش: آیا اگر یک ذره‌ی باردار در یک میدان الکتریکی رها شود، الزاماً مسیر حرکتش روی خط میدان است؟ توضیح دهید.



پاسخ: اگر یک بار آزمون q_0 مطابق شکل در مجاورت بار نقطه‌ای $-q$ رها شود، بار در امتداد خط میدان حرکت خواهد کرد.

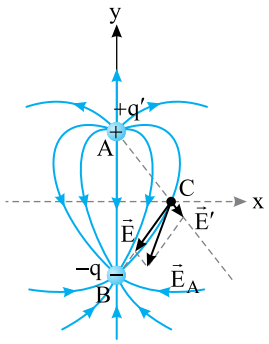
امـا اگر همین بار به‌طور مثال روی عمودمنصف دو بـار همنام و هم‌اندازه‌ی $-q$ قرار گیرد و رها شود، مطابق شکل رو به وسط پاره‌خط واصل دو بار حرکت می‌کند که کاملاً مشخص است این مسیر در امتداد خط‌های خمیده‌ی میدان نخواهد بود.



نتیجه هرگاه یک ذره‌ی باردار در یک میدان الکتریکی رها شود، لزومی ندارد که مسیر حرکت آن در امتداد یکی از خط‌های میدان باشد.

پرسش: اگر دو بار مختلف‌العلامت هم‌اندازه نباشند شکل خطوط میدان چگونه خواهد بود؟ $(|q|>|q'|)$

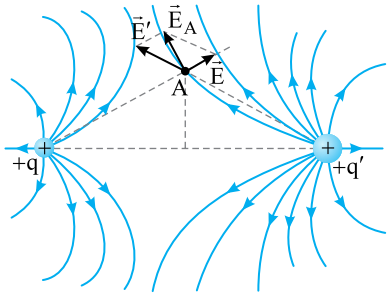
پاسخ: اگـر دو بار مثبت و منفی هم‌اندازه نباشـند تعداد خط‌هـای میدان بار بزرگ‌تر بیش‌تر اسـت و نزدیک بار کوچک‌تر خطوط میدان، انحنای بیش‌تری دارند و نزدیک بار بزرگ‌تر خطوط میدان انحنای کم‌تری داشته و به خط راست نزدیک‌تر هستند. اگر روی عمـود منصف پاره‌خط واصـل دو بار در نقطه‌ای مانند C دو میدان مربوط به دو بار $+q'$ و $-q$ را رسـم کنیم، با توجه به این‌که فاصله‌ی این نقطه از دو نقطه‌ی A و B یکسان است و اندازه‌ی بار منفی بزرگ‌تر از اندازه‌ی بار مثبت فرض شده است، $\vec{E}$ از $\vec{E}'$ بزرگ‌تر اسـت و برایند آن‌ها موازی خط واصل دو بار نمی‌شود. خط میدان در نقطه‌ی C بر این بردار مماس است و خطوط میدان مطابق شکل می‌شوند.



پرسش: اگر دو بار $+q$ و $+q'$ $(q'>q)$ در دو طرف یک پاره‌خط قرار گیرند، شکل خطوط میدان چگونه خواهد بود؟

پاسخ: چـون بارها هم‌اندازه نیسـتند شـکل متقارن نخواهد بود و خطـوط نزدیک بار کوچک‌تـر انحنای بیش‌تری دارند، دقـت کنید خط‌های خروجی از بـار بزرگ‌تر نیز همواره با تعداد بیش‌تری رسم می‌شوند.

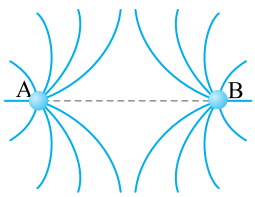
اگـر روی عمـود منصف پاره‌خط واصل دو بار در نقطه‌ای مانند A دو میدان $\vec{E}$ و $\vec{E}'$ حاصل از دو بار q و q' را رسم کنیم، $E'>E$ است زیرا q' از q بزرگ‌تر است. پس برایند این دو بیش‌تر به E' نزدیک اسـت و منطبق بر راستای عمودمنصف نمی‌شود. خط میدان در نقطه‌ی A باید مماس بر $\vec{E}_A$ رسم شود.



تست۸: دو بار هم‌اندازه و هم‌نام در دو نقطه‌ی A و B قرار گرفته‌اند. با حرکت از A به سمت B میدان چگونه تغییر می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد.
۲) کاهش می‌یابد.
۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

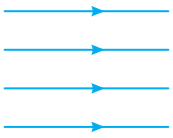
پاسخ: با توجه به شکل خطوط میدان، با حرکت از A به سمت B تراکم خطوط تا وسط پاره‌خط واصل دو بار کاهش و سـپس افزایـش می‌یابد. بنابراین میدان الکتریکی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد و گزینه‌ی (۴) درست است.



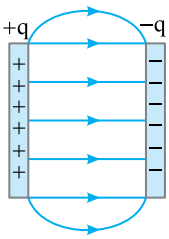
میدان الکتریکی یکنواخت

تعریف به میدان الکتریکی که اندازه، راستا و جهت آن در قسمتی از فضا ثابت باشد میدان الکتریکی یکنواخت گفته می‌شود.

پرسش: خطوط میدان الکتریکی یکنواخت چگونه رسم می‌شود؟

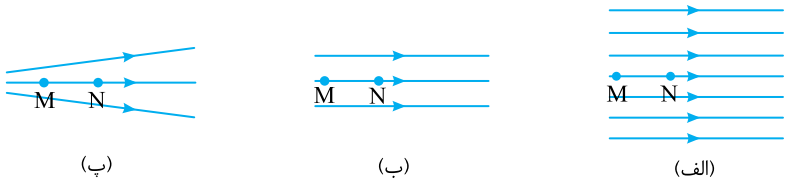


پاسخ: از آن‌جا که تراکم خطوط مشخص‌کننده اندازه‌ی میدان است، بنابراین وقتی میدان الکتریکی در یک فضا یکنواخت است باید تراکم خط‌های میدان در همه‌ی نقاط آن فضا یکسان باشد، یعنی باید خط‌های میدان را به‌صورت خط‌های موازی با فاصله‌های یکسان رسم کرد.



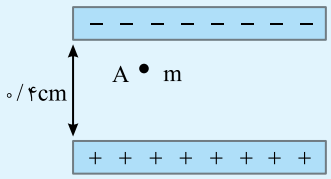
برای ایجاد میدان الکتریکی یکنواخت از دو صفحه‌ی رسانای موازی باردار که فاصله‌ی آن‌ها از هم کم و بار صفحه‌ها هم‌اندازه و ناهمنام است، استفاده می‌شود. در این حالت میدان در فضای بین این دو صفحه و دور از لبه‌ها، یکنواخت است.

پرسش: در شکل‌های زیر، خطوط میدان الکتریکی در سه ناحیه از فضا رسم شده است. اگر ذره‌ی بارداری با بار مثبت q_0 را در نقطه‌ی M قرار داده و رها کنیم، در مسیر M تا N، شتاب حرکت ذره در هر شکل چگونه است؟



پاسخ: میدان الکتریکی در شکل (الف) و هم‌چنین شکل (ب) یکنواخت است و میدان از M تا N ثابت است، بنابراین شتاب حرکت ذره ثابت است. اما در شکل (الف) تراکم خط‌های میدان بیش‌تر و میدان قوی‌تر است، بنابراین نیروی وارد بر ذره و در نتیجه شتاب ذره در شکل (الف) از شکل (ب) بیش‌تر است. اما در شکل (پ) میدان الکتریکی یکنواخت نیست و با توجه به شکل از M تا N میدان در حال کاهش و نیروی وارد بر ذره نیز در حال کاهش است. بنابراین شتاب حرکت ذره ثابت نیست و از M تا N شتاب در حال کاهش است. اما در هر سه شکل از M تا N سرعت در حال افزایش است.

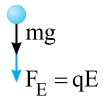
تست ۹: در شکل روبه‌رو ذره‌ای با بار -2pC و جرم 1mg را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $5\times10^{6}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$ در نقطه‌ی A مجاور صفحه‌ی منفی قرار داده و رها می‌کنیم. سرعت رسیدن گلوله به صفحه‌ی مثبت چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۲

۳) ۰/۴ ۴) ۰/۰۰۴

پاسخ: بنا به قضیه‌ی کار و انرژی، کار نیروی خالص برابر تغییر انرژی جنبشی جسم است. نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم و برایند نیروها خواهد شد:



$$F_T = F_E + mg$$

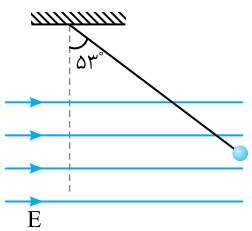
$$W_T = \Delta K \Rightarrow (qE+mg)d = \frac{1}{2}mv^2$$

$$(2\times10^{-12}\times5\times10^{6}+10^{-6}\times10)\times4\times10^{-3} = \frac{1}{2}\times10^{-6}v^2 \Rightarrow v^2 = 0/16 \Rightarrow v = 0/4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

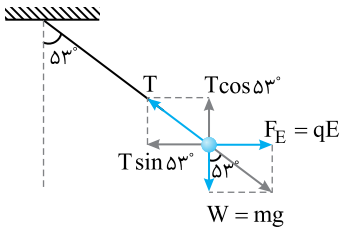
بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

حل دو مسأله‌ی خاص برای میدان الکتریکی یکنواخت

مسأله ۴۸ در شکل روبه‌رو ذره‌ای به جرم ۶۰ میلی‌گرم با بار $10\ \mu\text{C}$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت از ریسمان سبکی آویزان و در تعادل است. بزرگی میدان و نیرویی که ریسمان بر ذره وارد می‌کند را بیابید. $(\sin 53^\circ = 0/8)$



راه‌حل: ابتدا نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم. بر ذره سه نیرو وارد می‌شود:



۱) نیروی وزن توسط کره زمین W

۲) نیروی الکتریکی توسط میدان F_E

۳) نیروی ریسمان (T)

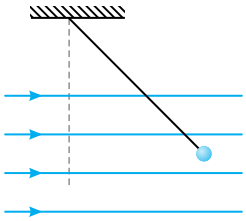
$$\tan ۵۳^\circ = \frac{F_E}{W} \Rightarrow \frac{\sin ۵۳^\circ}{\cos ۵۳^\circ} = \frac{qE}{mg} \Rightarrow \frac{۰/۸}{۰/۶} = \frac{۱۰\times۱۰^{-۶}\times E}{۶۰\times۱۰^{-۶}\times۱۰} \Rightarrow E = ۸۰\,\frac{N}{C}$$

برای به‌دست آوردن نیروی ریسمان، T را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم. چون ذره در تعادل است، مؤلفه‌ی قائم T با وزن ذره برابر است:

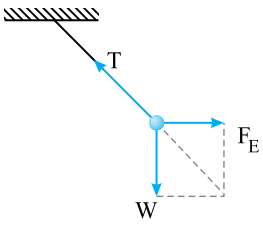
$$T\cos ۵۳^\circ = mg \Rightarrow T\times ۰/۶ = ۶۰\times۱۰^{-۶}\times۱۰ \Rightarrow T = \frac{۶\times۱۰^{-۴}}{۰/۶}$$

$$\Rightarrow T = ۱۰^{-۳}\,N$$

مسأله (۴۹) **در شکل روبه‌رو یک ذره با جرم $۲۰g$ دارای بار الکتریکی $+۴\,\mu C$ از یک ریسمان سبک آویزان و در یک میدان الکتریکی یکنواخت در حال تعادل است. اگر میدان الکتریکی ناگهان حذف شود، ذره بلافاصله پس از حذف میدان با شتاب $۲\,\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی را بیابید.**



راه‌حل: مسأله‌ی زیبایی است. نیروهای وارد بر ذره مطابق شکل سه نیروی وزن $W = mg$، نیروی الکتریکی $F = qE$ و نیروی کشش نخ است که برایند آن‌ها صفر است. هرگاه برایند سه بردار صفر شود، اندازه‌ی هر یک از آن بردارها هم‌اندازه‌ی بردار برایند دو بردار دیگر است:



$$\vec{F}_E + \vec{W} + \vec{T} = ۰ \Rightarrow |\vec{W} + \vec{T}| = |\vec{F}_E|$$

بلافاصله پس از حذف میدان و حذف F، دو نیروی T و W باقی می‌مانند که برایند آن‌ها هم‌اندازه‌ی نیروی F بوده است، از این رو:

$$F_T = ma \Rightarrow |\vec{T} + \vec{W}| = ma \Rightarrow F_E = ma \Rightarrow qE = ma \Rightarrow ۴\times۱۰^{-۶}\times E = ۲\times۱۰^{-۲}\times۲ \Rightarrow E = ۱۰^۴\,\frac{N}{C}$$

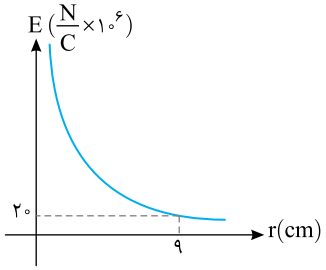
تمرین‌های تشریحی بخش سوم

۶۵- **بار الکتریکی $+۲\mu C$ در یک نقطه از میدان الکتریکی، نیرویی برابر $۵\times۱۰^{-۲}\,N$ وارد می‌شود، اندازه‌ی میدان الکتریکی را در این نقطه محاسبه کنید.** (تجربی - خرداد ۹۳)

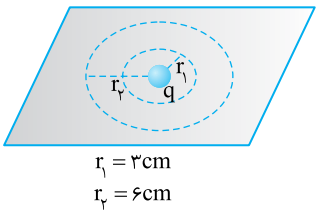
۶۶- **نمودار $E-r$ ذره‌ای مطابق شکل روبه‌رو است:**

الف) بار ذره را محاسبه کنید.

ب) اندازه‌ی میدان در $r = ۳m$ برابر چند نیوتون برکولن است؟



۶۷- مطابق شکل ذره‌ی بارداری درون صفحه‌ای قرار دارد. اگر بزرگی میدان روی محیط دایره‌ی (۱)، ۳×۱۰^{۷} نیوتون بر کولن از بزرگی میدان روی محیط دایره‌ی (۲) بیش‌تر باشد، اندازه‌ی بار ذره $\left(k=۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}\right)$ را بیابید.



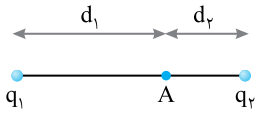
۶۸- اگر ذره‌ای با بار $q=-۲\mu C$ را در میدانی که بردار آن در SI به صورت $\vec{E}=(۱/۵\vec{i}-۲\vec{j})\times۱۰^{۷}$ است، قرار دهیم،

الف) بردار نیرو و اندازه‌ی نیرو را محاسبه کنید؟

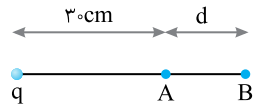
ب) اگر جرم ذره $۵g$ باشد و ذره تنها تحت تأثیر نیروی الکتریکی باشد شتاب را به‌دست آورید.

۶۹- میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای $q_۱=+۲\mu C$ و $q_۲=+۳۲\mu C$ در فاصله‌ی ۱۶ سانتی‌متری از بار $q_۲$ صفر می‌باشد. فاصله‌ی دو بار الکتریکی از یک‌دیگر چند سانتی‌متر است؟ (ریاضی - خرداد ۹۳)

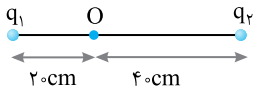
۷۰- در شکل روبه‌رو بزرگی میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی A برابر E است. اگر بار $q_۱$ خنثی شود، میدان الکتریکی در نقطه‌ی A بدون تغییر جهت برابر $۰/۵E$ می‌شود. دو بار را از نظر علامت و اندازه مقایسه کنید $(d_۱>d_۲)$.



۷۱- در شکل مقابل اگر اندازه‌ی میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در نقاط A و B به ترتیب E_A و E_B و $\frac{E_A}{E_B}=۲/۲۵$ باشد، d چند سانتی‌متر است؟



۷۲- در شکل روبه‌رو شدت میدان حاصل از دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی O برابر $\vec{E}$ است. اگر بار $q_۱$ را خنثی کنیم، میدان در نقطه‌ی O برابر $-\vec{E}$ می‌شود. نسبت $\frac{q_۱}{q_۲}$ را به‌دست آورید.

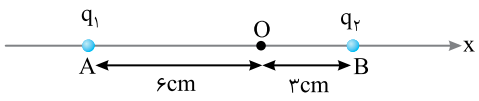


۷۳- دو ذره‌ی باردار $q_۱=+۴\mu C$ و $q_۲=+۲\mu C$ در نقطه‌های A و B روی محور x، مطابق شکل ثابت شده‌اند. (ریاضی - خرداد ۹۴)

الف) میدان الکتریکی برآیند در نقطه‌ی O مبدأ مختصات را (در SI) محاسبه کنید و آن را بر حسب بردارهای یکه بنویسید.

ب) اگر در نقطه‌ی O ذره‌ای با بار الکتریکی $-۵\mu C$ قرار دهیم، نیروی الکتریکی وارد بر ذره را در (در SI) بر حسب بردارهای یکه محاسبه کنید.

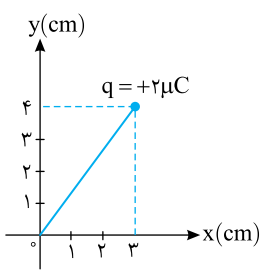
$\left(k=۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}\right)$



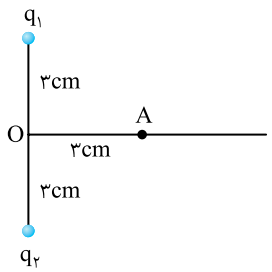
۷۴- بار $۳/۶\mu C$ در مبدأ مختصات قرار دارد. اگر بار $۱\mu C$ در نقطه‌ی $A(۶m,۰)$ و بار q در نقطه‌ی $B(۳m,۰)$ قرار گیرد، میدان الکتریکی در نقطه‌ی $C(۹m,۰)$ برابر $۱۰^{۳}\ \frac{N}{C}$ و خلاف جهت با محور xها می‌شود. مقدار q را به‌دست آورید. $\left(k=۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}\right)$

۷۵- الف) در شکل روبه‌رو میدان حاصل از بار q را، در مبدأ برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید. $\left(k=۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}\right)$

ب) بار $q'=+۲\mu C$ را در کدام نقطه قرار دهیم تا میدان خالص در مبدأ صفر شود؟



۷۶- دو بار الکتریکی نقطه‌ای همنام $q_1 = q_2 = 5\mu C$ مطابق شکل به فاصله‌ی ۶ سانتی‌متر از یک‌دیگر قرار دارند. (تجربی - خرداد ۹۱)



الف) اندازه‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ی A واقع بر عمودمنصف خط واصل دو بار، در فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از نقطه‌ی O چند نیوتون بر کولن است؟

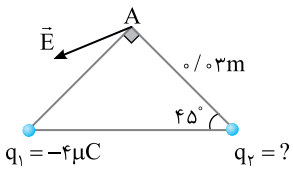
ب) جهت میدان الکتریکی را در نقطه‌ی A با رسم شکل تعیین کنید.

$(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

۷۷- دو بار الکتریکی ذره‌ای $q_1 = -q_2 = 10\mu C$ در فاصله‌ی $6cm$ از یک‌دیگر ثابت شده‌اند. میدان الکتریکی را روی عمودمنصف خطی که دو ذره را به یک‌دیگر وصل می‌کند و به فاصله‌ی $3cm$ از وسط خط واصل دو ذره، به دست آورید. (با رسم شکل) (ریاضی - دی ۹۱)

$(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

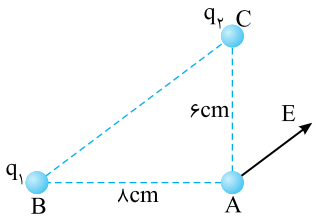
۷۸- در شکل روبه‌رو دو ذره‌ی باردار q_1 و q_2 در دو رأس یک مثلث متساوی‌الساقین ثابت شده‌اند و $\vec{E}$ میدان الکتریکی حاصل از این دو بار، در رأس قائم‌الزاویه‌ی A است. (ریاضی - خرداد ۹۱)



الف) بار q_2 مثبت است یا منفی؟

ب) اگر $q_1 = -4\mu C$ باشد، اندازه‌ی بار q_2 را طوری تعیین کنید که بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ برابر $5\times10^7 \frac{N}{C}$ باشد. $(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

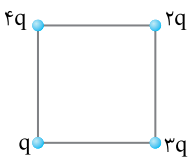
۷۹- در شکل روبه‌رو میدان در رأس قائمه‌ی A با خط BC موازی است.



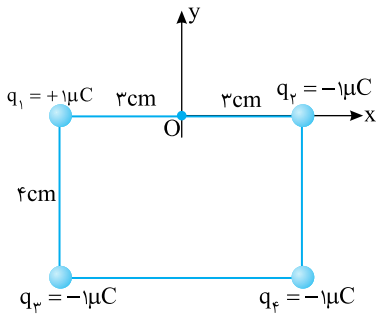
الف) علامت q_1 و q_2 را مشخص کنید.

ب) نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ را بیابید.

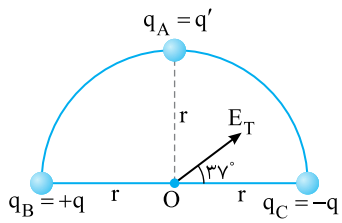
۸۰- اگر در یک رأس مربعی بار الکتریکی q قرار گیرد، اندازه‌ی میدان حاصل از آن در مرکز مربع E خواهد بود. در صورتی که در چهار رأس این مربع بارهای الکتریکی مطابق شکل روبه‌رو قرار گیرد، اندازه‌ی میدان در مرکز آن چند برابر E است؟



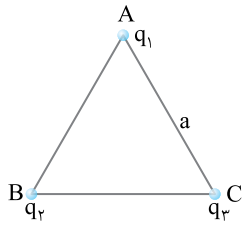
۸۱- میدان الکتریکی خالص (برآیند) ناشی از چهار بار را در نقطه‌ی O برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.



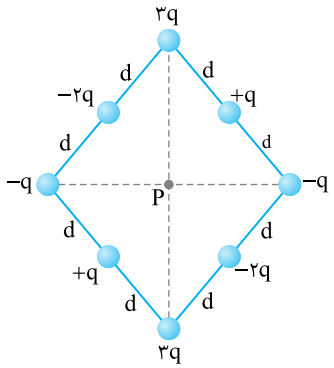
۸۲- در شکل روبه‌رو سه بار q_A، q_B و q_C روی محیط نیم‌دایره قرار دارند. جهت میدان الکتریکی برآیند در مرکز نیم‌دایره مطابق شکل است. بار الکتریکی q_A چند برابر بار الکتریکی q_B است؟ $(\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0/6)$



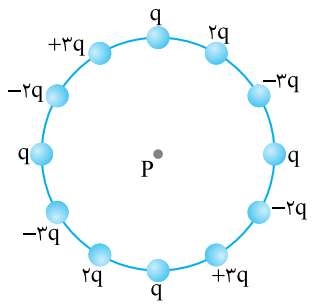
۸۳- در گوشه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $a=1m$ مطابق شکل بارهای $q_1=-3\mu C$ و $q_2=q_3=+3\mu C$ قرار دارند. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P (وسط ضلع BC) به‌دست آورید. اگر بار $-4\mu C$ در نقطه‌ی P قرار گیرد، چه نیرویی بر آن وارد می‌شود؟



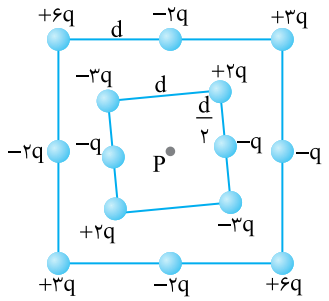
۸۴- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به‌دست آورید.



۸۵- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به‌دست آورید.



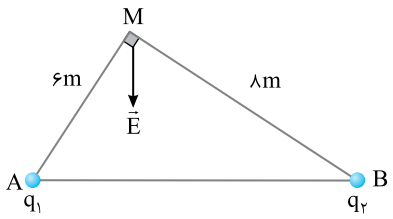
۸۶- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به‌دست آورید.



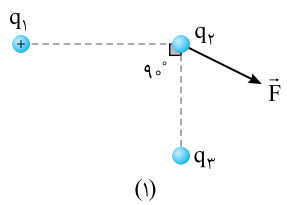
۸۷- در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی بار q_2 برابر $10mC$ است اما علامت آن مشخص نیست. میدان الکتریکی حاصل از دو بار q_1 و q_2 در نقطه‌ی M برابر $\vec{E}$ بوده و امتداد آن بر خط AB عمود است.

الف) علامت بارهای q_1 و q_2 را مشخص کنید.

ب) مقدار بار q_2 را به دست آورید.



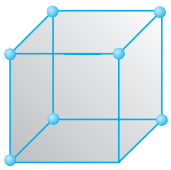
۸۸- در شکل (۱) $\vec{F}$ برآیند نیروهای وارد بر بار q_2 است. نوع بار q_2 و q_3 را مشخص کنید. (ریاضی - دی ۹۱)



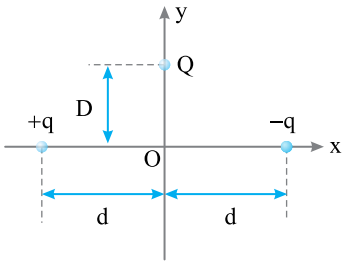
(۱)

۸۹- روی دایره‌ای به شعاع $1m$ سه نقطه به فاصله‌های مساوی از یک‌دیگر قرار دارند. دو بار الکتریکی نقطه‌ای $+1\mu C$ هر کدام روی دو تا از این نقاط قرار دارند. میدان الکتریکی حاصل از آن دو ذره در نقطه‌ی سوم چند نیوتون بر کولن است؟ $(k=9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$

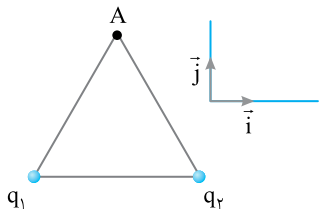
۹۰- در هر یک از رأس‌های مکعبی باری به اندازه‌ی q گذاشته‌ایم، جز یک رأس آن. اندازه‌ی میدان الکتریکی در مرکز این مکعب چقدر است؟ (طول ضلع مکعب را a بگیرید.)



۹۱- در شکل روبه‌رو اگر برآیند میدان الکتریکی بارها در نقطه‌ی O با محور x زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد، q چقدر است؟ در این حالت بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ی O را به‌دست آورید. $(Q=+40\mu C\ ,\ D=20cm\ ,\ d=30cm)$



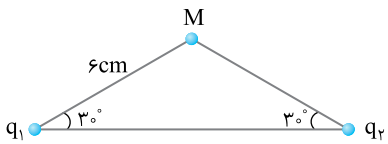
۹۲* (۱) مطابق شکل دو ذره‌ی باردار q_1 و q_2 در فاصله‌ی $0/01m$ از یک‌دیگر قرار دارند. بردار میدان الکتریکی برآیند را در نقطه‌ی A که فاصله‌ی آن از هر یک از بارها برابر $0/01m$ است، بر حسب بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل بنویسید. (تجربی - خرداد ۹۴)



$$\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$k=9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}\ ,\ q_1=q_2=2nC$$

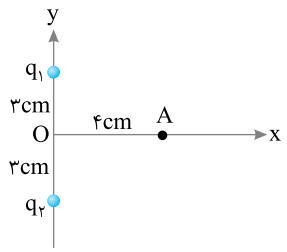
۹۳* در شکل روبه‌رو اندازه و جهت میدان الکتریکی را در نقطه‌ی M تعیین کنید. (ریاضی - دی ۹۲)



$$q_1=q_2=q=4\mu C$$

$$(k=9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}\ ,\ \cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\ ,\ \cos 60^\circ=\frac{1}{2})$$

۹۴* دو بار الکتریکی $q_1=-q_2=+5\mu C$ مطابق شکل، به فاصله‌ی $6cm$ از یک‌دیگر قرار دارند. (ریاضی - شهریور ۹۲)

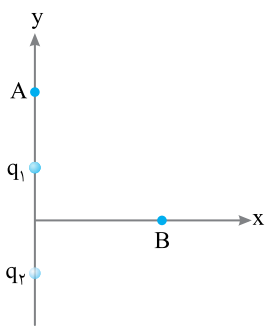


الف) اندازه‌ی میدان الکتریکی را در نقطه‌ی A واقع بر عمودمنصف خط واصل دو بار و در فاصله‌ی $4cm$ از نقطه‌ی O (وسط خط واصل دو بار) به دست آورید.

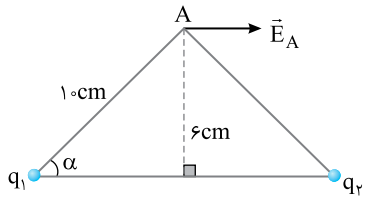
$$(k=9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$$

ب) بردار میدان الکتریکی را بر حسب بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

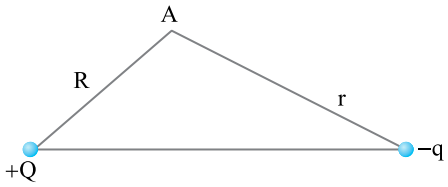
۹۵* در شکل روبه‌رو دو بار هم‌اندازه با بارهای غیر همنام $q_1=+q$ و $q_2=-q$ که به فاصله‌ی $2a$ از یک‌دیگر قرار دارند نشان داده شده است. این مجموعه را دو قطبی الکتریکی می‌نامند. میدان الکتریکی دو قطبی الکتریکی را در نقطه‌ی A در فاصله‌ی $y\ (y>a)$ از مرکز دو قطبی (نقطه‌ی وسط پاره‌خط واصل دو بار دو قطبی) و روی محور دو قطبی (خطی که از دو بار دو قطبی می‌گذرد) حساب کنید. میدان الکتریکی دو قطبی را در نقطه‌ی B در فاصله‌ی x از مرکز دو قطبی و واقع بر عمود منصف پاره‌خط واصل دو بار دو قطبی به‌دست آورید.



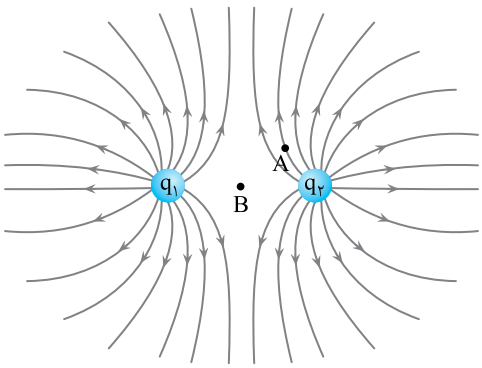
۱- مسأله‌های ستاره‌دار جزء برنامه رسی کتاب درسی نیستند.



۹۶- * مطابق شکل، دو ذره با بارهای الکتریکی q_1 و q_2 که خط واصل آن‌ها در راستای محور x است، در دو رأس یک مثلث متساوی‌الساقین ثابت شده‌اند. اگر بردار میدان الکتریکی در نقطه‌ی A (در SI) به صورت $\vec{E}_A=(۷/۲\times۱۰^۴)\vec{i}$ باشد، اندازه و نوع بارهای الکتریکی q_1 و q_2 را تعیین کنید. $(k=۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$ (ریاضی - شهریور ۹۴)



۹۷- * در شکل روبه‌رو میدان الکتریکی ناشی از دو بار $-q$ و $+Q$ در نقطه‌ی A، موازی خط واصل بین دو بار است. درستی رابطه‌ی $|\frac{Q}{q}|=(\frac{R}{r})^۳$ را ثابت کنید.

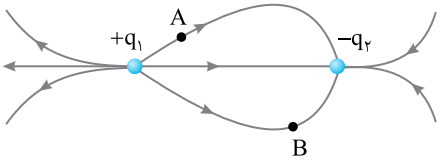


۹۸- شکل مقابل خط‌های میدان الکتریکی در اطراف دو ذره با بارهای الکتریکی q_1 و q_2 را نشان می‌دهد. (ریاضی - دی ۹۳)

الف) نوع بار الکتریکی q_1 را تعیین کنید.

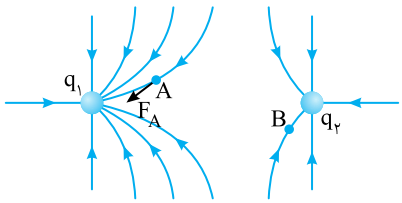
ب) اندازه‌ی این دو بار را با یک‌دیگر مقایسه کنید.

پ) در کدام یک از نقاط A یا B میدان الکتریکی قوی‌تر است؟



۹۹- الف) دو بار الکتریکی $+q_1$ و $-q_2$ در فاصله‌ی معینی از یک‌دیگر واقع شده‌اند، به طوری که خط‌های میدان الکتریکی آن‌ها مطابق شکل روبه‌رو است. بردار میدان را در نقطه‌های A و B رسم کنید. (ریاضی - خرداد ۹۲)

ب) دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1=+۲\mu C$ و $q_2=+۸\mu C$ در فاصله‌ی ۳۰ سانتی‌متر از یک‌دیگر بر روی خط راستی قرار دارند. در چه فاصله‌ای از بار q_2 برآیند میدان الکتریکی صفر می‌شود؟ $(k=۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱۰۰- شکل روبه رو خط‌های میدان در اطراف دو ذره‌ی q_1 و q_2 را نشان می‌دهد.

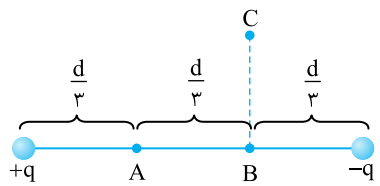
الف) بار ذره‌های q_1 و q_2 را مشخص کنید.

ب) اندازه‌ی بارهای q_1 و q_2 را با هم مقایسه کنید.

پ) اگر F_A نشان دهنده‌ی نیروی وارد بر ذره‌ی q_A باشد، علامت بار q_A را مشخص کنید.

ت) اگر بار منفی q_B را در نقطه‌ی B قرار دهیم، جهت نیرو را مشخص کنید.

ث) اگر $|q_A|=|q_B|$ باشد، به کدام بار نیروی بیش‌تری وارد می‌شود؟

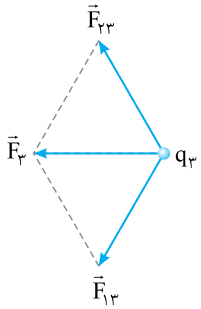


۱۰۱- در شکل روبه‌رو که دو بار $+q$ و $-q$ در فاصله‌ی d از هم قرار دارند

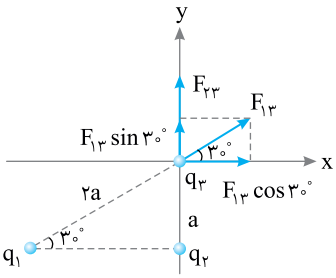
الف) اگر از نقطه‌ی A تا B برویم، اندازه‌ی میدان چگونه تغییر می‌کند؟

ب) اگر از نقطه‌ی B تا C برویم، اندازه‌ی میدان چگونه تغییر می‌کند؟

ب) بردار نیرو مطابق شکل موازی خط $q_۱q_۲$ و به سمت چپ است. $(\vec{F}_۳=-۵۰\vec{i})$



پاسخ ۶۴ (B) ابتدا نیروهای وارد بر $q_۳$ را محاسبه و رسم می‌کنیم. نیرویی که بار $q_۲$ بر بار $q_۳$ وارد می‌کنـد روی محور y بوده و تجزیـه لازم ندارد. ولی نیرویی که بار $q_۱$ بر بار $q_۳$ وارد می‌کند را باید در راستای محورهای x و y تجزیه کنیم:



$$F_{۲۳}=\frac{kq_۲q_۳}{a^۲}=\frac{۹\times۱۰^۹\times۱۰^{-۵}\times۱۰^{-۵}}{۰/۵^۲}=۳/۶N$$

$$F_{۱۳}=\frac{kq_۱q_۳}{(۲a)^۲}=\frac{۹\times۱۰^۹\times۱۰^{-۵}\times۱۰^{-۵}}{۱^۲}=۰/۹N$$

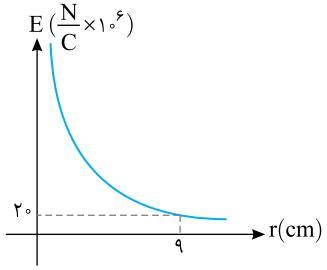
$$\vec{F}=F_{۱۳}\cos ۳۰^\circ\vec{i}+(F_{۲۳}+F_{۱۳}\sin ۳۰^\circ)\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{F}=۰/۹\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{i}+(۳/۶+۰/۹\times\frac{۱}{۲})\vec{j}\Rightarrow\vec{F}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲۰}\vec{i}+۴/۰۵\vec{j}(N)$$

پاسخ ۶۵ (A) با توجه به تعریف میدان $(E=\frac{F}{q})$ خواهیم داشت:

$$F=Eq\Rightarrow۵\times۱۰^{-۲}=E\times۲\times۱۰^{-۶}\Rightarrow E=۲/۵\times۱۰^۴\ \frac{N}{C}$$

پاسخ ۶۶ (A) الف) با توجه به نمودار در فاصله‌ی ۹cm میدان برابر $۲۰\times۱۰^۶\ \frac{N}{C}$ می‌شـود،



پس:

$$|\vec{E}|=k\frac{q}{r^۲}=۹\times۱۰^۹\times\frac{q}{۸۱\times۱۰^{-۴}}=۲۰\times۱۰^۶\Rightarrow q=۱۸\times۱۰^{-۶}=۱۸\mu C$$

ب) بار برابر $q=۱۸\mu C$ و فاصله $r=۳m$ است، پس میدان برابر است با:

$$|\vec{E}|=k\frac{q}{r^۲}=۹\times۱۰^۹\times\frac{۱۸\times۱۰^{-۶}}{۹}=۱۸\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

پاسخ ۶۷ (A) میدان روی محیط دایره‌ی (۱)، با توجه به فاصله q از آن $(r_۱=۳cm)$ برابر است با:

$$|\vec{E}_۱|=k\frac{q}{r_۱^۲}=۹\times۱۰^۹\times\frac{q}{۹\times۱۰^{-۴}}=q\times۱۰^{۱۳}$$

میدان روی محیط دایره‌ی (۲) با توجه به فاصله‌ی q از آن $(r_۲=۶cm)$ برابر است با:

$$|\vec{E}_۲|=k\frac{q}{r_۲^۲}=۹\times۱۰^۹\times\frac{q}{۳۶\times۱۰^{-۴}}=\frac{q}{۴}\times۱۰^{۱۳}$$

اندازه‌ی $E_۱$، $۳\times۱۰^۷\ \frac{N}{C}$ از اندازه‌ی $E_۲$ بزرگتر است پس:

$$\vec{E}_۱-\vec{E}_۲=q\times۱۰^{۱۳}-\frac{q}{۴}\times۱۰^{۱۳}=۳\times۱۰^۷\Rightarrow\frac{۳q}{۴}\times۱۰^{۱۳}=۳\times۱۰^۷\Rightarrow q=۴\times۱۰^{-۶}C=۴\mu C$$

پاسخ ۶۸ (C) با توجه به رابطه‌ی $\vec{F}=\vec{E}q$ داریم:

الف)

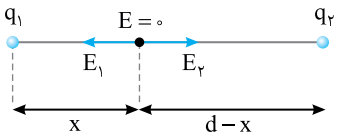
$$\vec{F}=\vec{E}q\Rightarrow\vec{F}=((۱/۵\vec{i}-۲\vec{j})\times۱۰^۷)\times(-۲\times۱۰^{-۶})=-۳۰\vec{i}+۴۰\vec{j}$$

$$|\vec{F}|=\sqrt{(-۳۰)^۲+(۴۰)^۲}=\sqrt{۹۰۰+۱۶۰۰}=\sqrt{۲۵۰۰}=۵۰N$$

ب) در قانون دوم نیوتون داریم $F=ma$ پس:

$$F=ma\Rightarrow ۵۰=۵\times ۱۰^{-۳}\times a\Rightarrow a=۱۰^{۴}\ \frac{m}{s^{۲}}$$

پاسخ ۶۹ باید میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ برابر باشد تا میدان برآیند صفر شود، از این‌رو:



$$E_۱=E_۲\Rightarrow \frac{kq_۱}{r_۱^{۲}}=\frac{kq_۲}{r_۲^{۲}}\Rightarrow \frac{۲}{x^{۲}}=\frac{۳۲}{۱۶^{۲}}\Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۴}{۱۶}\Rightarrow x=۴cm$$

میدان در بین دو بار، صفر می‌شود و x فاصله از بار کوچک‌تر و d فاصله‌ی دو بار از هم است، بنابراین داریم:

$$d=۱۶+۴=۲۰cm$$

پاسخ ۷۰ اگر میدان الکتریکی بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را در نقطه‌ی A به ترتیب $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ بنامیم، داریم:

$$\begin{cases}\vec{E}_۱+\vec{E}_۲=\vec{E}\\ \vec{E}_۲=۰/۵\vec{E}\end{cases}\Rightarrow \vec{E}_۱=۰/۵\vec{E}$$

میدان الکتریکی بارهای $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی A هم‌جهتند $(\vec{E}_۱=\vec{E}_۲=۰/۵\vec{E})$؛ بنابراین علامت بارها یکسان نیست. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها در نقطه‌ی A برابر $۰/۵E$ است. بنابراین بار $q_۱$ که در فاصله‌ی بیش‌تری از نقطه‌ی A نسبت به بار $q_۲$ قرار دارد، بزرگ‌تر است.

$$\begin{cases}E_۱=\frac{k|q_۱|}{d_۱^{۲}}=۰/۵E\\ E_۲=\frac{k|q_۲|}{d_۲^{۲}}=۰/۵E\end{cases}\Rightarrow \frac{|q_۱|}{d_۱^{۲}}=\frac{|q_۲|}{d_۲^{۲}}\Rightarrow \frac{|q_۱|}{|q_۲|}=(\frac{d_۱}{d_۲})^{۲}\xrightarrow{d_۱>d_۲}|q_۱|>|q_۲|$$

از این‌که با حذف یکی از بارها بدون تغییر جهت میدان اندازه‌ی میدان در نقطه‌ی A کوچک‌تر شده هم می‌توان نتیجه گرفت که بارهای $q_۱$ و $q_۲$ ناهمنام هستند.

پاسخ ۷۱ میدان در نقاط A و B از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases}E_A=k\frac{|q|}{(۰/۳)^{۲}}\\ E_B=k\frac{|q|}{(۰/۳+d)^{۲}}\end{cases}$$

با توجه به نسبت $\frac{E_A}{E_B}$ مقدار d به‌دست می‌آید:

$$\frac{E_A}{E_B}=(۱+\frac{d}{۰/۳})^{۲}=۲/۲۵\Rightarrow ۱+\frac{d}{۰/۳}=\sqrt{۲/۲۵}=۱/۵\Rightarrow d=۰/۱۵m=۱۵\ cm$$

پاسخ ۷۲ میدان حاصل از $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی O به‌ترتیب برابر $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ است که برآیند آن‌ها $\vec{E}$ است. از طرفی با حذف $q_۱$، میدان، ناشی از بار $q_۲$ است، از این‌رو

می‌توان دو معادله‌ی زیر را نوشت:

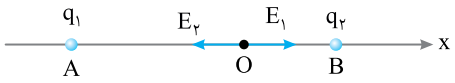
$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_۱+\vec{E}_۲\\ -\vec{E}=\vec{E}_۲\end{cases}$$

درنتیجه، $\vec{E}_۲=\frac{-\vec{E}_۱}{۲}$ بنابراین داریم:

$$|\frac{-E_۱}{E_۲}|=۲\Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲}\times\frac{۰/۴^{۲}}{۰/۲^{۲}}=۲\Rightarrow ۴\frac{q_۱}{q_۲}=۲\Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲}=\frac{۱}{۲}$$

دو بار باید همنام باشند تا میدان‌های آن‌ها در بین دو بار در خلاف جهت هم باشد.

A پاسخ ۷۳ الف) با توجه به رابطه‌ی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای، میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ را به دست می‌آوریم:



$$E_۱ = k\frac{q_۱}{r_۱^۲} \Rightarrow E_۱ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۴\times۱۰^{-۶}}{۳۶\times۱۰^{-۴}} = ۱۰^۷ \Rightarrow \vec{E}_۱ = ۱۰^۷\vec{i}$$

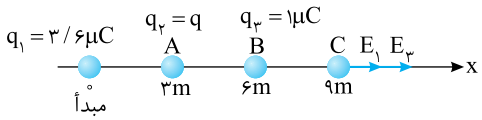
$$E_۲ = k\frac{q_۲}{r_۲^۲} \Rightarrow E_۲ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۲\times۱۰^{-۶}}{۹\times۱۰^{-۴}} = ۲\times۱۰^۷ \Rightarrow -۲\times۱۰^۷ i$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ = (-۱۰^۷)\vec{i}$$

ب)

$$\vec{F}_o = q\vec{E}_T \Rightarrow \vec{F}_o = -۵\times۱۰^{-۶} \times (-۱۰^۷) = ۵۰\vec{i}$$

B پاسخ ۷۴ بزرگی میدان حاصل از بار $q_۱$ و $q_۳$ را محاسبه می‌کنیم:



$$|\vec{E}_۱| = k\frac{q_۱}{r_۱^۲} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۳/۶\times۱۰^{-۶}}{۸۱} = ۴۰۰\,\frac{N}{C}$$

$$|E_۳| = k\frac{q_۳}{r_۳^۲} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۱\times۱۰^{-۶}}{۹} = ۱۰۰۰\,\frac{N}{C}$$

بزرگی برآیند میدان در نقطه ۹m برابر با $+۱۰^۳\,\frac{N}{C}$ است و چون جهت آن در خلاف جهت محور x است، پس بزرگی آن برابر با $-۱۰^۳\,\frac{N}{C}$ است،

بنابراین:

$$\vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \vec{E}_۳ = \vec{E} \Rightarrow ۱۰۰۰ + ۴۰۰ + E_۲ = -۱۰۰۰ \Rightarrow E_۲ = -۲۴۰۰\,\frac{N}{C}$$

پس بزرگی میدان $E_۲$ برابر $۲۴۰۰\,\frac{N}{C}$ و علامت آن منفی است یعنی بردار $E_۲$ در خلاف محور x ها قرار دارد:

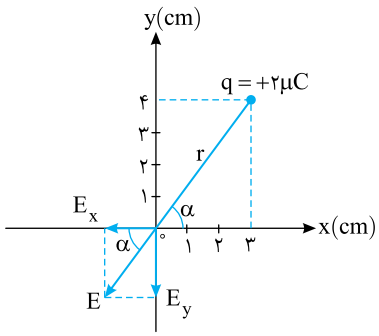
$$|\vec{E}_۲| = k\frac{q_۲}{r_۲^۲} = ۲۴۰۰ \Rightarrow ۹\times۱۰^۹ \times \frac{q}{۳۶} = ۲۴۰۰ \Rightarrow q\times۱۰^۹ = ۹۶۰۰ \Rightarrow q = ۹/۶\times۱۰^{-۶}\,C = ۹/۶\,\mu C$$

B پاسخ ۷۵ ابتدا فاصله‌ی بار q را از مبدأ به‌دست می‌آوریم.

$$r = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵\,cm$$

اندازه‌ی میدان را در مبدأ حساب می‌کنیم.

$$E = k\frac{|q|}{r^۲} \Rightarrow E = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۲\times۱۰^{-۶}}{۲۵\times۱۰^{-۴}} \Rightarrow E = ۷/۲\times۱۰^۶\,\frac{N}{C}$$



میدان را در دو راستای x و y تجزیه می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:

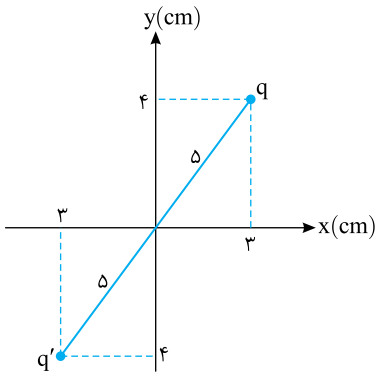
$$\cos\alpha = \frac{E_x}{E} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{E_x}{۷/۲\times۱۰^۶} \Rightarrow E_x = ۴/۳۲\times۱۰^{+۶}\,\frac{N}{C}$$

$$\sin\alpha = \frac{E_y}{E} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{E_y}{۷/۲\times۱۰^۶} \Rightarrow E_y = ۵/۷۶\times۱۰^{+۶}\,\frac{N}{C}$$

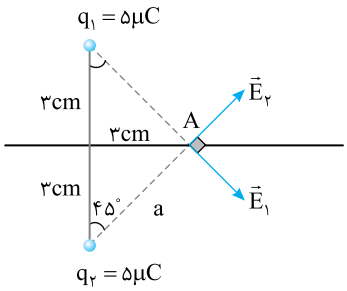
در این صورت میدان برحسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ خواهد شد:

$$\vec{E} = -۴/۳۲\times۱۰^۶\vec{i} - ۵/۷۶\times۱۰^۶\vec{j}$$

برای صفر شدن میدان در مبدأ باید بار q' هم‌اندازه‌ی بار q و در فاصله‌ی $5cm$ در سوی دیگر مبدأ یعنی در ربع سوم باشد.



پاسخ ۷۶ الف) ابتدا فاصله‌ی هر بار تا نقطه‌ی A را به دست می‌آوریم:

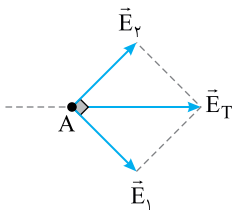


$$a = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = ۳\sqrt{۲}cm$$

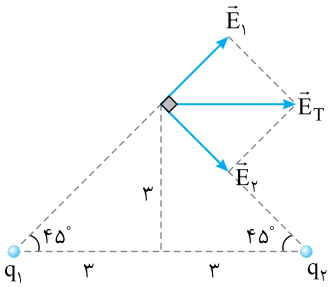
$$E_۱ = E_۲ = k\frac{q_۱}{a^۲} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۵\times۱۰^{-۶}}{۱۸\times۱۰^{-۴}} = ۲/۵\times۱۰^۷$$

$$E_T = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲} = \sqrt{(۲/۵\times۱۰^۷)^۲ \times ۲} = ۲/۵\sqrt{۲}\times۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

ب) مطابق شکل جهت میدان به سمت راست است:



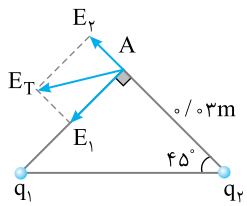
پاسخ ۷۷ با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$E_۱ = k\frac{q_۱}{r^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{۹\times۱۰^۹ \times ۱۰\times۱۰^{-۶}}{۱۸\times۱۰^{-۴}} = ۵\times۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

$$E_T = ۲E_۱ \cos\frac{۹۰^\circ}{۲} \Rightarrow E_T = ۲\times۵\times۱۰^۷ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵\sqrt{۲}\times۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

پاسخ ۷۸ الف) با توجه به شکل روبه‌رو باید بار $q_۲$ مثبت باشد.



ب) میدان بار $q_۱$ را حساب می‌کنیم.

$$E_۱ = k\frac{q_۱}{r^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{۹\times۱۰^۹ \times ۴\times۱۰^{-۶}}{۹\times۱۰^{-۴}} = ۴\times۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

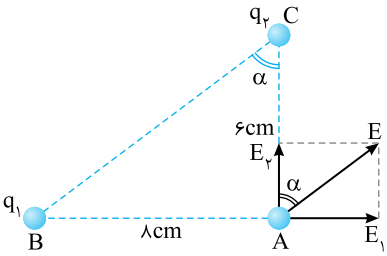
با توجه به شکل و به رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت:

$$E_T = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲} \Rightarrow ۵\times۱۰^۷ = \sqrt{(۴\times۱۰^۷)^۲ + E_۲^۲} \Rightarrow E_۲ = ۳\times۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

اکنون اندازه‌ی بار $q_۲$ را به دست می‌آوریم:

$$E_۲ = k\frac{q_۲}{r^۲} \Rightarrow ۳\times۱۰^۷ = \frac{۹\times۱۰^۹ \times q_۲}{۹\times۱۰^{-۴}} \Rightarrow q_۲ = ۳\times۱۰^{-۶} C$$

پاسخ ۷۹ الف) بردار E با BC موازی می‌باشد و با توجه به مورب بودن CA زاویه‌ی $\hat{\alpha} = BCA = EAC$ می‌باشد. حال بردار E را بر بردارهای قائم تجزیه می‌کنیم. E_1 حاصل از بار q_1 و E_2 حاصل از بار q_2 می‌باشد و میدان حاصل از q_1 به سمت خارج بار است. باید q_1 مثبت باشد، همچنین E_2 به سمت بار q_2 است، از این‌رو باید q_2 منفی باشد.



ب)

$$\begin{cases} E\sin\alpha = E_1 \\ E\cos\alpha = E_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{E\sin\alpha}{E\cos\alpha} = \tan\alpha$$

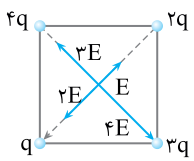
$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۸}{۶}$$

$$E_1 = k\frac{q_1}{۶۴\times۱۰^{-۴}} = k\frac{|q_1|\times۱۰^۴}{۶۴}$$

$$E_2 = k\frac{q_2}{۳۶\times۱۰^{-۴}} = k\frac{|q_2|\times۱۰^۴}{۳۶}$$

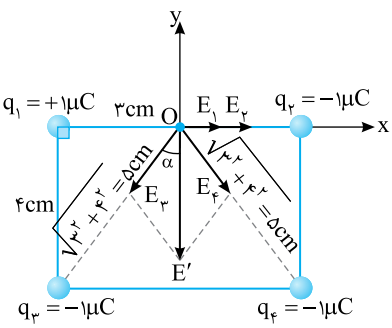
$$\Rightarrow \frac{k\frac{|q_1|\times۱۰^۴}{۶۴}}{k\frac{|q_2|\times۱۰^۴}{۳۶}} = \frac{۸}{۶} \Rightarrow \frac{۳۶|q_1|}{۶۴|q_2|} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \left|\frac{q_1}{q_2}\right| = \frac{۶۴}{۲۷} \xrightarrow[q_2<۰]{q_1>۰} \frac{q_1}{q_2} = -\frac{۶۴}{۲۷}$$

پاسخ ۸۰ میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها در مرکز مربع مطابق شکل مقابل است. می‌توان میدان‌ها را با هم جمع کرد تا میدان کل را به‌دست آورد. ولی اگر دقت کنید خواهید دید برآیند میدان‌های $\vec{E}$ و $۲\vec{E}$ برابر $\vec{E}$ به سمت q و برآیند میدان‌های $۳\vec{E}$ و $۴\vec{E}$ نیز برابر $\vec{E}$ و به سمت $۳q$ است، پس جمع چهار میدان بالا برابر جمع دو میدان $\vec{E}$ عمود بر هم است که اندازه‌ی آن برابر $\sqrt{۲}E$ می‌شود.



پاسخ ۸۱ ابتدا جهت میدان حاصل از هر بار را مشخص کرده و بزرگی هر کدام را محاسبه می‌کنیم:

اندازه بارهای q_1 و q_2 با هم برابر و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی O یکسان است بنابراین میدان‌های حاصل از آن‌ها باهم برابر و هر دو افقی و در راستای i می‌باشد.



$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = k\frac{q}{r^۲} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۱\times۱۰^{-۶}}{۹\times۱۰^{-۴}} = ۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_i = (E_1 + E_2)_i = ۲\times۱۰^۷ \vec{i}$$

همچنین اندازه‌ی بارهای q_3 و q_4 باهم برابر و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه O یکسان است، پس:

$$|\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = k\frac{q}{r^۲} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۱\times۱۰^{-۶}}{۲۵\times۱۰^{-۴}} = ۳/۶\times۱۰^۶ \frac{N}{C}$$

میدان‌های $\vec{E}_3$ و $\vec{E}_4$ باهم هم‌اندازه می‌باشند و به دلیل تقارن، بردار برآیند آن $\vec{E}'$ قائم بوده در راستای $-j$ می‌باشد.

(مؤلفه‌های افقی $\vec{E}_3$ و $\vec{E}_4$ یکدیگر را خنثی می‌کنند.) پس برآیند مؤلفه‌های عمودی را حساب می‌کنیم:

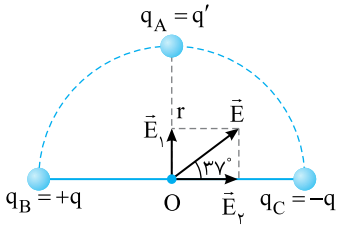
$$\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{۴}{۵}$$

$$E_{۳y} = E_{۴y} = E_۳\cos\alpha = ۳/۶\times۱۰^۶ \times \frac{۴}{۵} = ۲/۸۸\times۱۰^۶ \frac{N}{C}$$

$$E' = E_{T_y} \Rightarrow E_{T_y} = E_{۳j} + E_{۴j} = ۲\times E_{۳j} = ۲\times۲/۸۸\times۱۰^۶ = ۵/۷۶\times۱۰^۶ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E} = ۲\times۱۰^۷ \vec{i} - ۵/۷۶\times۱۰^۶ \vec{j}$$

پاسخ ۸۲ با تجزیه بردار E روی محورهای قائم و افقی به مؤلفه‌های $E_۱$ و $E_۲$ داریم:



$$E\cos ۳۷^\circ = \vec{E}_۲ \Rightarrow \frac{\vec{E}_۱}{\vec{E}_۲} = \tan ۳۷^\circ \qquad (۱)$$
$$E\sin ۳۷^\circ = \vec{E}_۱$$

که $\vec{E}_۱$ میدان بار q_A و $\vec{E}_۲$ میدان برآیند میدان بارهای q_B و q_C در نقطه‌ی O می‌باشد.

$$E_۱ = E_A = k\frac{q_A}{r^۲} = k\frac{q'}{r^۲}$$

$$E_۲ = E_C + E_B = k\frac{q_C}{r^۲} + k\frac{q_B}{r^۲} = k\frac{۲q}{r^۲}$$

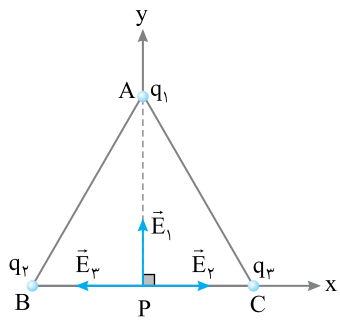
حال با توجه به معادله‌ی (۱) داریم:

$$\frac{|\vec{E}_۱|}{|\vec{E}_۲|} = \frac{k\frac{|q'|}{r^۲}}{k\frac{|۲q|}{r^۲}} = \tan ۳۷^\circ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{|q'|}{۲q} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{|q'|}{|q|} = \frac{۳}{۲}$$

بار q' با توجه به جهت میدان آن باید منفی باشد از این‌رو:

$$\frac{q_A}{q_B} = \frac{q_A}{q_B} = -\frac{۳}{۲}$$

پاسخ ۸۳ AP در مثلث ABC هم نیمساز و هم ارتفاع است:



$$\cos \hat{PAC} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow \cos ۳۰^\circ = \frac{AP}{a} \Rightarrow AP = a\cos ۳۰^\circ = ۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AP = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\,m$$

$$E_۱ = \frac{kq_۱}{r_۱^۲} = \frac{kq_۱}{AP^۲} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۳\times۱۰^{-۶}}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} \Rightarrow E_۱ = ۳۶\times۱۰^۳\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \vec{E}_۳ \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_x = \vec{E}_{۱x} + \vec{E}_{۲x} + \vec{E}_{۳x} \\ \vec{E}_y = \vec{E}_{۱y} + \vec{E}_{۲y} + \vec{E}_{۳y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = ۰ + E_۲ - E_۳ = E_۲ - E_۳ \\ E_y = E_۱ + ۰ + ۰ = E_۱ \end{cases}$$

از آن‌جا که نقطه‌ی P وسط ضلع BC و $q_۲ = q_۳$ است، $E_۲ = E_۳$ و در نتیجه $E_x = ۰$ است و داریم:

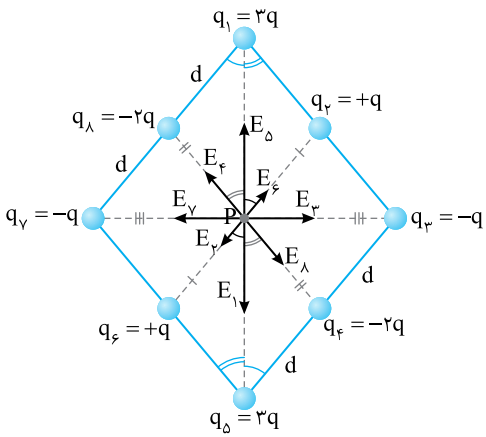
$$E_x = ۰, E_y = E_۱, \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} \Rightarrow \vec{E} = E_۱\vec{j} \Rightarrow \vec{E} = ۳۶۰۰۰\vec{j}\,\frac{N}{C}$$

نیروی وارد بر یک بار در یک میدان الکتریکی از رابطه‌ی $\vec{F} = q\vec{E}$ به‌دست می‌آید که اگر بار q منفی باشد، جهت نیرو در خلاف جهت میدان الکتریکی است. بنابراین:

$$\vec{F} = -۴\times۱۰^{-۶}\times(۳۶۰۰۰\vec{j}) = -۰/۱۴۴\vec{j}$$

یعنی نیرو در جهت منفی محور y و بزرگی آن $۱۴۴\times۱۰^{-۳}\,N$ است.

پاسخ ۸۴ میدان حاصل از هر بار نقطه‌ای را در مرکز P می‌کشیم.



اندازه‌های $q_۲$ و $q_۶$ و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشد، پس:

$$E_۶ = E_۲ = k\frac{q}{r^۲}$$

و چون $E_۲$ و $E_۶$ خلاف جهت و هم‌اندازه با هم می‌باشند:

$$\vec{E}_۶ + \vec{E}_۲ = E_۶ - E_۲ \xrightarrow{E_۲ = E_۴} \vec{E}_۲ + \vec{E}_۶ = ۰$$

اندازه‌های $q_۸$ و $q_۴$ و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشد پس:

$$E_۸ = E_۴ = k\frac{۲q}{r^۲}$$

و چون $E_۸$ و $E_۴$ خلاف جهت و هم‌اندازه با هم می‌باشند:

$$\vec{E}_۸ + \vec{E}_۴ = E_۸ - E_۴ = ۰$$

اندازه‌های $q_۳$ و $q_۷$ و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشد، پس:

$$E_۳ = E_۷ = k\frac{q}{r^۲}$$

و چون $E_۳$ و $E_۷$ خلاف جهت و هم‌اندازه با هم می‌باشند.

$$\vec{E}_۳ + \vec{E}_۷ = E_۳ - E_۷ = ۰$$

اندازه‌ی بارهای $q_۱$ و $q_۵$ و فاصله هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشند، پس:

$$E_۵ = E_۱ = \frac{k۳q}{r^۲}$$

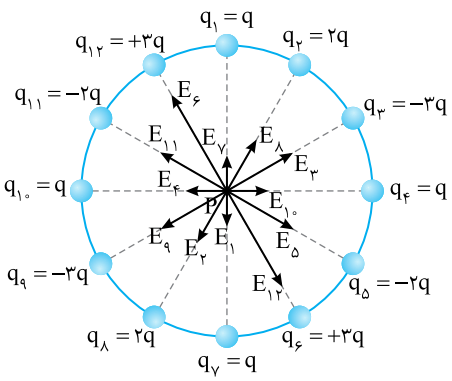
و چون $E_۱$ و $E_۵$ خلاف جهت هم و هم‌اندازه می‌باشند.

$$\vec{E} = \vec{E}_۵ + \vec{E}_۱ = E_۵ - E_۱ = ۰$$

بنابراین میدان‌ها در نقطه‌ی P هم را خنثی می‌کنند و میدان برآیند در نقطه P صفر است.

پاسخ ۸۵ (B) میدان‌های $q_۱$ و $q_۷$ در یک راستا و در خلاف جهت هم می‌باشند و چون این دو بار و فاصله‌ی هر کدام تا P با هم برابرند پس اندازه‌ی میدان آن‌ها با هم برابر می‌باشد:

$$E_۱ = E_۷, E = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۷ = E_۱ - E_۷ = ۰$$

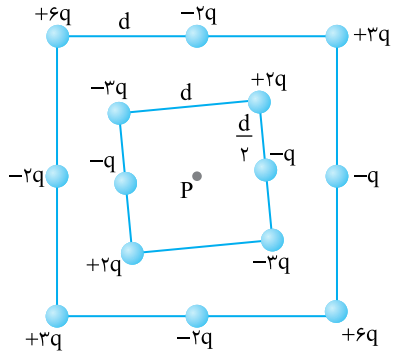


میدان‌های $q_۲$ و $q_۸$ در یک راستا و در خلاف جهت هم می‌باشند و چون اندازه‌ی این دو بار و فاصله‌ی آن‌ها از P با هم برابر می‌باشد پس اندازه‌ی میدان آن‌ها با هم برابر می‌باشد :

$$E_۲ = E_۸, E = \vec{E}_۲ + \vec{E}_۸ = E_۲ - E_۸ = ۰$$

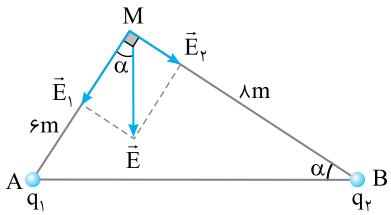
بـه همین ترتیـب میدان‌های حاصل از $q_۳$ و $q_۹$، $q_۴$، $q_{۱۰}$، $q_۵$، $q_{۱۱}$، $q_۶$، $q_{۱۲}$ با هم خنثی می‌شود و برآیند میدان در نقطه‌های P صفر می‌باشد.

پاسخ ۸۶ (B) با رسم میدان‌های هر بار مشخص می‌شود که این میدان‌ها دو به دو یکدیگر را خنثی کرده و میدان خالص (برایند) در نقطه P صفر است.



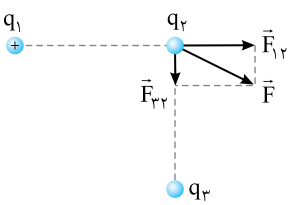
پاسخ ۸۷ (C) الف) با توجه به شکل باید جهت میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ به صورت روبه‌رو باشد. در این صورت برآیند $E_۱$ و $E_۲$ برابر E می‌شود، یعنی بارهای $q_۱$ و $q_۲$ هر دو منفی هستند.

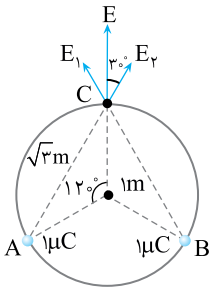
ب) با توجه به شکل:



$$\tan\alpha = \frac{E_۲}{E_۱} \Rightarrow \frac{۶}{۸} = \frac{k\frac{|q_۲|}{۶۴}}{k\frac{۱۰}{۳۶}} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{|q_۲|}{۱۰} \times \frac{۳۶}{۶۴} \Rightarrow |q_۲| = \frac{۴۰}{۳}\,mC$$

پاسخ ۸۸ (B) با توجه به شـکل روبه‌رو $q_۱$ باید $q_۲$ را دفع کند و $q_۳$، $q_۲$ را جذب کند، پس $q_۱$ و $q_۲$ همنام و $q_۳$ و $q_۲$ ناهمنام هسـتند، یعنی $q_۱$ و $q_۲$ مثبت و $q_۳$ منفی است.





پاسخ ۸۹ (B) اندازه‌ی میدان الکتریکی ناشی از هر یک از بارها برابر است با:

$$E_۱ = E_۲ = \frac{kq}{r^۲} = \frac{۹\times۱۰^۹ \times ۱\times۱۰^{-۶}}{(\sqrt{۳})^۲} = ۳\times۱۰^۳ \frac{N}{C}$$

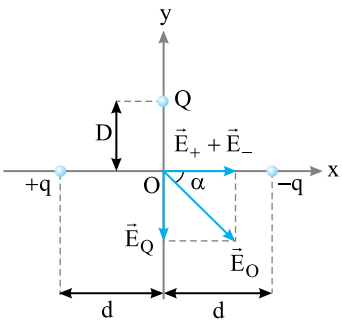
میدان کل برآیند این دو میدان است و با توجه به تقارن برابر است با:

$$E = ۲\times E_۱ \times \cos ۳۰^\circ = ۲\times ۳۰۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳۰۰۰\sqrt{۳}\ \frac{N}{C}$$

پاسخ ۹۰ (C) می‌توان برای رأس بدون بار فرض کرد که بارهای $+q$ و $-q$ را با هم در آن رأس قرار داده باشیم. در نتیجه این آرایش بار مانند این است که در هر هشت رأس، بار q وجود داشته باشد. در عین حال در یک رأس بار $-q$ نیز گذاشته باشیم. به دلیل تقارن، میدان ناشی از هشت بار q در مرکز مکعب صفر است. در نتیجه میدان در مرکز تنها ناشی از بار $-q$ می‌باشد که برابر است با:

$$E = \frac{kq}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)^۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{q}{\frac{۳}{۴}a^۲} = \frac{q}{۳\pi\varepsilon_۰ a^۲}$$

پاسخ ۹۱ (B) با توجه به شکل در نقطه‌ی O میدان بار $+q$ $(\vec{E}_+)$ و میدان بار $-q$ $(\vec{E}_-)$ هم‌جهت محور x و میدان بار Q در خلاف جهت محور y است.



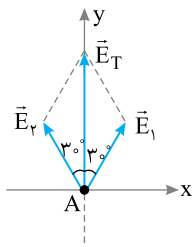
$$\tan\alpha = \frac{|\vec{E}_Q|}{|\vec{E}_+ + \vec{E}_-|} \Rightarrow \tan ۴۵^\circ = \frac{E_Q}{E_+ + E_-} \Rightarrow E_Q = E_+ + E_- \Rightarrow \frac{kQ}{D^۲} = \frac{kq}{d^۲} + \frac{kq}{d^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{D_۲} = \frac{۲q}{d^۲} \Rightarrow q = \frac{Q}{۲}\times(\frac{d}{D})^۲ = \frac{۴۰}{۲}\times\frac{۹}{۴} = ۴۵\mu C$$

$$E_Q = \frac{kQ}{D^۲} = \frac{۹\times۱۰^۹ \times ۴۰\times۱۰^{-۶}}{(۰/۲)^۲} = \frac{۳۶\times۱۰^۴}{۴\times۱۰^{-۲}} = ۹\times۱۰^۶ \frac{N}{C}$$

$$\sin\alpha = \frac{E_Q}{E_O} \Rightarrow E_O = \frac{E_Q}{\sin\alpha} = \frac{۹\times۱۰^۶}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow E_O = ۹\sqrt{۲}\times۱۰^۶ \frac{N}{C}$$

پاسخ ۹۲ (B) میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ را در نقطه‌ی A به دست می‌آوریم:



$$E_۱ = k\frac{q}{r^۲} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۲\times۱۰^{-۹}}{۱\times۱۰^{-۴}} = ۱۸\times۱۰^۴ \frac{N}{C}$$

$$E_۲ = k\frac{q_۲}{r^۲} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۲\times۱۰^{-۹}}{۱\times۱۰^{-۴}} = ۱۸\times۱۰^۴ \frac{N}{C}$$

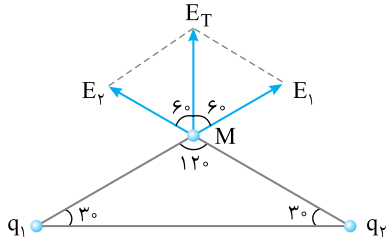
$$\Rightarrow E_۱ = E_۲ = ۱۸\times۱۰^۴ \frac{N}{C}$$

میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ را روی محورهای x و y تجزیه کنیم:

$$E_{۱x} = E_{۲x} = ۱۸\times۱۰^۴ \times \sin ۳۰^\circ = ۹\times۱۰^۴ \frac{N}{C} \quad , \quad E_{۱y} = E_{۲y} = ۱۸\times۱۰^۴ \times \cos ۳۰^\circ = ۹\sqrt{۳}\times۱۰^۴ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_T = (E_{۱x} - E_{۲x})(\vec{i}) + (E_{۱y} + E_{۲y})(\vec{j}) = (۹\times۱۰^{+۴} - ۹\times۱۰^{+۴})\vec{i} + ۱۸\sqrt{۳}\times۱۰^۴ \vec{j} = ۱۸\sqrt{۳}\times۱۰^۴ \vec{j}$$

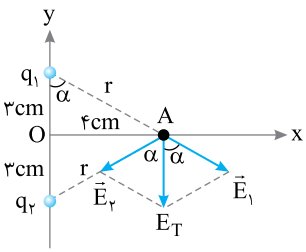
پاسخ ۹۳ (A) با توجه به شکل روبه‌رو، میدان هر بار را در محل M به دست می‌آوریم و برآیند می‌گیریم:



$$E_۱ = E_۲ = E = \frac{۹\times۱۰^۹ \times ۴\times۱۰^{-۶}}{۳۶\times۱۰^{-۴}} = ۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

$$E_T = ۲E\cos\frac{\theta}{۲} \Rightarrow ۲\times۱۰^۷ \times \cos ۶۰^\circ = ۱۰^۷ \frac{N}{C}$$

پاسخ ۹۴ الف) ابتدا فاصله‌ی بارها را از نقطه‌ی A به دست می‌آوریم:



$$r=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵cm$$

میدان هر بار را در نقطه‌ی A حساب می‌کنیم:

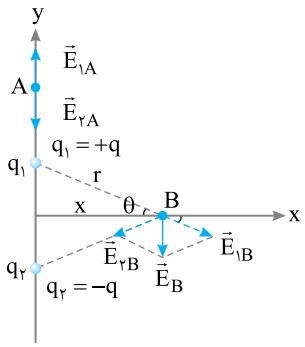
$$E_۱=E_۲=E=k\frac{q}{r^۲}\Rightarrow E=\frac{۹\times۱۰^۹\times۵\times۱۰^{-۶}}{۲۵\times۱۰^{-۴}}=\frac{۹}{۵}\times۱۰^۷\ \frac{N}{C}$$

میدان برآیند در نقطه‌ی A خواهد شد:

$$E_T=۲E\cos\frac{\theta}{۲}=۲E\cos\frac{۲\alpha}{۲}=۲E\cos\alpha=۲\times\frac{۹}{۵}\times۱۰^۷\times\frac{۳}{۵}=۲۱/۶\times۱۰^۶\ \frac{N}{C}$$

ب) $\vec{E}_T=-۲۱/۶\times۱۰^۶\vec{j}$

پاسخ ۹۵ مطابق شکل، در نقطه‌ی A میدان حاصل از بار $q_۱$ به سمت بالا و میدان حاصل از بار $q_۲$ به سمت پایین است. (شکل روبه‌رو)



$$\vec{E}_A=\vec{E}_{۱A}+\vec{E}_{۲A}\Rightarrow E_A=E_{۱A}-E_{۲A}$$

$$E_A=k\frac{q}{r_۱^۲}-k\frac{q}{r_۲^۲}\Rightarrow E_A=\frac{kq}{(y-a)^۲}-\frac{kq}{(y+a)^۲}\Rightarrow E_A=۴akq\frac{y}{(y^۲-a^۲)^۲}$$

$$\Rightarrow\vec{E}_A=۴akq\frac{y}{(y^۲-a^۲)^۲}\vec{j}$$

با توجه به شکل، چون نقطه‌ی B واقع بر عمود منصف پاره‌خط واصل دو بار است.
بزرگی میدان الکتریکی بارها در نقطه‌ی B با هم برابر است.

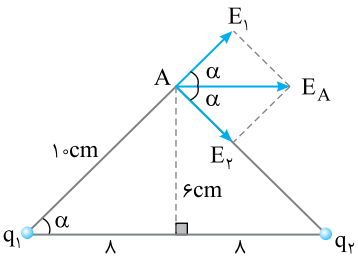
$$(E_{۱B}=E_{۲B}=k\frac{q}{r^۲}=k\frac{q}{(x^۲+a^۲)})$$

$$\vec{E}_B=\vec{E}_{۱B}+\vec{E}_{۲B}\Rightarrow\begin{cases}E_{Bx}=E_{۱Bx}-E_{۲Bx}\Rightarrow E_{Bx}=E_{۱B}\cos\theta-E_{۲B}\cos\theta\\ E_{By}=-E_{۱By}-E_{۲By}\Rightarrow E_{By}=-E_{۱B}\sin\theta-E_{۲B}\sin\theta\end{cases}$$

$$E_{۱B}=E_{۲B}\Rightarrow\begin{cases}E_{Bx}=۰\\ E_{By}=-۲E_{۱B}\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\vec{E}_B=-۲k\frac{q}{(a^۲+x^۲)}\sin\theta\vec{j}$$

$$\sin\theta=\frac{a}{r}\Rightarrow\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{x^۲+a^۲}}\Rightarrow\vec{E}_B=\frac{-۲akq}{\sqrt{(x^۲+a^۲)^۳}}\vec{j}$$

پاسخ ۹۶ میدان E موازی محور x و بنابراین موازی محور $q_۲q_۱$ است در نتیجه $|q_۱|=|q_۲|$ است و میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ در محل A برابرند و مطابق شکل باید $q_۱$ مثبت و $q_۲$ منفی باشد.



$$E_A=۲E_۱\cos\frac{۲\alpha}{۲}\Rightarrow E_A=۲\frac{kq}{r^۲}\cos\alpha$$

$$۷/۲\times۱۰^۴=۲\times۹\times۱۰^۹\times\frac{q_۱}{۱۰^{-۲}}\times(\frac{۸}{۱۰})\Rightarrow q_۱=q_۲=۵\times۱۰^{-۸}C$$